

Д.К.ФАДДЕЕВ и И.С.СОМИНСКИЙ

ФАДДЕЕВ  
и  
СОМИНСКИЙ

АЛГЕБРА

# АЛГЕБРА

Д. К. ФАДДЕЕВ и И. С. СОМИНСКИЙ

# АЛГЕБРА ДЛЯ САМООБРАЗОВАНИЯ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,  
ИСПРАВЛЕННОЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
МОСКВА 1964

## АННОТАЦИЯ

Книга охватывает все вопросы, включенные в программу курса алгебры средней школы. Особенностью ее является то, что с самого начала курса вводится понятие уравнения, и в дальнейшем уравнения используются как аппарат для выражения функциональной зависимости между величинами; с самого начала также используются таблицы для иллюстрации функциональной зависимости. В книге приведено большое количество тщательно подобранных задач и примеров, значительная часть которых снабжена решениями, указаниями, ответами.

Книга предназначена для лиц, желающих самостоятельно изучить алгебру в объеме десятилетки. Она может быть полезна как учебное пособие для учащихся средней школы и студентов техникумов.

Книга может быть также использована в качестве методического пособия преподавателями средних школ и техникумов.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                       |   |
|-----------------------|---|
| Предисловие . . . . . | 9 |
|-----------------------|---|

### Ч А С Т Ь I

|                                                                                                                     |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Глава I. Употребление букв при решении задач . . . . .</b>                                                       | <b>13</b> |
| § 1. Введение буквенных обозначений . . . . .                                                                       | 13        |
| § 2. Понятие об уравнении. Составление уравнения, выражающего зависимость между данными величинами . . . . .        | 16        |
| § 3. Порядок действий . . . . .                                                                                     | 19        |
| § 4. Коэффициент . . . . .                                                                                          | 23        |
| § 5. Степень. Возведение в степень . . . . .                                                                        | 25        |
| § 6. Законы арифметических действий . . . . .                                                                       | 27        |
| § 7. Об обратных действиях . . . . .                                                                                | 30        |
| § 8. Свойства арифметических действий . . . . .                                                                     | 32        |
| § 9. Уравнения с одним неизвестным . . . . .                                                                        | 33        |
| § 10. Понятие о тождестве . . . . .                                                                                 | 35        |
| § 11. Понятие о решении задач при помощи уравнений . . . . .                                                        | 36        |
| § 12. Решение задач при помощи уравнений . . . . .                                                                  | 39        |
| § 13. Уравнения с буквенными коэффициентами . . . . .                                                               | 43        |
| <b>Глава II. Положительные и отрицательные числа . . . . .</b>                                                      | <b>45</b> |
| § 1. Определение отрицательного числа . . . . .                                                                     | 45        |
| § 2. Вычитание из меньшего положительного числа большего . . . . .                                                  | 48        |
| § 3. Применение отрицательных чисел при описании изменения переменной величины . . . . .                            | 49        |
| § 4. Применение отрицательных чисел к измерению величин, изменяющихся в двух противоположных направлениях . . . . . | 51        |
| § 5. Изображение чисел в виде точек на прямой линии . . . . .                                                       | 52        |
| § 6. Сложение положительных и отрицательных чисел . . . . .                                                         | 53        |
| § 7. Свойства сложения . . . . .                                                                                    | 55        |
| § 8. Вычитание . . . . .                                                                                            | 57        |
| § 9. Алгебраическая сумма . . . . .                                                                                 | 58        |
| § 10. Употребление знаков неравенства . . . . .                                                                     | 59        |
| § 11. Направленные отрезки . . . . .                                                                                | 61        |
| § 12. Умножение положительных и отрицательных чисел . . . . .                                                       | 63        |
| § 13. Основное свойство нуля . . . . .                                                                              | 66        |
| § 14. Умножение нескольких чисел и возведение отрицательного числа в степень . . . . .                              | 67        |
| § 15. Деление . . . . .                                                                                             | 68        |
| § 16. Истолкование отрицательного ответа при решении задач . . . . .                                                | 70        |
| § 17. Графическое изображение зависимости между двумя переменными величинами . . . . .                              | 71        |
| <b>Глава III. Преобразования целых алгебраических выражений . . . . .</b>                                           | <b>79</b> |
| § 1. Цель алгебраических преобразований . . . . .                                                                   | 79        |
| § 2. Типы алгебраических выражений . . . . .                                                                        | 79        |



|                                                                     |                                                                                                    |            |
|---------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| § 3.                                                                | Приведение подобных членов . . . . .                                                               | 81         |
| § 4.                                                                | Сложение и вычитание многочленов . . . . .                                                         | 82         |
| § 5.                                                                | Умножение степеней одной буквы и возведение степени в степень . . . . .                            | 84         |
| § 6.                                                                | Умножение одночленов . . . . .                                                                     | 85         |
| § 7.                                                                | Возведение одночлена в степень . . . . .                                                           | 85         |
| § 8.                                                                | Умножение многочлена на одночлен . . . . .                                                         | 86         |
| § 9.                                                                | Умножение многочлена на многочлен . . . . .                                                        | 87         |
| § 10.                                                               | Умножение нескольких многочленов . . . . .                                                         | 88         |
| § 11.                                                               | Умножение многочленов, содержащих одну букву . . . . .                                             | 89         |
| § 12.                                                               | Сокращенное умножение по формулам . . . . .                                                        | 91         |
| § 13.                                                               | Применение формул сокращенного умножения к устным вычислениям . . . . .                            | 94         |
| § 14.                                                               | Некоторые выводы . . . . .                                                                         | 95         |
| <b>Глава IV. Разложение многочленов на множители . . . . .</b>      |                                                                                                    | <b>98</b>  |
| § 1.                                                                | Понятие о разложении на множители . . . . .                                                        | 98         |
| § 2.                                                                | Вынесение за скобку . . . . .                                                                      | 99         |
| § 3.                                                                | Применение вынесения за скобку к расположению многочлена по степеням одной буквы . . . . .         | 101        |
| § 4.                                                                | Способ группировки . . . . .                                                                       | 102        |
| § 5.                                                                | Разложение отдельных членов многочлена на подобные слагаемые . . . . .                             | 103        |
| § 6.                                                                | Применение формул сокращенного умножения . . . . .                                                 | 104        |
| § 7.                                                                | Более сложные примеры . . . . .                                                                    | 105        |
| § 8.                                                                | Разложение квадратного трехчлена на множители . . . . .                                            | 107        |
| <b>Глава V. Преобразование дробных алгебраических выражений . .</b> |                                                                                                    | <b>110</b> |
| § 1.                                                                | Особенность дробных выражений . . . . .                                                            | 110        |
| § 2.                                                                | Основное свойство дроби . . . . .                                                                  | 112        |
| § 3.                                                                | Деление целых алгебраических выражений . . . . .                                                   | 114        |
| § 4.                                                                | Деление степеней с одинаковыми основаниями . . . . .                                               | 114        |
| § 5.                                                                | Деление одночленов . . . . .                                                                       | 116        |
| § 6.                                                                | Деление многочлена на одночлен . . . . .                                                           | 117        |
| § 7.                                                                | Применение формул сокращенного умножения к делению многочлена на многочлен . . . . .               | 120        |
| § 8.                                                                | Общие замечания о делении многочлена на многочлен . . . . .                                        | 122        |
| § 9.                                                                | Деление многочленов, зависящих от одной буквы . . . . .                                            | 123        |
| § 10.                                                               | Сокращение алгебраических дробей . . . . .                                                         | 126        |
| § 11.                                                               | Упрощение алгебраической дроби с дробными коэффициентами . . . . .                                 | 127        |
| § 12.                                                               | Сложение и вычитание алгебраических дробей . . . . .                                               | 128        |
| § 13.                                                               | Умножение алгебраических дробей . . . . .                                                          | 130        |
| § 14.                                                               | Деление алгебраических дробей . . . . .                                                            | 131        |
| § 15.                                                               | Упрощение дроби, числитель и знаменатель которой являются алгебраическими суммами дробей . . . . . | 132        |
| § 16.                                                               | Общие выводы . . . . .                                                                             | 133        |
| <b>Глава VI. Пропорции и пропорциональная зависимость . . . . .</b> |                                                                                                    | <b>135</b> |
| § 1.                                                                | Определения . . . . .                                                                              | 135        |
| § 2.                                                                | Главное свойство пропорции . . . . .                                                               | 135        |
| § 3.                                                                | Определение неизвестного члена пропорции . . . . .                                                 | 136        |
| § 4.                                                                | Перестановка членов пропорции . . . . .                                                            | 137        |
| § 5.                                                                | Производные пропорции . . . . .                                                                    | 138        |
| § 6.                                                                | Ряд равных отношений . . . . .                                                                     | 139        |
| § 7.                                                                | Пропорциональная зависимость . . . . .                                                             | 140        |

|                                                                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Глава VII. Уравнения и неравенства первой степени с одним неизвестным</b>                              | 143 |
| § 1. Два свойства уравнений                                                                               | 143 |
| § 2. Понятие о равносильности уравнений                                                                   | 147 |
| § 3. О некоторых преобразованиях уравнения, которые могут привести к потере или приобретению решений      | 148 |
| § 4. Решение уравнений                                                                                    | 150 |
| § 5. О числе решений уравнения первой степени с одним неизвестным                                         | 152 |
| § 6. Уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе                                                      | 153 |
| § 7. Решение задач при помощи уравнений. Понятие об исследовании задачи                                   | 154 |
| § 8. Применение уравнений к решению задач в общем виде                                                    | 161 |
| § 9. Понятие о неравенстве                                                                                | 162 |
| § 10. Свойства неравенств                                                                                 | 164 |
| § 11. Решение неравенств первой степени с одним неизвестным                                               | 166 |
| <b>Глава VIII. Системы уравнений</b>                                                                      | 169 |
| § 1. Понятие о системе двух уравнений первой степени с двумя неизвестными                                 | 169 |
| § 2. Одно уравнение первой степени с двумя неизвестными                                                   | 171 |
| § 3. Решение систем уравнений при помощи графиков                                                         | 174 |
| § 4. О числе решений системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными                           | 176 |
| § 5. Способ сравнения                                                                                     | 177 |
| § 6. Свойство выводных уравнений                                                                          | 182 |
| § 7. Способ сложения и вычитания                                                                          | 185 |
| § 8. Способ подстановки                                                                                   | 188 |
| § 9. Решение систем уравнений первой степени с двумя неизвестными с буквенными коэффициентами             | 191 |
| § 10. Решение задач при помощи системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными                 | 192 |
| § 11. Системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными                                          | 193 |
| § 12. Решение системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными                                  | 195 |
| § 13. О числе решений системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными                          | 201 |
| <b>Глава IX. Извлечение квадратного корня</b>                                                             | 202 |
| § 1. Определение действия извлечения корня                                                                | 202 |
| § 2. Арифметическое значение квадратного корня                                                            | 202 |
| § 3. Постановка вопроса о приближенном вычислении корня                                                   | 204 |
| § 4. Извлечение квадратного корня при помощи графика                                                      | 206 |
| § 5. Извлечение квадратного корня из числа, заключенного между 1 и 100, с точностью до 0,1                | 208 |
| § 6. Извлечение квадратного корня из числа, заключенного между 1 и 100, с точностью до 0,01               | 212 |
| § 7. Извлечение квадратного корня из любого данного числа с любым заданным числом десятичных знаков       | 213 |
| § 8. Применение графиков для приближенного решения уравнений и систем двух уравнений с двумя неизвестными | 215 |

## ЧАСТЬ II

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| <b>Глава I. Степень, корни и иррациональные числа</b> | 218 |
| § 1. Свойства степени с целым показателем             | 218 |
| § 2. Квадрат суммы нескольких слагаемых               | 220 |
| § 3. Некоторые свойства степени                       | 221 |

|       |                                                                                                                       |     |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 4.  | Корень любой степени из числа . . . . .                                                                               | 224 |
| § 5.  | Недостаточность совокупности рациональных чисел для извлечения корня из любого рационального положительного числа . . | 226 |
| § 6.  | Приближенное извлечение корня . . . . .                                                                               | 227 |
| § 7.  | Связь задачи об извлечении корня с задачей об измерении отрезков . . . . .                                            | 229 |
| § 8.  | Измерение отрезков. Определение иррационального и действительного числа . . . . .                                     | 230 |
| § 9.  | Изображение действительных чисел на числовой оси. Неравенства . . . . .                                               | 234 |
| § 10. | Приближения к действительным числам . . . . .                                                                         | 236 |
| § 11. | Свойство непрерывности совокупности действительных чисел .                                                            | 239 |
| § 12. | Сложение и вычитание действительных чисел . . . . .                                                                   | 241 |
| § 13. | Умножение и деление действительных чисел . . . . .                                                                    | 245 |
| § 14. | Возведение в степень и извлечение корня . . . . .                                                                     | 247 |
| § 15. | Извлечение корня из произведения, дроби и степени . . . . .                                                           | 250 |
| § 16. | Умножение и деление корней . . . . .                                                                                  | 252 |
| § 17. | Возведение корня в степень и извлечение корня из корня . .                                                            | 253 |
| § 18. | Вынесение рационального множителя из-под знака корня и введение его под знак корня . . . . .                          | 254 |
| § 19. | Подобные радикалы и их сложение . . . . .                                                                             | 256 |
| § 20. | Исключение иррациональности в знаменателе . . . . .                                                                   | 257 |

## Глава II. Квадратные уравнения и уравнения, приводящиеся к квадратным . . . . . 260

|       |                                                                                                 |     |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 1.  | Целые алгебраические уравнения и их классификация . . . . .                                     | 260 |
| § 2.  | Неполные квадратные уравнения . . . . .                                                         | 261 |
| § 3.  | Приведенное квадратное уравнение . . . . .                                                      | 263 |
| § 4.  | Общее квадратное уравнение . . . . .                                                            | 266 |
| § 5.  | Некоторые задачи, приводящиеся к квадратным уравнениям . .                                      | 269 |
| § 6.  | Связь между коэффициентами и корнями квадратного уравнения . . . . .                            | 272 |
| § 7.  | Разложение квадратного трехчлена на множители . . . . .                                         | 273 |
| § 8.  | Составление квадратного уравнения по данным корням . . . . .                                    | 275 |
| § 9.  | Примеры и приложения . . . . .                                                                  | 275 |
| § 10. | Исследование корней квадратного уравнения по коэффициенту и дискриминанту . . . . .             | 278 |
| § 11. | Биквадратные уравнения . . . . .                                                                | 279 |
| § 12. | Некоторые уравнения, сводящиеся к квадратным посредством введения нового неизвестного . . . . . | 280 |
| § 13. | Возвратные уравнения . . . . .                                                                  | 282 |
| § 14. | Второй способ решения биквадратного уравнения . . . . .                                         | 284 |
| § 15. | Преобразование уравнений . . . . .                                                              | 286 |
| § 16. | Дробные алгебраические уравнения . . . . .                                                      | 289 |
| § 17. | Иррациональные уравнения . . . . .                                                              | 293 |

## Глава III. Функции и их графики . . . . . 298

|      |                                                                              |     |
|------|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 1. | Функциональная зависимость . . . . .                                         | 298 |
| § 2. | Прямоугольная система координат на плоскости . . . . .                       | 301 |
| § 3. | График функции . . . . .                                                     | 302 |
| § 4. | Прямо пропорциональная зависимость . . . . .                                 | 306 |
| § 5. | Линейная функция . . . . .                                                   | 309 |
| § 6. | Геометрический смысл уравнения первой степени с двумя неизвестными . . . . . | 311 |
| § 7. | Квадратичная функция . . . . .                                               | 312 |
| § 8. | Исследование графика квадратичной функции . . . . .                          | 317 |
| § 9. | Обратно пропорциональная зависимость . . . . .                               | 319 |

|                                                                                                                  |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Глава IV. Системы уравнений высших степеней</b> . . . . .                                                     | <b>323</b> |
| § 1. Система двух уравнений первой и второй степени с двумя неизвестными . . . . .                               | 323        |
| § 2. Некоторые системы уравнений, решаемые особыми приемами . . . . .                                            | 325        |
| § 3. Системы двух уравнений второй степени, не содержащие линейных членов . . . . .                              | 327        |
| § 4. Несколько приемов решения систем уравнений высших степеней . . . . .                                        | 329        |
| § 5. Графическое решение уравнений с одним неизвестным . . . . .                                                 | 333        |
| § 6. Графическое решение систем двух уравнений с двумя неизвестными . . . . .                                    | 335        |
| § 7. Уточнение корня уравнения или решения системы нелинейных уравнений, исходя из грубого приближения . . . . . | 339        |
| <b>Глава V. Последовательности чисел</b> . . . . .                                                               | <b>341</b> |
| § 1. Основные определения . . . . .                                                                              | 341        |
| § 2. Арифметическая прогрессия . . . . .                                                                         | 344        |
| § 3. Геометрическая прогрессия . . . . .                                                                         | 348        |
| § 4. Геометрическое представление числовой последовательности . . . . .                                          | 351        |
| § 5. Предел числовой последовательности . . . . .                                                                | 352        |
| § 6. Теоремы о пределах . . . . .                                                                                | 356        |
| § 7. Арифметические операции над последовательностями . . . . .                                                  | 360        |
| § 8. Монотонные последовательности . . . . .                                                                     | 366        |
| § 9. Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии . . . . .                                                | 363        |
| § 10. Обращение десятичной периодической дроби в обыкновенную . . . . .                                          | 371        |
| <b>Глава VI. Обобщение понятия о показателе степени</b> . . . . .                                                | <b>373</b> |
| § 1. Введение . . . . .                                                                                          | 373        |
| § 2. Понятие о степени с нулевым и отрицательным показателем . . . . .                                           | 373        |
| § 3. Понятие о степени с дробным показателем . . . . .                                                           | 375        |
| § 4. Понятие о степени с дробным отрицательным показателем . . . . .                                             | 376        |
| § 5. Действия над степенями с рациональными показателями . . . . .                                               | 377        |
| § 6. Степень с рациональным показателем . . . . .                                                                | 382        |
| § 7. Понятие о степени с иррациональным показателем . . . . .                                                    | 384        |
| § 8. Некоторые свойства степени с любым вещественным показателем . . . . .                                       | 386        |
| <b>Глава VII. Показательные функции и логарифмы</b> . . . . .                                                    | <b>388</b> |
| § 1. Определение показательной функции . . . . .                                                                 | 388        |
| § 2. Свойства функции $a^x$ . . . . .                                                                            | 388        |
| § 3. График показательной функции . . . . .                                                                      | 391        |
| § 4. Определение логарифма . . . . .                                                                             | 393        |
| § 5. Логарифмическая функция . . . . .                                                                           | 393        |
| § 6. Свойства логарифмов чисел . . . . .                                                                         | 395        |
| § 7. Теоремы о логарифмах . . . . .                                                                              | 396        |
| § 8. Логарифмирование и потенцирование выражений . . . . .                                                       | 398        |
| § 9. Десятичные логарифмы . . . . .                                                                              | 399        |
| § 10. Характеристика и мантисса . . . . .                                                                        | 401        |
| § 11. Понятие о вычислении логарифмов . . . . .                                                                  | 402        |
| § 12. Интерполирование . . . . .                                                                                 | 404        |
| § 13. Употребление четырехзначных логарифмических таблиц . . . . .                                               | 404        |
| § 14. Действия над логарифмами с отрицательными характеристиками . . . . .                                       | 405        |
| § 15. Понятие об устройстве логарифмической линейки . . . . .                                                    | 407        |
| § 16. Решение некоторых трансцендентных уравнений . . . . .                                                      | 409        |

|                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Глава VIII. Соединения и бином Ньютона . . . . .                                         | 412 |
| § 1. Размещения . . . . .                                                                | 412 |
| § 2. Перестановки . . . . .                                                              | 414 |
| § 3. Сочетания . . . . .                                                                 | 415 |
| § 4. Некоторые суммы и их свойства . . . . .                                             | 417 |
| § 5. О произведении двучленов, первые члены которых одинаковы . . . . .                  | 418 |
| § 6. Натуральная степень бинома (формула Ньютона) . . . . .                              | 419 |
| § 7. Свойства разложения по формуле Ньютона . . . . .                                    | 419 |
| Глава IX. Комплексные числа . . . . .                                                    | 423 |
| § 1. Развитие понятия числа . . . . .                                                    | 423 |
| § 2. Определение комплексного числа . . . . .                                            | 428 |
| § 3. Свойства комплексных чисел . . . . .                                                | 429 |
| § 4. Свойства нуля . . . . .                                                             | 431 |
| § 5. Геометрическое представление комплексных чисел . . . . .                            | 431 |
| § 6. Комплексные числа в тригонометрической форме . . . . .                              | 432 |
| § 7. Формула Муавра . . . . .                                                            | 434 |
| § 8. Извлечение квадратного корня из отрицательного числа . . . . .                      | 435 |
| § 9. Извлечение корня $n$ -й степени из комплексного числа . . . . .                     | 435 |
| § 10. Некоторые приложения комплексных чисел . . . . .                                   | 437 |
| Глава X. Неравенства . . . . .                                                           | 440 |
| § 1. Основные свойства неравенств . . . . .                                              | 440 |
| § 2. Доказательство неравенств . . . . .                                                 | 443 |
| § 3. Равносильные неравенства . . . . .                                                  | 449 |
| § 4. Решение неравенств и систем неравенств первой степени с одним неизвестным . . . . . | 452 |
| § 5. Цель исследования уравнений . . . . .                                               | 456 |
| § 6. Исследование уравнения первой степени с одним неизвестным . . . . .                 | 456 |
| § 7. Исследование системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными . . . . .   | 458 |
| § 8. Исследование квадратного трехчлена . . . . .                                        | 467 |
| § 9. Решение неравенства второй степени с одним неизвестным . . . . .                    | 471 |
| Глава XI. Уравнения высших степеней . . . . .                                            | 473 |
| § 1. Уравнения $n$ -й степени с одним неизвестным . . . . .                              | 473 |
| § 2. Деление многочлена относительно $x$ на $x - a$ . . . . .                            | 473 |
| § 3. Составление уравнения $n$ -й степени по его корням . . . . .                        | 475 |
| § 4. Основная теорема алгебры и некоторые следствия из нее . . . . .                     | 476 |
| § 5. Теорема Виета . . . . .                                                             | 480 |
| § 6. О решении уравнений высших степеней . . . . .                                       | 481 |
| § 7. Вычисление рациональных корней уравнений с целыми коэффициентами . . . . .          | 482 |
| § 8. Решение двучленных уравнений 3-й, 4-й и 6-й степени . . . . .                       | 485 |
| § 9. Решение трехчленных уравнений . . . . .                                             | 487 |
| Дополнение . . . . .                                                                     | 489 |
| Ответы и решения . . . . .                                                               | 501 |



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая книга охватывает все вопросы, включенные в программу курса алгебры средней школы.

С целью использования книги как пособия для самообразования в ней приведено большое количество упражнений и задач, снабженных ответами, указаниями и иногда решениями.

Мы считаем необходимым разъяснить читателю, самостоятельно работающему над изучением алгебры, что изучение каждого вопроса курса алгебры нужно обязательно закрепить решением упражнений. Надо тщательно выполнить упражнения, помещенные в конце каждого параграфа, прежде чем переходить к следующему параграфу. Впрочем, при первом чтении книги можно выполнить только часть упражнений и перейти к изучению следующего параграфа, но тогда уж при повторении материала нужно выполнить все упражнения.

Разумеется, примеры и задачи книги не могут заменить систематического сборника задач и упражнений по алгебре. Мы старались привести лишь примеры и упражнения от типовых до более сложных.

При подборе упражнений по пропедевтическому курсу уравнений и задач на доказательство были частично использованы методические работы А. Ф. Галкиной (Бедриной) и О. Я. Лихачевой. Кроме того, частично использованы сборники тренировочных упражнений для проведения математических олимпиад в г. Ленинграде.

Книга отличается следующими особенностями, которые мы отметим в порядке, соответствующем ее построению:

1. В самом начале курса вводится понятие уравнения, и уравнения используются как аппарат для выражения зависимости между величинами.

2. При рассмотрении вопроса о порядке действий вводятся скобки для обозначения  $a : (b \cdot c)$  и  $(a : b) : c$ .

3. С самого начала курса используются таблицы для иллюстрации функциональной зависимости.

4. Введен специальный параграф для рассмотрения обратных действий. Здесь уделено особое внимание «делению на нуль».

5. Несколько параграфов гл. I посвящены вопросу о решении задач при помощи уравнений.

Читатель должен позаботиться о том, чтобы к тому времени, когда будет изучаться гл. VII ч. I, был бы уже приобретен навык по решению задач при помощи уравнений. Для этого необходимо на протяжении всего курса решать задачи на составление уравнений.

6. Решение уравнений с буквенными коэффициентами не отрывается от решения уравнений с числовыми коэффициентами. С самого начала курса ведется работа по исследованию уравнений и задач. Потребность в исследовании, а также необходимые для этого навыки воспитываются у учащихся постепенно.

7. В книге дается следующее определение отрицательного числа: каждому положительному числу сопоставляется число, называемое отрицательным. При этом считается, что добавление к какому-либо числу отрицательного числа равносильно вычитанию соответствующего положительного (ч. I, гл. II, § 1).

Это определение занимает промежуточное положение между чисто внешним и полным аксиоматическим, в состав которого включаются правила действий. Оно наиболее близко к определению того понятия «вычитаемого числа», которое было впервые введено в математику еще в античные времена. Вместе с тем в данном определении, помимо внешнего описания (первая часть формулировки), содержится самое существенное—возможность естественного обоснования действия вычитания из меньшего числа большего, что по мнению авторов является наиболее существенным поводом для введения отрицательных чисел в математику. Именно эта возможность делает алгебру простым и совершенным аппаратом, имеющим огромную силу в приложениях, в то время как без этой возможности алгебра была бы совершенно беспомощной.

8. Гл. II ч. I заканчивается § 17, посвященным графическому изображению зависимости между двумя переменными величинами. Предполагается, что, начиная с этого времени, учащиеся будут систематически обращаться к графикам для изучения зависимостей между величинами. Это окажет большую помощь им как в овладении идеей функциональной зависимости, так и в использовании графиков для разрешения различных вопросов.

9. В параграфах, посвященных тождественным преобразованиям, не только выводятся и формулируются общие правила, но и показывается, как при решении конкретных вопросов следует пользоваться частными особенностями задачи, как следует вырабатывать у учащихся умение подчинить выбор правил и приемов поставленной цели.

10. Деление целых алгебраических выражений отнесено в главу о преобразованиях дробных алгебраических выражений.

11. Основные свойства уравнений (ч. I, гл. VII, § 1) излагаются сначала без употребления термина «равносильность уравнений». Соответствующие теоремы не доказываются в общем виде. Вместо этого разъясняется на примерах, почему при таком-то преобразовании уравнения оно не теряет и не приобретает решений. Позднее (§ 2) вводится термин «равносильность уравнений», и установленные свойства заново формулируются с помощью этого термина.

Объяснение сути дела здесь полезнее формального заучивания доказательств. Если учащийся сможет объяснить, почему при данном конкретном преобразовании уравнение не может потерять или приобрести решение или, наоборот, может потерять или приобрести его, то цель можно считать достигнутой.

12. В книге разобран ряд задач на составление уравнений и при этом не только иллюстрируются обычные приемы составления уравнений, но и приводятся задачи, требующие оценки их решения по смыслу (ч. I, гл. VII, § 7).

13. Решение системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными (гл. VIII) органически связано с таблицами и графиками. В связи с этим в первую очередь излагается способ сравнения (§ 5). Он естественно вытекает из принятого изложения.

Решению систем способом сложения и вычитания (§ 7) предпосылается параграф о свойствах выводных уравнений (§ 6).

14. В гл. I ч. II, в которой рассматривается понятие иррационального числа, мы позволили себе некоторое отступление от традиционного изложения. Мы считаем, что понятие иррационального числа необходимо вводить,

исходя из потребностей алгебры (действие извлечения корня) и из потребностей геометрии (измерение отрезков). Изложение должно быть построено так, чтобы была ясна связь между этими двумя источниками происхождения понятия иррационального числа.

Иррациональное число мы определяем как «длину» отрезка несоизмеримого с единицей масштаба, т. е. отождествляем понятие иррационального числа с евклидовым «отношением» длин отрезков, называя такое отношение числом, если оно и не является рациональным числом.

Такое определение иррационального числа весьма наглядно и определенно и, как нам кажется, вполне отвечает тому уровню строгости, какой должен быть выдержан в школьном курсе элементарной алгебры. Более того, последовательное проведение теории иррационального числа на основе этого определения и аксиом Гильберта (включая аксиому непрерывности) может быть выполнено совершенно строго, если отвлечься от вопроса о непротиворечивости аксиом геометрии.

Бесконечная десятичная дробь появляется как определенная форма записи иррационального числа. Возможность извлечения корня любой степени из положительного вещественного числа геометрически означает возможность измерения ординаты точки на графике степенной функции, имеющей заданную абсциссу.

15. В гл. II ч. II мы рассматриваем, кроме материала программы, некоторые типы уравнений четвертой степени, приводящиеся к квадратным, причем отмечаем метод введения вспомогательной неизвестной, который может быть использован во многих других случаях. В этой же главе рассматривается вопрос о равносильности уравнений и уясняется смысл высказывания о том, что одно уравнение есть следствие другого.

16. В гл. III ч. II мы рассматриваем графики простейших зависимостей — линейной функции, квадратной функции и обратной пропорциональности, — вместе с тем приводим ряд примеров графиков более сложных. Это облегчает усвоение темы, так как рассмотрение только простейших графиков чрезвычайно скучно для учащихся и, кроме того, на простейших примерах у учащихся не воспитывается ощущения графической наглядности алгебраической формулы, а потому и цель введения графиков остается не вполне уясненной.

17. В гл. IV ч. II рассматриваются системы уравнений высших степеней. Кроме простейших типов систем, мы приводим несколько более сложных примеров, демонстрируя на них, в частности, метод вспомогательного неизвестного. Наконец, при рассмотрении графического решения уравнений и систем мы позволили себе изложить в доступной форме метод Ньютона как средство уточнения решения уравнения или системы, снятого с графика.

18. Теория пределов изложена для последовательностей. Для большей наглядности применяются геометрические доказательства.

19. В гл. VI ч. II почти все теоремы о действиях над степенями с рациональными показателями даны петитом. Предполагается, что большинство из этих теорем будет изучено без доказательства. Теоремы § 6 и 8 нужны для изучения показательной функции.

20. В гл. VII ч. II особое значение имеет шестое свойство показательной функции (§ 2), выражающее теорему о существовании логарифма. В § 9 доказывается, что логарифмы рациональных чисел вообще иррациональны. Этот пункт § 9, а также § 11 «Понятие о вычислении логарифмов» можно опустить. Параграф об устройстве логарифмической линейки имеет целью сообщить только первые необходимые сведения.

21. Теория соединения и бином Ньютона изложены с доказательством всех относящихся сюда теорем.

22. При изложении теории комплексных чисел наибольшее затруднение вызывает вопрос о целесообразности введения в математику комплексных чисел. Здесь не удается указать такую практическую задачу, которая могла бы быть решена элементарно и из рассмотрения которой выяснилось бы, что

комплексные числа ввести целесообразно и что действия над ними нужно определить именно соответствующим образом. Поэтому о практической значимости введения комплексного числа приходится только рассказать и ограничиться обоснованием целесообразности введения комплексного числа потребностями математики. Несколько позднее показывается, что введение комплексного числа облегчает решение некоторых математических задач. В истории математики понятие комплексного числа сложилось именно из потребностей самой математики, а приложения комплексных чисел к задачам механики, физики и т. д. были найдены значительно позднее.

23. В гл. X ч. II дается два изложения теории систем двух уравнений первой степени с двумя неизвестными. Второе из этих изложений дано пети-том. Оно короче первого, но зато формальнее. Читатель может выбрать любое из этих изложений.

24. Гл. XI ч. II содержит основную теорему алгебры и некоторые следствия из нее.

25. В конце книги приложено «Дополнение». В этой главе разъясняются некоторые элементы логики, имеющие приложение в математике, и помещены примерные упражнения применительно к некоторым разделам курса. Сам собой разумеется, что эта маленькая глава не претендует на полное освещение вопроса.

*Авторы*

## Г Л А В А I

### УПОТРЕБЛЕНИЕ БУКВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

#### § 1. Введение буквенных обозначений

**Задача.** Сколько времени требуется пароходу, чтобы пройти вверх по реке 900 км, если скорость парохода в стоячей воде 16 км/час, а скорость течения реки 4 км/час?

При решении задачи мы не будем производить вычисления, а будем только намечать необходимые действия.

**Решение.** 1) Сколько километров проходит пароход за 1 час?

$$(16 - 4) \text{ км.}$$

2) Во сколько часов пройдет пароход 900 км?

$$\frac{900}{16 - 4} \text{ час.}$$

Выражение  $\frac{900}{16 - 4}$  называется *формулой решения задачи*. В формуле указано, какие действия и в каком порядке достаточно произвести над данными числами, чтобы получить искомое. Когда формула решения задачи составлена, окончательный ответ получить нетрудно. Нужно лишь произвести указанные в формуле вычисления.

*Ответ.* 75 час.

Рассмотрим теперь еще две задачи такого же типа.

**Задача.** Сколько времени требуется пароходу, чтобы пройти вверх по реке 300 км, если скорость парохода в стоячей воде 15 км/час, а скорость течения реки 3 км/час?

**Решение.** Эта задача отличается от предыдущей только числовыми данными и потому решается так же, как и предыдущая. Вот формула ее решения:  $\frac{300}{15 - 3}$ .

*Ответ.* 25 час.

**Задача.** Сколько времени требуется пароходу, чтобы пройти вверх по реке 350 км, если скорость парохода в стоячей воде 14 км/час, а скорость течения реки 3,5 км/час?

Решение. Эта задача того же типа, что и две предыдущие. Вот формула ее решения:  $\frac{350}{14 - 3,5}$ .

Ответ.  $33\frac{1}{3}$  час.

Мы рассмотрели три задачи и для каждой из них составили формулу решения. Сравнение этих формул показывает, что они имеют один и тот же вид и отличаются одна от другой только числовыми данными.

*Задачи, имеющие одинаковые условия и отличающиеся только числовыми данными, имеют одинаковые по своему строению формулы решения.*

Рассмотренные задачи решаются по такому правилу:

Для того чтобы узнать, во сколько часов пройдет пароход данное расстояние против течения реки, достаточно из скорости парохода в стоячей воде (в км/час) вычесть скорость течения реки (в км/час), а затем расстояние (в км) разделить на полученную разность.

Для того чтобы упростить правило и выразить его в более наглядной форме, можно поступить так: составить формулу решения задачи, но вместо чисел, данных в условии, писать словами то, что эти числа обозначают. Правило решения рассматриваемых задач можно записать так:

Расстояние

$$\frac{\left[ \begin{array}{c} \text{Скорость парохода} \\ \text{в стоячей воде} \end{array} \right] - \left[ \begin{array}{c} \text{Скорость течения} \\ \text{реки} \end{array} \right]}{}$$

А еще лучше обозначить расстояние, которое проходит пароход (в км), буквой  $S$ , скорость парохода в стоячей воде (в км/час) — буквой  $V$ , скорость течения реки (в км/час) — буквой  $v$ . Буквенное выражение

$$\frac{S}{V-v}$$

представляет собой общую формулу решения задач указанного типа и служит кратким и наглядным выражением общего правила их решения.

Когда общая формула решения задач данного типа составлена, легко решить и любую частную задачу этого типа (т. е. такую, где в условии даны не буквы, а числа). Для этого достаточно в общую формулу подставить вместо букв соответствующие числа и произвести вычисления.

Каждый раз, когда хотят получить общее правило решения задач некоторого типа, задачу дают сразу в общем виде, т. е. в условии пишут не числа, а буквы. Например, рассмотренная нами задача в общем виде выглядит так:

**Задача.** Сколько времени требуется пароходу, чтобы пройти вверх по реке  $S$  км, если скорость парохода в стоячей воде  $V$  км/час, а скорость течения реки  $v$  км/час?

**Решение.** Так как буквы у нас обозначают числа, решение задачи, поставленной в общем виде, ведется точно так же, как и решение задачи в частном виде.

1) Сколько километров проходит пароход в 1 час?

$$(V - v) \text{ км.}$$

2) Во сколько часов пройдет пароход  $S$  км?

$$\frac{S}{V - v} \text{ час.}$$

$$\text{Ответ. } \frac{S}{V - v} \text{ час.}$$

Обозначение чисел буквами дает возможность получать решения задач в *общем виде*.

**Определение.** Выражение, в котором указано, какие действия и в каком порядке надо произвести над данными числами, называется *алгебраическим выражением*. Числа при этом могут быть обозначены буквами или при помощи цифр. Например,  $\frac{S}{V - v}$ ;  $a + 3$ ;  $11 - 5$  — алгебраические выражения.

Для обозначения действий в алгебре пользуются теми же знаками, что и в арифметике: сложение обозначается знаком  $+$ ; вычитание обозначается знаком  $-$ ; умножение обозначается знаком  $\times$ , точкой или, наконец, знак умножения не пишут совсем; деление обозначается знаком  $:$  или горизонтальной чертой. Так  $a + b$  означает сумму чисел  $a$  и  $b$ ;  $a \times b$ ,  $a \cdot b$ ,  $ab$  одинаково означают произведения чисел  $a$  и  $b$ ;  $a : b$  и  $\frac{a}{b}$  одинаково означают частное от деления числа  $a$  на число  $b$ .

*Численное значение буквенного выражения зависит от того, какие значения имеют входящие в него буквы.*

### Упражнения

**Задача 1.** Вычислить выражение  $\frac{S}{V - v}$  при  $S = 100$ ,  $V = 10$ ,  $v = 2,5$ .

**Задача 2.** Заполнить таблицу:

| $S$ | $V$  | $v$             | $\frac{S}{V - v}$ |
|-----|------|-----------------|-------------------|
| 900 | 16   | 4               |                   |
| 300 | 15   | 3               |                   |
| 350 | 14   | 3,5             |                   |
| 210 | 12   | 3,1             |                   |
| 120 | 13,5 | 3 $\frac{1}{3}$ |                   |

**Задача 3.** Во сколько часов пройдет пароход *вниз* по реке расстояние  $S$  км, если скорость парохода в стоячей воде  $V$  км/час, а скорость течения реки  $v$  км/час?

**Задача 4.** Пользуясь решением предыдущей задачи, определить, сколько часов потребуются пароходу, чтобы пройти 250 км вниз по реке, если скорость парохода в стоячей воде 15 км/час, а скорость течения реки 3 км/час?

## § 2. Понятие об уравнении. Составление уравнения, выражающего зависимость между данными величинами

**Задача.** На одной полке находится  $m$  книг, на другой полке  $n$  книг, на обеих полках вместе  $p$  книг.

- 1) Чему равно  $p$ , если  $m = 10$ ;  $n = 12$ ?
- 2) Заполнить таблицу:

| $m$ | $n$ | $p$ |
|-----|-----|-----|
|     | 7   | 18  |
| 5   |     | 20  |
| 8   | 11  |     |

**Ответ.** 1) Если  $m = 10$ ,  $n = 12$ , то  $p = 22$ .

2) В первую строку таблицы нужно вписать 11, во вторую 15, в третью 19.

**Задача.** Площадь класса  $Q$  м<sup>2</sup>. Длина класса  $a$  м, ширина  $b$  м.

- 1) Чему равно  $Q$ , если  $a = 8$ ;  $b = 6$ ?
- 2) Заполнить таблицу:

| $a$ | $b$ | $Q$ |
|-----|-----|-----|
|     | 7   | 70  |
| 7   |     | 42  |
| 10  | 8   |     |

**Ответ.** 1) Если  $a = 8$ ,  $b = 6$ , то  $Q = 48$ .

2) В первую строку таблицы надо вписать 10, во вторую 6, в третью 80.

**Задача.** На одной полке  $m$  книг. Площадь класса  $Q$  м<sup>2</sup>. Чему равно  $Q$ , если  $m = 10$ ?

**Ответ.** Эту задачу решить нельзя.

Почему же третью задачу решить нельзя, а первую и вторую задачи решить можно? Объясняется это тем, что величины  $m$  и  $Q$  в задаче 3 между собой *не связаны, они независимы*. Величины же  $m$ ,  $n$ ,  $p$  в первой задаче *связаны* самим условием задачи так, что, зная две из них, мы можем определить третью. Иными словами, между величинами  $m$ ,  $n$ ,  $p$  в первой задаче *существует зависимость*. То же самое мы имеем и во второй задаче. Здесь тоже величины  $Q$ ,  $a$ ,  $b$  так



связаны условием задачи, что, зная две из них, мы можем определить третью. Между величинами  $Q$ ,  $a$ ,  $b$  во второй задаче также имеется зависимость.

В чем же заключается зависимость между  $m$ ,  $n$ ,  $p$  в первой задаче? Зависимость между  $m$ ,  $n$ ,  $p$  заключается в том, что  $p$  равно сумме  $m$  и  $n$ , т. е.

$$p = m + n. \quad (1)$$

В чем заключается зависимость между  $Q$ ,  $a$ ,  $b$  во второй задаче? Зависимость между  $Q$ ,  $a$ ,  $b$  заключается в том, что  $Q$  равно произведению  $a$  и  $b$ , т. е.

$$Q = a \cdot b. \quad (2)$$

Если хотят высказать утверждение, что два алгебраических выражения равны, эти выражения соединяют знаком равенства:  $=$ .

**Определение.** Выражение, полученное посредством соединения знаком  $=$  двух алгебраических выражений, называется *равенством*.

В равенстве две части: левая и правая. Левая записана слева от знака равенства, а правая записана справа от этого знака. Выражение (1) — равенство. Посредством равенства (1) мы выразили зависимость между  $p$ ,  $m$  и  $n$ . Выражение (2) — тоже равенство. Оно выражает зависимость между  $Q$ ,  $a$  и  $b$ .

Равенства, выражающие зависимость между величинами, называются *уравнениями*. Так, равенства (1) и (2) являются *уравнениями*.

**З а м е ч а н и е.** Зависимость между  $m$ ,  $n$  и  $p$  мы выразили уравнением (1). Уравнения

$$m = p - n, \quad (3)$$

$$n = p - m \quad (4)$$

выражают ту же зависимость, что и уравнение (1), но в несколько ином виде.

Уравнения (1), (3) и (4) так тесно связаны друг с другом, что из любого из них легко получить остальные.

В самом деле, в уравнении (1)  $p$  — сумма,  $m$  и  $n$  — слагаемые. Из арифметики известно, что слагаемое равно сумме без другого слагаемого. Значит,  $m = p - n$ ;  $n = p - m$ . Так из уравнения (1) получаются уравнения (3) и (4).

Пусть теперь даю уравнение (3). В нем  $p$  — уменьшаемое,  $n$  — вычитаемое,  $m$  — разность. Из арифметики известно, что уменьшаемое равно сумме вычитаемого и разности. Значит,  $p = m + n$ . Из уравнения (3) получается уравнение (1).

Точно так же из уравнения (4) можно получить уравнение (1).

Зависимость между  $Q$ ,  $a$  и  $b$  мы выразили уравнением (2). Уравнения

$$a = \frac{Q}{b}, \quad (5)$$

$$b = \frac{Q}{a} \quad (6)$$

выражают ту же зависимость, что и уравнение (1). Можно показать, что уравнения (2), (5), (6) настолько тесно связаны друг с другом, что из любого из них вытекает любое другое. Мы этого делать не будем, так как это подробно излагается немного позже.

Мы будем часто решать задачи на составление уравнений, выражающих зависимость между величинами. Условимся считать задачу решенной, когда получено хоть одно такое уравнение.

Рассмотрим для примера две задачи.

**Задача.** Пароход за  $t$  часов прошел против течения реки  $S$  км. Скорость парохода в стоячей воде  $V$  км/час, скорость течения реки  $v$  км/час. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $S$ ,  $t$ ,  $V$  и  $v$ .

**Решение.** Мы знаем, что число часов, которое требуется пароходу, чтобы при данных условиях пройти  $S$  км против течения реки, определяется выражением  $\frac{S}{V-v}$  (см. § 1). Значит,  $t = \frac{S}{V-v}$ .

Уравнение составлено.

$$\text{Ответ. } t = \frac{S}{V-v}.$$

**Задача.** Через один кран ванна наполняется в  $a$  мин, через другой кран — в  $b$  мин. Если открыть оба крана, то ванна наполнится в  $t$  мин. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $a$ ,  $b$  и  $t$ .

**Решение.** Через первый кран в 1 минуту наполняется  $\frac{1}{a}$  часть ванны, через второй кран —  $\frac{1}{b}$  часть. Через оба крана в 1 минуту наполняется  $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$  часть ванны. Но, с другой стороны, при двух открытых кранах в 1 минуту наполняется  $\frac{1}{t}$  часть ванны. Значит,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t}.$$

$$\text{Ответ. } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t}.$$

### Упражнения

**Задача 1.** Два пионерских отряда посадили вместе  $a$  деревьев. Первый отряд посадил  $b$  деревьев, а второй  $c$  деревьев. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

**Задача 2.** За  $k$  одинаковых книг заплачено  $S$  руб. Каждая книга стоит  $n$  руб. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $S$ ,  $k$  и  $n$ .

**Задача 3.** Рабочий получил  $a$  руб. Когда он истратил  $b$  руб., то у него осталось  $c$  руб. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

**Задача 4.** Поезд, двигаясь равномерно, за  $t$  часов прошел  $S$  км при скорости  $v$  км/час. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $t$ ,  $S$ ,  $v$ .

**Задача 5.** В книге  $p$  страниц. Мальчик прочитал книгу за  $m$  дней, читая ежедневно по  $n$  страниц. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $p$ ,  $m$ ,  $n$ .

### § 3. Порядок действий

В алгебре припят тот же порядок действий, что и в арифметике. Именно:

*Правило 1. Если для вычисления алгебраического выражения требуется произвести два действия, то порядок действий указывается скобками. При этом сначала выполняется действие, указанное в скобках.*

Например, выражение

$$(a + b)c$$

означает, что сначала надо к числу  $a$  прибавить число  $b$ , а потом полученную сумму умножить на число  $c$ . Выражение

$$a:(bc)$$

означает, что сначала надо число  $b$  умножить на число  $c$ , а потом число  $a$  разделить на полученное произведение.

*Правило 2. Если для вычисления алгебраического выражения требуется произвести более двух действий, то порядок действий указывается несколькими различными скобками. При этом одни скобки заключают внутри других и сначала выполняют действие, указанное во внутренних скобках.*

Например, выражение

$$[(a + b)c] - d$$

означает, что сначала надо к числу  $a$  прибавить число  $b$ , затем полученную сумму умножить на число  $c$  и, наконец, из полученного произведения вычесть число  $d$ . Выражение

$$(a + b) \cdot (c - d)$$

означает, что сначала производятся сложение и вычитание и последним производится умножение суммы на разность.

Для того чтобы упростить запись алгебраических выражений и реже употреблять скобки, допускаются следующие исключения из правил 1 и 2:

1. Для того чтобы записать сумму нескольких слагаемых, достаточно написать их в том порядке, в котором надо производить сложение, и поставить между ними знак  $+$ , т. е. вместо выражения

$$(a + b) + c$$

можно писать

$$a + b + c;$$

вместо выражения

$$[(a + b) + c] + d$$

можно писать

$$a + b + c + d;$$

вместо выражения

$$\{[(a + b) + c] + d\} + e.$$

можно писать

$$a + b + c + d + e$$

и т. д.

2. Если требуется произвести последовательно несколько действий сложения и вычитания, то числа и знаки пишутся в том порядке, в котором должны выполняться действия. Например, вместо

$$\{[(a + b) - c] + d\} - e$$

пишут

$$a + b - c + d - e.$$

3. Для того чтобы записать произведение нескольких сомножителей, достаточно приписать их друг к другу в том порядке, в котором надо производить умножение, т. е. вместо выражения

$$[(ab) c] d$$

можно писать

$$abcd;$$

вместо выражения

$$\{[(ab) c] d\} e$$

можно писать

$$abcde$$

и т. д.

4. Сложение и вычитание называются *действиями первой ступени*, а умножение и деление — *действиями второй ступени*.

Если для вычисления алгебраического выражения требуется произвести сначала действие второй ступени, а потом действие первой ступени, скобки можно не писать. Например, выражение

$$a - (b : c)$$

означает то же, что и выражение

$$a - b : c,$$

т. е. что сначала надо  $b$  разделить на  $c$  и затем из  $a$  вычесть полученное частное. Выражение  $a + (bc)$  можно без скобок писать так:

$$a + bc.$$

5. Если деление указано чертой, то сначала вычисляются отдельно числитель и знаменатель и последним действием выполняется деление числителя на знаменатель. Например, выражение

$$\frac{a + b}{c - d}$$

означает, что сначала производится сложение и вычитание и последним — деление суммы на разность. Это же выражение можно записать и при помощи другого знака деления ( $:$ ), но тогда надо ставить скобки, т. е. писать так:

$$(a + b) : (c - d).$$

Пример. Вычислить выражение

$$\frac{(3a + 5b)c}{[a - (b + c)](a + b)}$$

при  $a = 4$ ;  $b = 2$ ;  $c = 1$ .

Решение.

$$1) 3a = 3 \cdot 4 = 12.$$

$$2) 5b = 5 \cdot 2 = 10.$$

$$3) 3a + 5b = 12 + 10 = 22.$$

$$4) (3a + 5b) \cdot c = 22 \cdot 1 = 22.$$

$$5) b + c = 3,$$

$$6) a - (b + c) = 4 - 3 = 1.$$

$$7) a + b = 6.$$

$$8) [a - (b + c)](a + b) = 1 \cdot 6 = 6.$$

$$9) \frac{(3a + 5b)c}{[a - (b + c)](a + b)} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}.$$

Ответ.  $\frac{11}{3}$ .

Задача. На заготовительный пункт в первый день поступило  $a$  т картофеля, во второй день на  $b$  т больше, чем в первый, а в третий на  $c$  т меньше, чем в первые два дня вместе. Сколько тонн картофеля поступило на заготовительный пункт за три дня?

Рассмотреть частный случай:  $a = 100$ ;  $b = 50$ ;  $c = 75$ .

Решение. Во второй день поступило  $(a + b)$  т. В первый и второй день вместе поступило  $[a + (a + b)]$  т. В третий день поступило  $\{[a + (a + b)] - c\}$  т. За три дня поступило

$$[a + (a + b)] + \{[a + (a + b)] - c\} \text{ т.}$$

Ответ.  $[a + (a + b)] + \{[a + (a + b)] - c\}$  т

Частный случай:

$$\begin{aligned} a + (a + b) + \{[a + (a + b)] - c\} &= \\ &= 100 + (100 + 50) + \{[100 + (100 + 50)] - 75\} = \\ &= 100 + 150 + 175 = 425. \end{aligned}$$

Задача. Из двух пунктов, расстояние между которыми  $S$  км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда со скоростями, соответственно равными  $v_1$  км/час и  $v_2$  км/час. Через сколько часов после выхода поездов расстояние между ними будет равно  $s$  км?

Рассмотреть частный случай:  $S = 520$ ;  $v_1 = 39$ ;  $v_2 = 41$ ;  $s = 100$ .

Решение. Расстояние между поездами каждый час сокращается на  $(v_1 + v_2)$  км. Для того чтобы расстояние между поездами стало

равным  $s$  км, необходимо, чтобы оно уменьшилось на  $S - s$  км. Это произойдет через  $\frac{S-s}{v_1 + v_2}$  часов после выхода поездов.

$$\text{Ответ. } \frac{S-s}{v_1 + v_2} \text{ час.}$$

*Частный случай:*

$$\frac{S-s}{v_1 + v_2} = \frac{520-100}{39+41} = \frac{420}{80} = 5 \frac{1}{4} \text{ час.}$$

**Задача.** Пионеры одной школы собрали  $A$  кг семян дуба, клена, белой акации и желтой акации. Семян желтой акации собрали  $a$  кг, семян белой акации собрали на  $b$  кг меньше, чем семян желтой акации. Семян клена собрали на  $c$  кг больше, чем семян белой и желтой акации вместе. Семян дуба собрали в  $d$  раз больше, чем семян клена.

Составить уравнение, выражающее зависимость между  $A, a, b, c, d$ .

**Решение.** Семян белой акации собрано  $(a - b)$  кг. Семян белой и желтой акации вместе собрано  $[a + (a - b)]$  кг. Семян клена собрано  $\{[a + (a - b)] + c\}$  кг. Семян дуба собрано  $\{[a + (a - b)] + c\}d$  кг. Всего семян собрано

$$[a + (a - b)] + \{[a + (a - b)] + c\} + \{[a + (a - b)] + c\}d \text{ кг.}$$

Но, по условиям задачи, всего собрано  $A$  кг семян. Значит,

$$A = a + (a - b) + \{[a + (a - b)] + c\} + \{[a + (a - b)] + c\}d.$$

$$\text{Ответ. } A = a + (a - b) + \{[a + (a - b)] + c\} + \{[a + (a - b)] + c\}d.$$

**Задача.** Основание прямоугольника  $a$  м, высота  $b$  м. Если основание этого прямоугольника увеличить в  $c$  раз, а высоту уменьшить в  $d$  раз, то получится новый прямоугольник, площадь которого на  $k$  м<sup>2</sup> меньше площади данного прямоугольника.

Составить уравнение, выражающее зависимость между  $a, b, c, d, k$ .

**Решение.** Основание нового прямоугольника  $ac$  м. Высота нового прямоугольника  $\frac{b}{d}$  м. Площадь нового прямоугольника  $ac \frac{b}{d}$  м<sup>2</sup>. Площадь данного прямоугольника  $(ac \frac{b}{d} + k)$  м<sup>2</sup>. Но при другом способе подсчета площадь данного прямоугольника равна  $ab$  м<sup>2</sup>. Значит  $ab = ac \frac{b}{d} + k$ .

$$\text{Ответ. } ab = ac \frac{b}{d} + k.$$

**Задача.** Числитель дроби  $a$ , знаменатель на  $b$  больше числителя. Если от числителя и знаменателя дроби отнять по  $x$ , то новая дробь будет составлять  $\frac{3}{4}$  исходной. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $a, b$  и  $x$ .

Решение. Знаменатель дроби  $a + b$ . Исходная дробь  $\frac{a}{a+b}$ .  
 Новая дробь  $\frac{a-x}{(a+b)-x}$  или, в силу последнего условия,  $\frac{3}{4} \cdot \frac{a}{a+b}$ .  
 Значит,  $\frac{a-x}{(a+b)-x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a}{a+b}$ .  
 Ответ.  $\frac{a-x}{(a+b)-x} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a}{a+b}$ .

### Упражнения

**Задача 1.** Длина прямоугольника  $a$  см. Ширина его на  $b$  см короче длины. Площадь его  $S$  см<sup>2</sup>. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $a$ ,  $b$ ,  $S$ .

**Задача 2.** Первый сорт материи стоит  $a$  руб. за метр. Второй сорт материи стоит на  $b$  руб. за метр дешевле, чем первый. За  $m$  м первого сорта и  $n$  м второго сорта уплатили  $A$  руб. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $A$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $m$ ,  $n$ .

**Задача 3.** Брат и сестра имели по  $m$  руб. После того, как брат истратил  $a$  руб., а сестра  $b$  руб., у них вместе осталось  $n$  руб. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $a$ ,  $b$ ,  $m$ ,  $n$ .

## § 4. Коэффициент

**Определение.** Числовой множитель буквенного выражения называется *числовым коэффициентом*, а чаще просто *коэффициентом*.

Например, в выражении  $3ab$  коэффициент равен 3; в выражении  $2,5abc$  коэффициент равен 2,5; в выражении  $a+b+c$  у каждой из букв коэффициент равен 1, так как  $a=1 \cdot a$ ,  $b=1b$ . Коэффициент 1 писать не нужно.

Из арифметики известно, что для вычисления суммы нескольких одинаковых слагаемых достаточно одно из слагаемых умножить на их число. Например,

$$\begin{aligned} 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 &= 5 \cdot 6 = 30; \\ 15 + 15 + 15 + \dots + 15 &= 15 \cdot 100 = 1500. \end{aligned}$$

100 слагаемых

Пользуясь буквами для обозначения чисел, это свойство суммы можно формулировать так: *каково бы ни было число  $a$ ,*

$$a + a = a \cdot 2; \quad a + a + a = a \cdot 3 \quad \text{и т. д.};$$

вообще

$$\underbrace{a + a + a + \dots + a}_{n \text{ слагаемых}} = an.$$

Известно, что сомножители можно писать в любом порядке, а потому  $a \cdot 2 = 2a$ ;  $a \cdot 3 = 3a$ ;  $an = na$ . Коэффициент обычно пишут впереди.

Таким образом, целые коэффициенты 2, 3, 4 и т. д. возникают при сложении двух, трех, четырех и т. д. одинаковых слагаемых. Пользуясь целым коэффициентом, мы сумму нескольких одинаковых слагаемых заменяем произведением двух чисел. Один из сомножителей этого произведения — коэффициент. Он равен числу слагаемых в рассматриваемой сумме. Другой из сомножителей представляет собой одно из слагаемых этой суммы.

Сказанное относится только к целым коэффициентам. Например, выражение  $2,7a$  нельзя толковать как сумму 2,7 слагаемых, каждое из которых есть  $a$ , так как число слагаемых в сумме всегда целое.

При решении некоторых задач коэффициентами считают буквенные выражения. Так, например, иногда считают, что в выражении  $ax$  буква  $x$  имеет коэффициент  $a$ ; в выражении

$$2ax + (b + c)y + (d - a)z$$

буквы  $x, y, z$  имеют коэффициенты  $2a, b + c, d - a$ .

**Задача.** За 3 м материи стоимостью  $a$  руб. каждый и  $m$  м сукна стоимостью  $b$  руб. каждый заплачено  $S$  руб. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $a, b, m$  и  $S$ .

**Решение.** 3 м материи стоят  $3a$  руб.,  $m$  м сукна стоят  $mb$  руб. Сукно и материя вместе стоят  $(3a + mb)$  руб. или  $S$  руб. Значит,  $3a + mb = S$ .

$$\text{Ответ. } S = 3a + mb.$$

**Задача.** 25% числа  $a$  на  $b$  больше, чем 10% числа  $c$ . Составить уравнение, выражающее зависимость между  $a, b, c$ .

**Решение.** 25% числа  $a$  составляют  $\frac{1}{4}a$ ; 10% числа  $c$ , т. е.  $\frac{1}{10}c$ , равно по условию задачи  $\frac{1}{4}a - b$ .

$$\text{Ответ. } \frac{1}{10}c = \frac{1}{4}a - b.$$

### Упражнения

**Задача 1.** В магазин привезли  $a$  мешков муки по 50 кг в каждом, всего  $b$  кг. Составить уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи.

**Задача 2.** Сторона квадрата  $a$  см. Периметр его  $p$  см. Составить уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи.

**Задача 3.** Длина прямоугольника  $a$  см, ширина его  $b$  см, периметр  $p$  см. Составить уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи.

**Задача 4.** Рабочий зарабатывал в день  $a$  руб. Из пятидневного заработка он истратил  $b$  руб., после чего у него осталось  $c$  руб. Составить уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи.

**Задача 5.** Два лица имели  $a$  руб., причем у одного было  $b$  руб., а у другого вдвое больше, чем у первого. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $a$  и  $b$ .

**Задача 6.** На трех складах было  $A$  м<sup>3</sup> дров. На первом складе было  $a$  м<sup>3</sup>, на втором вдвое больше, чем на первом, а на третьем в 4 раза больше, чем



на первом. Составить уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи.

**Задача 7.** У брата было  $t$  руб., а у сестры в два раза больше. После того, как сестра истратила  $n$  руб., у брата стало на  $p$  руб. больше, чем у сестры. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $t$ ,  $n$ ,  $p$ .

**Задача 8.** Периметр равнобедренного треугольника  $p$  см, боковая сторона равна  $a$  см и на  $b$  см длиннее основания. Составить уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи.

**Задача 9.** В трех классах  $A$  учащихся. В первом в два раза меньше, чем во втором и в третьем вместе. Во втором классе  $a$  учащихся, а в третьем на  $b$  учащихся больше, чем во втором. Составить уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи.

**Задача 10.** Число  $N$  состоит из  $a$  десятков и  $b$  единиц. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $N$ ,  $a$ ,  $b$ .

**Задача 11.** Число  $n$  состоит из  $a$  сотен,  $b$  десятков и  $c$  единиц. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $n$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

**Задача 12.** В одном резервуаре  $a$  л воды, в другом вдвое больше, чем в первом. Если из второго резервуара перелить в первый  $b$  л воды, то в обоих вода окажется поровну. Составить уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи.

**Задача 13.** В одном мешке было  $a$  кг сахара, а в другом  $b$  кг. Из первого мешка взяли  $c$  кг, а из второго в 3 раза больше, чем из первого. Тогда в первом мешке осталось вдвое больше сахара, чем во втором. Составить уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи.

## § 5. Степень. Возведение в степень

Часто приходится рассматривать произведения нескольких одинаковых сомножителей. Например, число 1024 разлагается на простые сомножители так:

$$1024 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2;$$

нам пришлось написать десять раз множитель 2.

Чтобы упростить запись произведения нескольких одинаковых сомножителей, условились писать сомножитель только один раз, а сверху справа писать число, показывающее, сколько раз этот сомножитель должен быть написан. Например,

$$1024 = 2^{10}; 1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5^3; 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5.$$

Произведение  $n$  сомножителей, каждый из которых есть  $a$ , записывается так:  $a^n$  (читается: « $a$  в степени  $n$ »). Выражение  $a^n$  называется  $n$ -й степенью числа  $a$ ,  $a$  называется *основанием степени*,  $n$  — *показателем степени*.

Выражение  $a^2$  читается так: « $a$  во второй степени», или « $a$  в квадрате», или « $a$  квадрат». Выражение  $a^3$  читается так: « $a$  в третьей степени», или « $a$  в кубе», или « $a$  куб».

Выражения « $a$  квадрат» и « $a$  куб» объясняются тем, что площадь квадрата со стороной  $a$  см равна  $a^2$  см<sup>2</sup>, а объем куба с ребром  $a$  см равен  $a^3$  см<sup>3</sup>.

Выражение  $a^1$  ( $a$  в первой степени) означает само число  $a$ , т. е.  $a^1 = a$ . Показатель степени 1 обычно не пишется.

В выражении  $a^n$   $a$  может быть любым числом,  $n$  — только натуральным (*натуральными числами* называются числа, которые получаются при счете предметов, т. е. 1, 2, 3, 4 и т. д.).

Действие нахождения степени данного числа называется *возведением в степень*.

Таким образом, *возвести какое-либо число в степень* значит составить произведение, в котором это число взято сомножителем столько раз, сколько единиц в показателе степени.

Или, используя буквенные обозначения, *возвести число  $a$  в степень  $n$*  — это значит составить произведение  $n$  сомножителей, каждый из которых есть  $a$ . Например, возведем 2 в десятую степень:

$$2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 1024.$$

Возведение в степень — пятое действие алгебры и считается действием *третьей ступени*.

Если в алгебраическом выражении требуется произвести сначала возведение в степень, а потом действие первой или второй ступени, то скобки можно не писать. Например,  $(a^3):(b^3)$  и  $a^3:b^3$  одинаково означают, что сначала  $a$  возводится в третью степень,  $b$  — во вторую и последним действием выполняется деление. Это же выражение можно записать и так:  $(a \cdot a \cdot a):(b \cdot b)$  или  $\frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b}$ .

**Пример.** Вычислить  $\frac{(a+2b)^3}{a^3(b+c^4)}$  при  $a=2$ ;  $b=3$ ;  $c=1$ .

**Решение.**

$$1) 2b = 6.$$

$$5) c^4 = 1.$$

$$2) a + 2b = 8.$$

$$6) b + c^4 = 4.$$

$$3) (a + 2b)^3 = 64.$$

$$7) a^3(b + c^4) = 32.$$

$$4) a^3 = 8.$$

$$8) \frac{(a + 2b)^3}{a^3(b + c^4)} = 2.$$

**Ответ.** 2.

**Задача.** Полная поверхность куба, ребро которого  $a$  м, на 25 м<sup>2</sup> больше, чем полная поверхность прямоугольного параллелепипеда, длина которого  $a$  м, ширина  $b$  м, высота  $h$  м. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $a$ ,  $b$ ,  $h$ .

**Решение.** Полная поверхность куба  $6a^2$  м<sup>2</sup>. Полная поверхность параллелепипеда  $(2ab + 2ah + 2bh)$  м<sup>2</sup> или, при другом способе подсчета,  $(6a^2 - 25)$  м<sup>2</sup>.

Значит,  $6a^2 - 25 = 2ab + 2ah + 2bh$ .

**Ответ.**  $6a^2 - 25 = 2ab + 2ah + 2bh$ .

### Упражнения

**Задача 1.** Показать, что  $4^2 = 2^4$ .

**Задача 2.** Что больше  $2^5$  или  $5^2$ ?

**Задача 3.** В какой степени входит число 3 в разложение на простые множители чисел 81, 54, 45, 6?

**Задача 4.** Доказать, что если  $a = 0$ , то  $a^3 = a^2$ .

**Задача 5.** Справедливо ли утверждение: каково бы ни было число  $a$ ,  $a^3 = 2a$ ?

**Задача 6.** Вычислить  $\frac{a^2 - 3ab^3}{a(a+b)(a-b)^2}$  при  $a = 4$ ;  $b = 1$ .

**Задача 7.** Подобрать такое значение  $a$ , чтобы  $a^3$  имело значение 625.

**Задача 8.** Заполнить таблицы:

| $a$ | $a^2 + 13 - 6a^*$ | $a$ | $a^2$ | $a^3$ |
|-----|-------------------|-----|-------|-------|
| 1   |                   | 1   |       |       |
| 2   |                   | 2   |       |       |
| 3   |                   | 3   |       |       |
| 4   |                   | 4   |       |       |
| 5   |                   | 5   |       |       |
|     |                   | 6   |       |       |
|     |                   | 7   |       |       |
|     |                   | 8   |       |       |
|     |                   | 9   |       |       |
|     |                   | 10  |       |       |

**Задача 9.** Объем куба, ребро которого  $a$  м, в 3 раза больше объема прямоугольного параллелепипеда, основанием которого служит квадрат со стороной  $a$ , а высота равна  $h$  м. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $a$  и  $h$ .

**Задача 10.** Площадь квадрата, сторона которого  $a$  см, составляет  $A$  см<sup>2</sup>. Составить уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи.

**Задача 11.** Объем куба, ребро которого  $a$  см, составляет  $v$  см<sup>3</sup>. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $a$  и  $v$ .

**Задача 12.** Длина стороны квадрата  $a$  см, а длина стороны другого квадрата  $(a+b)$  см. Площадь второго квадрата на 40 см<sup>2</sup> больше площади первого квадрата. Составить уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи.

## § 6. Законы арифметических действий

Из арифметики известно, что сложение подчиняется двум законам. переместительному и сочетательному.

**Переместительный закон сложения.** Сумма двух слагаемых не зависит от порядка расположения слагаемых.

Например,  $5 + 7 = 12$  и  $7 + 5 = 12$ . Пользуясь буквами для обозначения чисел, этот закон можно формулировать еще так:

Каковы бы ни были числа  $a$  и  $b$ ,

$$a + b = b + a.$$

**Сочетательный закон сложения.** Сумма трех слагаемых не зависит от того, какие два из них сложены вначале — первые или последние.

Например,  $(3 + 5) + 7 = 3 + (5 + 7)$ . Пользуясь буквами для обозначения чисел, этот закон можно формулировать так:

*Каковы бы ни были числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,*

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Из этих двух законов сложения вытекает, что при сложении нескольких чисел можно слагаемые располагать в любом порядке и соединять их в любые группы. Например,

$$\begin{aligned} 2 + 3 + 2,5 + 3,3 + 4,5 + 6,7 + 4\frac{1}{3} &= (2 + 3) + (2,5 + 4,5) + \\ &+ (3,3 + 6,7) + 4\frac{1}{3} = 5 + 7 + 10 + 4\frac{1}{3} = 26\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Если для вычисления алгебраического выражения требуется произвести несколько раз сложение и других действий производить не нужно, то

- 1) все скобки можно опустить,
- 2) слагаемые можно переписать в любом порядке,
- 3) можно скобки вновь расставить любым образом.

Например,

$$\begin{aligned} (a + m) + (c + n) + (b + p) &= a + m + c + n + b + p = \\ &= a + b + c + m + n + p = (a + b + c) + (m + n + p) \end{aligned}$$

и т. п.

Из арифметики известно, что умножение также подчиняется двум законам: переместительному и сочетательному.

*Переместительный закон умножения. Произведение двух сомножителей не зависит от порядка расположения сомножителей, т. е. каковы бы ни были числа  $a$  и  $b$ ,*

$$ab = ba.$$

Например,  $5 \cdot 7 = 35$  и  $7 \cdot 5 = 35$ .

*Сочетательный закон умножения. Произведение трех сомножителей не зависит от того, какие два из них перемножены вначале — первые или последние, т. е. каковы бы ни были числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,*

$$(ab)c = a(bc).$$

Из переместительного и сочетательного законов умножения вытекает, что при умножении нескольких чисел можно сомножители располагать в любом порядке и соединять их в любые группы. Например,

$$3,5 \cdot 2\frac{1}{7} \cdot 10 \cdot 7 = (3,5 \cdot 10) \cdot (2\frac{1}{7} \cdot 7) = 35 \cdot 15 = 525.$$

Если для вычисления алгебраического выражения требуется произвести несколько раз умножение и других действий производить не нужно, то

- 1) все скобки можно опустить,
- 2) сомножители можно переписать в любом порядке,
- 3) можно скобки вновь расставить любым образом. Например,  $(am) \cdot (cn) \cdot (bp) = amcn \cdot bp = abcmnp = (abc)(mnp)$ .

Часто приходится умножать однозначное число на двузначное. Например,  $3 \cdot 17$ . Мы можем считать так:  $3 \cdot 10 = 30$ ;  $3 \cdot 7 = 21$ ;  $30 + 21 = 51$ ; значит  $3 \cdot 17 = 51$ . Или то же самое в другой записи:

$$3 \cdot 17 = 3(10 + 7) = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 7 = 30 + 21 = 51.$$

Прием, которым мы пользовались, основан на распределительном законе умножения относительно сложения.

Распределительный закон умножения относительно сложения. *Для того чтобы какое-нибудь число умножить на сумму двух или нескольких чисел, достаточно это число умножить на каждое слагаемое в отдельности и полученные произведения сложить, т. е. каковы бы ни были числа  $a, b, c, d$  и  $t$ ,*

$$t(a + b) = ta + tb; \quad t(a + b + c) = ta + tb + tc;$$

$$t(a + b + c + d) = ta + tb + tc + td \text{ и т. д.}$$

Распределительный закон умножения относительно сложения можно очень наглядно объяснить геометрически. Пусть имеется три прямоугольника с одинаковым основанием  $a$  см и высотами  $h_1, h_2, h_3$  см (рис. 1) и требуется вычислить сумму  $S$  их площадей.

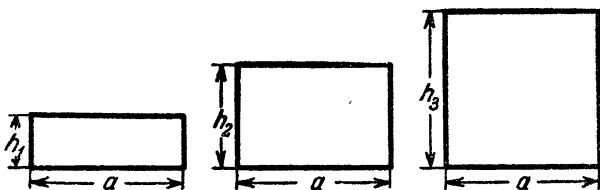


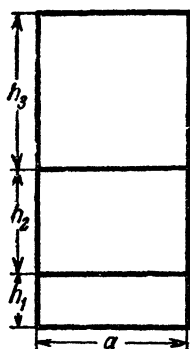
Рис. 1.

Мы можем решить эту задачу так: площадь первого прямоугольника  $ah_1$  см<sup>2</sup>; площадь второго прямоугольника  $ah_2$  см<sup>2</sup>; площадь третьего прямоугольника  $ah_3$  см<sup>2</sup>; сумма площадей трех прямоугольников

$$S = ah_1 + ah_2 + ah_3.$$

Мы можем, однако, поступить и следующим образом. Приложим прямоугольники друг к другу основаниями и составим из них один

прямоугольник (рис. 2). У этого прямоугольника основание  $a$ , а высота равна сумме высот данных прямоугольников, т. е. высота равна  $(h_1 + h_2 + h_3)$  см. Таким образом, площадь составленного прямоугольника равна



$$a(h_1 + h_2 + h_3) \text{ см}^2.$$

Очевидно, что площадь прямоугольника, составленного из трех данных прямоугольников, равна сумме площадей данных прямоугольников, т. е.

$$S = a(h_1 + h_2 + h_3).$$

Сравнивая оба выражения для  $S$ , имеем:

$$ah_1 + ah_2 + ah_3 = a(h_1 + h_2 + h_3).$$

Рис. 2.

Эта формула и выражает распределительный закон умножения относительно сложения.

Рассмотрим некоторые применения распределительного закона.

**Задача.** Умножить  $3\frac{1}{7}$  на  $7\frac{1}{3}$ , не превращая смешанных чисел в неправильные дроби.

**Решение.**

$$\begin{aligned} 3\frac{1}{7} \cdot 7\frac{1}{3} &= \left(3 + \frac{1}{7}\right) \cdot 7\frac{1}{3} = 3 \cdot 7\frac{1}{3} + \frac{1}{7} \cdot 7\frac{1}{3} = \\ &= 3 \cdot \left(7 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{7} \cdot \left(7 + \frac{1}{3}\right) = 3 \cdot 7 + 3 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \cdot 7 + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3} = \\ &= 21 + 1 + 1 + \frac{1}{21} = 23\frac{1}{21}. \end{aligned}$$

*Ответ.*  $23\frac{1}{21}$ .

**Задача.** Пользуясь распределительным законом умножения относительно сложения, показать, что  $20a + 17a = 37a$ , где  $a$  — любое число.

**Решение.**  $20a + 17a = (20 + 17) \cdot a = 37a.$

*Ответ.*  $37a.$

### Упражнения

**Задача 1.** Вычислить  $\left(7\frac{1}{7}\right)^2$ , не превращая  $7\frac{1}{7}$  в неправильную дробь.

**Задача 2.** Доказать, что сумма  $29 \cdot 13 + 29 \cdot 18$  делится на 31.

## § 7. Об обратных действиях

Мы рассмотрели свойства двух основных арифметических действий — сложения и умножения. Сейчас мы займемся обратными действиями — вычитанием и делением.

Вычитание — действие, обратное сложению. Деление — действие, обратное умножению. Внимательное изучение обратных действий показывает, что они обладают одной особенностью: они не всегда выполнимы, в то время как прямые действия (сложение и умножение) выполнимы всегда.

В самом деле, какие бы два числа нам ни задали, мы всегда можем их сложить или перемножить. Иначе обстоит дело с вычитанием и делением.

Вычитание можно производить во всех случаях, когда уменьшаемое не меньше вычитаемого (т. е. больше его или равно ему). Если же уменьшаемое меньше вычитаемого, вычитание производить нельзя. Другими словами: выражение  $a - b$  имеет смысл, если  $a$  не меньше  $b$ ; если же  $a$  меньше  $b$ , выражение  $a - b$  не имеет смысла.

Рассмотрим теперь деление. Если бы мы не знали дробей, мы во многих случаях не могли бы производить деление и должны были бы говорить, что выражение  $\frac{a}{b}$  не всегда имеет смысл. В самом деле, что может сказать о выражении  $7:15$  или  $\frac{7}{15}$  тот, кто не знает дробей (например, ученик младшего класса школы)? Он должен сказать: деление здесь выполнить нельзя, выражение это не имеет смысла. Мы же знаем дроби, и поэтому для нас выражение  $\frac{a}{b}$  имеет смысл при любом  $a$  как целом, так и дробном и при любом  $b$ , *кроме одного случая*. Именно, выражение  $\frac{a}{b}$  *не имеет смысла, если  $b=0$* . Другими словами: *деление всегда возможно, кроме деления на нуль*. На нуль делить нельзя!

Возникает вопрос: чем вызвано запрещение делить на нуль? Попробуем разделить какое-нибудь число на нуль, например 2. Чтобы выполнить деление, мы должны отыскать такое число, которое при умножении на нуль дало бы в произведении 2. Но такого числа нет, так как произведение любого числа на нуль равно нулю. По той же причине нельзя разделить на нуль и всякое другое число, отличное от нуля, например  $5, \frac{2}{7}$  и т. п.

Остается рассмотреть деление нуля на нуль. Чтобы выполнить деление в этом случае, мы должны найти такое число, которое при умножении на нуль даст в произведении нуль. Этим свойством обладает любое число, так как произведение любого числа и нуля равно нулю:

$$27 \cdot 0 = 0; \quad \frac{2}{7} \cdot 0 = 0; \quad 1275,3 \cdot 0 = 0 \text{ и т. п.}$$

Таким образом, в качестве частного от деления нуля на нуль с одинаковым правом можно было бы взять любое число. По этой причине действие деления нуля на нуль *не имеет смысла*, так как у нас

все равно нет никаких оснований для выбора определенного ответа. Более того, при неосторожном обращении с делением можно, выполнив незаметно для себя деление на нуль, получить *неверные результаты*. Вот почему в математике принято правило: *на нуль делить нельзя!*

Выражение  $\frac{a}{0}$  при любом  $a$  не имеет смысла. На нуль делить нельзя.

В гл. II будет показано, что вычитание из меньшего числа большего становится возможным, если к известным нам числам присоединить так называемые отрицательные числа. Таким образом, будет показано, что выражение  $a - b$  имеет смысл также и при  $a$  меньшем  $b$ . Иначе обстоит дело с делением на нуль. Деление на нуль остается невозможным и при дальнейших присоединениях к известным нам целым и дробным числам еще и других, пока не известных нам, чисел.

### Упражнения

**Задача 1.** Два числа, произведение которых равно 1, называются *обратными друг другу*. Так, например, 2 и  $\frac{1}{2}$  обратные друг другу числа,  $\frac{7}{3}$  и  $\frac{3}{7}$  обратные друг другу числа. Для всякого ли числа существует обратное?

## § 8. Свойства арифметических действий

Из курса арифметики известны следующие свойства арифметических действий.

**Свойство 1.** Если сумма составлена из двух слагаемых, то каждое слагаемое равно сумме без другого слагаемого, т. е. если  $a = b + c$ , то  $b = a - c$ ;  $c = a - b$ .

Этим свойством пользуются при проверке сложения вычитанием. Пользуясь этим свойством, легко решить следующую задачу.

**Задача.** При каком значении  $x$  справедливо  $15 + x = 35$ ?

**Решение.** Здесь  $x$  — слагаемое,  $15$  — другое слагаемое,  $35$  — сумма. Значит,  $x = 35 - 15$ ;  $x = 20$ .

**Ответ.** При  $x = 20$ .

**Свойство 2.** Уменьшаемое равно сумме вычитаемого и разности, т. е. если  $a - b = c$ , то  $a = b + c$ .

Этим свойством пользуются при проверке вычитания сложением.

**Задача.** При каком значении  $x$  справедливо  $x - 3 = 20$ ?

**Решение.** Здесь  $x$  — уменьшаемое,  $3$  — вычитаемое,  $20$  — разность. Значит,  $x = 3 + 20$ ;  $x = 23$ .

**Ответ.** При  $x = 23$ .

**Свойство 3.** Вычитаемое равно уменьшаемому минус разность, т. е. если  $a - b = c$ , то  $b = a - c$ .

**Задача.** При каком значении  $x$  справедливо  $25 - x = 17$ ?

**Решение.** Здесь  $x$  — вычитаемое,  $25$  — уменьшаемое,  $17$  — разность. Значит,  $x = 25 - 17$ ;  $x = 8$ .

**Ответ.** При  $x = 8$ .



**Свойство 4.** Если произведение составлено из двух сомножителей, то каждый сомножитель равен произведению, деленному на другой сомножитель, при условии, что этот другой сомножитель не равен нулю; т. е. если  $a = bc$  и  $c \neq 0$  (знак  $\neq$  читается: не равно), то  $b = \frac{a}{c}$ . Этим свойством пользуются при проверке умножения делением.

**Замечание.** Обратим внимание на оговорку: «при условии, что этот другой сомножитель не равен нулю». Эта оговорка вызвана тем, что *на нуль делить нельзя*. При использовании свойства 4 эту оговорку забывать нельзя, иначе можно прийти к ошибочным выводам.

**Задача.** При каком значении  $x$  справедливо  $27x = 135$ ?

**Решение.** Здесь  $x$  — сомножитель, 135 — произведение, 27 — другой сомножитель. Значит,  $x = \frac{135}{27}$ ;  $x = 5$ .

**Ответ.** При  $x = 5$ .

**Свойство 5.** Делимое равно произведению делителя на частное, т. е. если  $\frac{a}{b} = c$ , то  $a = bc$ .

Этим свойством пользуются при проверке деления умножением.

**Задача.** При каком значении  $x$  справедливо  $\frac{x}{3} = 7$ ?

**Решение.** Здесь  $x$  — делимое, 3 — делитель, 7 — частное. Значит,  $x = 3 \cdot 7$ ;  $x = 21$ .

**Ответ.** При  $x = 21$ .

**Свойство 6.** Делитель равен делимому, деленному на частное, если только это частное не равно нулю, т. е. если  $\frac{a}{b} = c$  и  $c \neq 0$ , то  $\frac{a}{c} = b$ .

**Задача.** При каком значении  $x$  справедливо  $\frac{42}{x} = 14$ ?

**Решение.** Здесь  $x$  — делитель, 42 — делимое, 14 — частное. Значит,  $x = \frac{42}{14}$ ;  $x = 3$ .

**Ответ.** При  $x = 3$ .

## § 9. Уравнения с одним неизвестным

Рассмотрим еще раз задачу, которую мы уже решили в § 2.

**Задача.** На одной полке  $m$  книг, на другой полке  $n$  книг, на обеих полках вместе  $p$  книг. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $m$ ,  $n$ ,  $p$ . Чему равно  $n$ , если  $m = 5$ ,  $p = 20$ ?

**Решение** состоит из двух частей. В первой части решения составляется требуемое уравнение

$$m + n = p. \quad (1)$$

Во второй части решения дадим ответ на вопрос, поставленный в задаче. Сделать это можно так. В уравнении (1) заменяем  $t$  числом 5,  $p$  — числом 20. Получаем уравнение

$$5 + n = 20. \quad (2)$$

В уравнении (2) содержится одна буква  $n$ , значение которой надо определить. Иными словами, уравнение (2) есть *уравнение с одним неизвестным*.

Теперь из уравнения (2) нужно узнать, чему равно  $n$ , или, как говорят, нужно *решить уравнение* (2). С такой задачей мы уже встречались в предыдущем параграфе.

При каком значении  $n$  справедливо  $5 + n = 20$ ? Здесь  $n$  — слагаемое, 20 — сумма, 5 — другое слагаемое. Значит,  $n = 20 - 5$ ;  $n = 15$ .

Мы узнали из уравнения (2), что  $n = 15$ . Тем самым мы *решили уравнение* (2); оказалось, что значение  $n = 15$  есть *решение уравнения* (2). Или, как говорят, значение  $n = 15$  *удовлетворяет уравнению* (2).

*Ответ.*  $n = 15$ .

**Определение.** Равенство, содержащее одну букву, значение которой надо найти, называется *уравнением с одним неизвестным*. *Решить уравнение* с одним неизвестным, это значит узнать, при каком значении неизвестного обе части уравнения имеют одинаковые числовые значения. Значение неизвестного, при котором обе части уравнения имеют одинаковые числовые значения, называется *решением уравнения* (или его *корнем*).

При решении задачи 1 можно было поступить и так. В уравнении (1)  $n$  — слагаемое,  $p$  — сумма,  $t$  — другое слагаемое. Значит,

$$n = p - t. \quad (3)$$

Посредством уравнения (3) мы выразили  $n$  через  $p$  и  $t$  или, как говорят, *решили уравнение* (1) относительно  $n$ . В уравнении (3) заменим  $p$  и  $t$  их значениями, получим  $n = 20 - 5$ ;  $n = 15$ .

*Решить уравнение относительно какой-нибудь буквы* — это значит узнать, как эта буква выражается через остальные величины, входящие в данное уравнение.

**Замечание.** Не всякое уравнение имеет решение. Так, например, уравнение  $1 + x = 10 + x$  не имеет решения. (При любом значении  $x$  правая часть на 9 больше левой.)

### Упражнения

**Задача 1.** За  $R$  руб. куплено  $A$  билетов в кино. При этом каждый из  $a$  билетов стоит  $t$  руб., каждый из остальных стоит  $n$  руб. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $R$ ,  $A$ ,  $a$ ,  $t$ ,  $n$ . Чему равно  $n$ , если  $R = 125$ ;  $A = 35$ ;  $a = 15$ ;  $t = 3$ ?

**Задача 2.** Пароход, скорость которого в стоячей воде  $V$  км в час, прошел за  $t$  часов вверх по реке  $S$  км. Скорость течения реки  $v$  км в час. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $S$ ,  $V$ ,  $v$ ,  $t$ , и заполнить таблицу:

| $S$ | $V$  | $v$ | $t$ |
|-----|------|-----|-----|
| 40  | 12   |     | 4   |
| 20  |      | 3   | 2   |
|     | 15   | 3   | 3   |
| 98  | 12,5 | 2,7 |     |

**Задача 3.** В классе  $a$  учеников. Если каждому из них дать по  $b$  тетрадей, то трем ученикам тетрадей не хватит. Если же каждому из учеников дать по  $c$  тетрадей, то  $d$  тетрадей останутся нерозданными. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ . Найти  $d$ , если  $a = 40$ ;  $b = 10$ ;  $c = 9$ .

**Задача 4.** Отцу  $a$  лет, сын моложе отца на  $d$  лет. Через  $b$  лет отец будет в 3 раза старше сына. Составить уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи. Найти  $d$ , если  $a = 40$ ;  $b = 5$ .

**Задача 5.** На одной книжной полке стояло  $a$  книг. На другой полке в два раза больше. Если на первую полку добавить  $c$  книг, а со второй полки снять  $d$  книг, то на обеих полках окажется по одинаковому числу книг. Составить уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи. Найти  $d$ , если  $a = 15$ ;  $c = 5$ .

## § 10. Понятие о тождестве

Существуют уравнения, которым удовлетворяет *любое число*. Так, например, уравнению  $1 + x = 1 + x$  удовлетворяет любое число. Такие уравнения называются *тождествами*. Вообще *тождествами* называются равенства, справедливые при любых (допустимых) значениях входящих в них букв. *Тождествами* называются также справедливые равенства, не содержащие букв (числовые тождества).

Например, все равенства, выражающие основные законы арифметических действий, — тождества:

$$a + b = b + a \text{ — тождество,}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ — тождество,}$$

$$ab = ba \text{ — тождество,}$$

$$(ab)c = a(bc) \text{ — тождество,}$$

$$m(a + b) = ma + mb \text{ — тождество.}$$

Эти равенства справедливы при любых значениях входящих в них букв. Равенство

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x-1}$$

также является тождеством, так как оно справедливо при всех значениях  $x$ , кроме  $x=1$ ; значение  $x=1$  здесь недопустимо. Равенство  $2^4=4^2$  — числовое тождество.

Для того чтобы доказать, что уравнение решено правильно (а проверка решения желательна всегда, так как в вычислениях могла быть сделана ошибка), достаточно подставить в уравнение вместо неизвестного найденное решение и убедиться, что в результате этого уравнение превращается в числовое тождество.

**Задача.** Является ли  $x=2$  решением уравнения

$$\frac{2x-1}{5} = \frac{3x+3}{15} ?$$

**Решение.** Подставим в уравнение вместо  $x$  число 2. В левой части получим  $\frac{2 \cdot 2 - 1}{5} = \frac{3}{5}$ . В правой части получим  $\frac{3 \cdot 2 + 3}{15} = \frac{3}{5}$ . Уравнение превратилось в тождество

$$\frac{3}{5} = \frac{3}{5}.$$

Значит,  $x=2$  есть решение данного уравнения.

*Ответ.* Да.

**Задача.** Является ли  $x=3$  решением уравнения

$$5x - 1 = 7x + 3?$$

**Решение.** Подставим вместо  $x$  число 3. В левой части получим 14, в правой 24. Уравнение не обратилось в тождество, следовательно,  $x=3$  не является его решением.

*Ответ.* Нет.

## § 11. Понятие о решении задач при помощи уравнений

Вернемся еще раз к задаче, которую мы рассмотрели в предыдущем параграфе, для того чтобы сделать весьма важный вывод.

«На одной полке  $m$  книг, на другой  $n$  книг, на обеих полках вместе  $p$  книг. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $m$ ,  $n$ ,  $p$ . Чему равно  $n$ , если  $m=5$ ;  $p=20$ ?»

Мы получили такой ответ:  $m+n=p$ ; если  $m=5$ ,  $p=20$ , то  $n=15$ .

Вторая часть ответа («если  $m=5$ ,  $p=20$ , то  $n=15$ ») означает, что мы решили такую задачу:

«На одной полке 5 книг. Сколько книг на другой полке, если на обеих полках вместе 20 книг?»

Каким же путем решена эта задача? Решение состояло из двух частей: в первой части решения было составлено уравнение, выражающее зависимость между числом книг на одной полке ( $m$ ), числом книг на другой полке ( $n$ ) и числом книг на обеих полках вместе ( $p$ );

во второй части решения полученное уравнение было решено относительно  $n$  при условии, что  $m=5$ ;  $p=20$ .

Обратим на это внимание и перейдем к рассмотрению другой задачи.

**Задача.** Какое расстояние проходит пароход вверх по реке за 10 часов, если скорость парохода в стоячей воде 14 км/час, а скорость течения реки 3 км/час.

**Решение.** Это довольно простая задача, и она легко решается арифметически. Действительно, за каждый час пароход продвигается на 11 км ( $14 - 3 = 11$ ). Значит, за 10 часов пароход проходит 110 км. Но нам сейчас интересно решить эту задачу не арифметическим путем, а алгебраическим, при помощи уравнений.

С этой целью используем уравнение, выражающее зависимость между величинами  $S$ ,  $V$ ,  $v$  и  $t$ , где  $S$  — путь (в км), пройденный пароходом против течения реки за  $t$  час., если скорость парохода в стоячей воде  $V$  км/час, а скорость течения реки  $v$  км/час. Вот это уравнение (см. § 2):

$$t = \frac{S}{V - v}. \quad (1)$$

**Способ 1.** По условию задачи  $t=10$ ;  $V=14$ ;  $v=3$ . Подставив эти данные в уравнение (1), получим уравнение

$$10 = \frac{S}{11}. \quad (2)$$

Решив уравнение (2), имеем  $S=110$ . Задача решена.

**Способ 2.** Решим уравнение (1) относительно  $S$ . Имеем  $S=t(V-v)$ . По условию,  $S=10 \cdot (14-3)$ , т. е.  $S=110$ .

**Ответ.** 110 км.

Заметим, что и здесь решение задачи состоит из двух частей. В первой части было составлено уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи. Во второй части решения это уравнение было решено относительно  $S$  при условии, что  $t=10$ ;  $V=14$ ;  $v=3$ . Обратим внимание на это и рассмотрим еще задачу.

**Задача.** Через один кран ванна наполняется за 10 мин. Если открыть оба крана, ванна наполнится за 4 мин. За сколько времени наполнится ванна, если открыть только второй кран?

**Решение.** Мы используем уравнение

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t}, \quad (3)$$

которое нами было составлено раньше (см. § 2, последняя задача).

**Способ 1.** По условию задачи здесь  $a=10$ ;  $t=4$ ;  $b$  неизвестно. Подставив эти данные в уравнение (3), получим

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{b} = \frac{1}{4}, \quad (4)$$

Так как слагаемое равно сумме без другого слагаемого, то

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{4} - \frac{1}{10}; \quad \frac{1}{b} = \frac{3}{20}.$$

Так как делитель равен делимому, деленному на частное, то

$$b = 1 : \frac{3}{20}, \quad \text{т. е.} \quad b = 6 \frac{2}{3}.$$

*Способ 2.* Решим уравнение (3) относительно  $b$ . Получим

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{t} - \frac{1}{a}; \quad b = \frac{1}{\frac{1}{t} - \frac{1}{a}}.$$

Теперь положим  $t = 4$ ;  $a = 10$ . Получим  $b = 6 \frac{2}{3}$ .

*Ответ.*  $6 \frac{2}{3}$  мин.

Рассмотренные задачи позволяют сделать вывод, что решение задачи при помощи уравнений состоит из двух частей:

1) сначала составляется уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи (как известными по условию, так и неизвестной);

2) затем составленное уравнение решается относительно неизвестной величины.

### Упражнения

**Задача 1.** Объем куба, ребро которого 10 см, в 3 раза больше объема прямоугольного параллелепипеда, основанием которого служит квадрат со стороной 10 см. Определить высоту параллелепипеда.

**Задача 2.** Полная поверхность куба, ребро которого 5 дм, на 25 дм<sup>2</sup> больше, чем полная поверхность прямоугольного параллелепипеда, длина которого 5 дм, ширина 6 дм. Определить высоту параллелепипеда.

**Задача 3.** Пешеходу надо было пройти  $s$  км за три дня. В первый день он прошел  $a$  км, во второй день на  $b$  км меньше, чем в первый, а в третий день он прошел остальные  $n$  км.

1) Составить уравнение, выражающее зависимость между  $s$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $n$ .

2) Найти  $b$ , если  $s = 50$ ;  $a = 20$ ;  $n = 15$ .

3) Составить условие задачи, которая при этом решается.

**Задача 4.** Рабочий зарабатывал в день  $a$  руб. Его товарищ зарабатывал в день на 8 руб. больше. Первый рабочий за  $b$  дней получил на  $c$  руб. меньше, чем его товарищ за  $d$  дней.

1) Составить уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи.

2) Найти  $c$ , если  $a = 20$ ;  $b = 25$ ;  $d = 37$ .

3) Составить условие задачи, которая при этом решается.

**Задача 5.** В одном киоске было  $a$  тетрадей, в другом  $b$ . Когда из первого киоска продали  $c$  тетрадей, а из второго  $d$  тетрадей, то во втором киоске стало в  $t$  раз меньше тетрадей, чем в первом.

- 1) Составить уравнение, выражающее зависимость между  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $m$ .
- 2) Заполнить таблицу:

|   | $c$ | $d$ | $a$  | $b$ | $m$ |
|---|-----|-----|------|-----|-----|
| 1 | 250 | 50  | 1000 | 300 |     |
| 2 | 100 | 600 | 900  |     | 4   |
| 3 | 200 | 300 |      | 800 | 2   |
| 4 | 500 |     | 2000 | 900 | 5   |
| 5 |     | 300 | 2500 | 800 | 3   |

3) Составить условия задач, которые решаются при заполнении 1, 2, 3, 4 и 5 строк таблицы.

**Задача 6.** В трех совхозах  $A$  тонн зерна. В первом  $a$  тонн, во втором на  $b$  тонн больше, чем в третьем. В первых двух совхозах вместе в  $d$  раз больше, чем в третьем.

- 1) Составить уравнение, выражающее зависимость между  $A$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $d$ .
- 2) Использовать составленное уравнение для решения следующих задач:
  - а) В одном совхозе 100 тонн зерна, в другом на 400 тонн больше, чем в первом, а в третьем в 4 раза меньше, чем в первых двух вместе. Сколько тонн зерна во всех трех совхозах?
  - б) В трех совхозах 7200 тонн зерна. В первом из них 2000 тонн зерна. Во втором на 800 тонн больше, чем в первом. Во сколько раз в третьем совхозе меньше зерна, чем в первых двух вместе?

## § 12. Решение задач при помощи уравнений

До сих пор мы решали такие задачи, которые позволяли использовать уравнения, составленные ранее. А как поступать в том случае, когда уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи, не было ранее составлено? Как составить это уравнение?

Рассмотрим еще раз задачу, которую мы решили в предыдущем параграфе.

**Задача.** Через один кран ванна наполняется за 10 мин. Если открыть оба крана, ванна наполнится за 4 мин. За сколько времени наполнится ванна, если открыть только второй кран?

**Решение.**

- 1) Ранее было составлено уравнение

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t}. \quad (1)$$

- 2) По условию задачи  $a = 10$ ;  $t = 4$ . Поэтому имеем

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{b} = \frac{1}{4}. \quad (2)$$

3) Решив уравнение (2), получаем

$$b = 6 \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ответ. } b = 6 \frac{2}{3}.$$

Главное здесь заключается в составлении уравнения (2). Это уравнение выражает зависимость между величинами, рассматриваемыми в задаче, как известными (10 и 4), так и неизвестной ( $b$ ).

Для того чтобы сразу из условия задачи получить уравнение (2), достаточно неизвестную величину (количество минут, в течение которых ванна наполняется через второй кран) обозначить какой-нибудь буквой и составить уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи. При этом мы рассуждаем точно так же, как мы рассуждали бы, решая такую задачу:

«Через один кран ванна наполняется за 10 мин., через другой кран за  $b$  мин. Если открыть оба крана, то ванна наполнится за 4 мин. Составить уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи».

Разберем подробно еще одну задачу.

**Задача.** Из двух городов, расстояние между которыми 500 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Один из них шел со скоростью 40 км/час. С какой скоростью шел второй поезд, если поезда встретились через 7 часов после их выхода?

**Решение.** В условие задачи входят четыре величины:

- 1) расстояние между городами (500 км),
- 2) скорость одного поезда (40 км/час),
- 3) время пребывания поездов в пути до их встречи (7 час.),
- 4) скорость второго поезда.

Три из этих величин известны, а четвертая (скорость второго поезда) неизвестна и ее нужно найти. Обозначим эту величину буквой  $v$ , т. е. будем считать, что скорость второго поезда  $v$  км/час.

Составим уравнение, выражающее зависимость между всеми четырьмя величинами, входящими в условие задачи. При этом мы будем рассуждать так, как мы рассуждали бы, решая такую задачу:

«Из двух городов, расстояние между которыми 500 км, вышли одновременно навстречу друг другу два поезда. Один из них шел со скоростью 40 км/час, другой со скоростью  $v$  км/час. Поезда встретились через 7 часов после их выхода. Составить уравнение, выражающее зависимость между величинами, входящими в условие задачи».

Составим уравнение.

Первый поезд до встречи прошел 280 км ( $40 \cdot 7 = 280$ ), второй поезд до встречи прошел  $7v$  км. Вместе оба поезда прошли все расстояние между городами 500 км. Значит,

$$280 + 7v = 500.$$



Уравнение составлено. Решаем его:

$$7v = 500 - 280; \quad 7v = 220; \quad v = 81 \frac{3}{7}.$$

Проверка. Первый поезд до встречи прошел 280 км, второй поезд прошел 220 км  $\left(81 \frac{3}{7} \cdot 7 = 220\right)$ . Оба поезда прошли 500 км  $(280 + 220 = 500)$ . Задача решена правильно.

Ответ. Второй поезд шел со скоростью  $81 \frac{3}{7}$  км/час.

Рассмотрим еще несколько задач.

Задача. Два пионерских отряда посадили вместе 50 деревьев. Первый отряд посадил 26 деревьев. Сколько деревьев посадил второй отряд?

Решение. Обозначим число деревьев, посаженных вторым отрядом, буквой  $x$ . Тогда оба отряда посадили вместе  $(26 + x)$  деревьев. Но, по условию, оба отряда посадили вместе 50 деревьев. Значит,

$$26 + x = 50.$$

Решив это уравнение, получим  $x = 24$ .

Проверка.  $26 + 24 = 50$ . Задача решена верно.

Ответ. 24 дерева.

Задача. За несколько одинаковых книг, каждая из которых стоит 2 руб. 65 коп., уплачено 39 руб. 75 коп. Сколько куплено книг?

Решение. Обозначим число купленных книг буквой  $x$ . Тогда все купленные книги стоят  $2,65x$  руб.

По условию задачи, за книги уплатили 39 руб. 75 коп. Значит,

$$2,65x = 39,75.$$

Уравнение составлено. Решив его, получаем  $x = 15$ .

Проверка. 15 книг по 2 руб. 65 коп. каждая стоят 39 руб. 75 коп. Задача решена верно.

Ответ. 15 книг.

Задача. За 5 одинаковых тетрадей и блокнот заплачено 2 руб. Сколько стоит одна тетрадь, если блокнот стоит 1 руб.?

Решение. Обозначим буквой  $x$  стоимость тетради (в рублях). Тогда 5 тетрадей стоят  $5x$  руб., 5 тетрадей и блокнот стоят  $(5x + 1)$  руб. Значит,

$$5x + 1 = 2; \quad 5x = 1; \quad x = 0,2 \text{ руб.}$$

Проверка. 5 тетрадей стоят 1 руб., 5 тетрадей и блокнот стоят 2 руб. Задача решена правильно.

Ответ. Тетрадь стоит 20 коп.

Задача. Токарь должен был выполнить заказ, рассчитанный по норме на 29 рабочих дней. Проработав 5 дней и выполняя каждый день установленную норму, он начал работать новым способом и

досрочно закончил выполнение заказа. Во сколько дней токарь выполнил весь заказ, если новый способ повысил производительность его труда в 4 раза.

Решение. Предположим, что новым способом токарь работал  $x$  дней. Тогда за эти  $x$  дней он выполнил  $4x$  дневных нормы. Кроме того, он старым способом выполнил 5 дневных норм. По условию задачи весь заказ был рассчитан на 29 дневных норм. Значит,

$$4x + 5 = 29.$$

Уравнение составлено. Решая его, имеем

$$4x = 24; \quad x = 6.$$

Выходит, что новым способом токарь работал 6 дней, а весь заказ он выполнил за 11 дней.

Проверка. За 5 дней работы старым способом выполнено 5 дневных норм, за 6 дней работы новым способом выполнено 24 нормы. Всего за 11 дней выполнено 29 норм. Задача решена верно.

*Ответ.* Весь заказ выполнен за 11 дней.

Сравнивая решение последней задачи с решениями трех предыдущих задач, можно обнаружить следующее различие. В каждой из трех предыдущих задач мы буквой  $x$  обозначали искомое число. Так, в первой из них спрашивалось, сколько деревьев посадил второй отряд, и мы буквой  $x$  и обозначили число деревьев, посаженных вторым отрядом. Во второй из них спрашивалось, сколько куплено книг, и мы буквой  $x$  как раз и обозначили число купленных книг. В третьей задаче спрашивалось, сколько стбит одна тетрадь, и мы и здесь буквой  $x$  обозначили искомое число.

Совсем иначе поступили мы при решении последней задачи. В условии задачи спрашивалось: «Во сколько дней токарь выполнил весь заказ?» Мы же буквой  $x$  обозначили число только тех дней, в течение которых токарь *заканчивал* работу новым способом. Почему же мы так поступили? Мы заметили, что так проще составляется уравнение и что, зная число дней, в течение которых токарь заканчивал выполнение заказа, нетрудно будет прибавить 5 дней, использованных на выполнение первой части заказа.

Впрочем, вот и другое решение, где буквой  $x$  обозначено искомое число.

Второе решение последней задачи. Предположим, что весь заказ токарь выполнил в  $x$  дней. Тогда он новым способом работал  $(x - 5)$  дней. За  $(x - 5)$  дней он выполнил  $4(x - 5)$  норм. За  $x$  дней он выполнил  $[5 + 4(x - 5)]$  норм. Значит,

$$5 + 4(x - 5) = 29.$$

Уравнение составлено. Решая его, имеем

$$4(x - 5) = 24; \quad x - 5 = 6; \quad x = 11.$$

*Ответ.* Весь заказ выполнен в 11 дней.

Теперь мы можем сделать следующий вывод:

**Вывод.** *Решение задачи при помощи уравнений состоит из следующих частей: а) составления уравнения, б) решения уравнения, в) проверки решения.*

### Упражнения

Составить уравнения по условиям задач и решить их.

**Задача 1.** Если к удвоенному неизвестному числу прибавить 1,75, то получится 2,3. Найти неизвестное число.

**Задача 2.** Разность между утроенным неизвестным числом и 3,7 равна 0,8. Найти неизвестное число.

**Задача 3.** Частное от деления неизвестного числа на 2,5 равно 1,3. Найти неизвестное число.

**Задача 4.** Найти делитель, если делимое равно 12,5, а частное 0,5.

**Задача 5.** За 12 открытых писем по 25 коп. и несколько марок по 40 коп. заплачено 5 руб. 80 коп. Сколько куплено марок?

### § 13. Уравнения с буквенными коэффициентами

Мы знаем, что задачи могут быть предложены как в частном, так и в общем виде. Если все данные в условии задачи величины выражены числами, то задача дана *в частном виде*. Если же хоть одна из величин, данных в условии задачи, выражена буквой, задача дана *в общем виде*.

Когда задача дана в частном виде, решение ее приводит к уравнению с числовыми коэффициентами. Когда же задача дана в общем виде, решение ее приводит к уравнению с буквенными коэффициентами.

Так как буквы обозначают у нас числа, решение уравнений с буквенными коэффициентами производится по тем же правилам, что и решение уравнений с числовыми коэффициентами. Здесь только нужно следить, чтобы при решении не вкралось деления на нуль.

Для примера рассмотрим опять известную уже нам задачу.

**Задача.** Сколько времени потребуется пловцу, чтобы пройти вверх по реке 0,2 км, если пловец в стоячей воде проходит 3 км/час, а скорость течения реки 2 км/час?

**Решение.** Предположим, что пловец пройдет указанное расстояние в  $x$  час. Тогда

$$0,2 = (3 - 2)x; \quad x = 0,2.$$

*Ответ.* 12 мин.

Теперь рассмотрим ту же задачу в несколько более общем виде.

**Задача.** Сколько времени потребуется пловцу, чтобы пройти вверх по реке 0,2 км, если пловец в стоячей воде проходит  $V$  км/час, а скорость течения реки  $v$  км/час, причем  $V$  не меньше  $v$ ?

**Решение.** Предположим, что пловец пройдет указанное расстояние в  $x$  часов. Тогда

$$0,2 = (V - v)x, \tag{1}$$

откуда

$$x = \frac{0,2}{V - v}. \tag{2}$$

Но здесь нужно быть осторожным. Равенство (2) можно писать только тогда, когда мы уверены, что  $V - v \neq 0$ , т. е.  $V$  больше  $v$ . Между тем из условия задачи этого не видно. Разве не может  $V - v = 0$ ? Иными словами, разве не может скорость пловца в стоячей воде численно равняться скорости течения реки? Конечно, может. Но в этом случае пловец будет находиться на одном месте и никогда не пройдет указанного расстояния. Значит, задача в этом случае решения не имеет. Таким образом, не случайно равенство (2) при  $V = v$  теряет смысл.

Теперь ясно, что при решении нашей задачи необходимо рассмотреть два случая:

1)  $V - v \neq 0$ , т. е.  $V$  больше  $v$ , 2)  $V - v = 0$ .

Итак, имеем уравнение

$$0,2 = (V - v) x.$$

*Случай 1.* 1.  $V - v \neq 0$ . Тогда

$$x = \frac{0,2}{V - v}.$$

Это равенство дает общее решение задачи.

*Случай 2.*  $V - v = 0$ . В этом случае равенством (2) пользоваться нельзя.

Как же поступать в таких случаях, когда равенством, дающим общее решение задачи, пользоваться нельзя?

В случае, когда равенством, дающим общее решение задачи, пользоваться нельзя, надо внимательно учесть особенности задачи и, опираясь на них, дать решение. Мы так и поступили. Именно, мы заметили, что в случае, когда  $V = v$ , пловец будет находиться на месте и никогда не пройдет 0,2 км против течения реки.

Если бы задача была более сложной, условие ее следовало бы переписать специально для рассматриваемого случая и вновь ее решить. Поясним это на нашей задаче. Если  $V = v$ , условие задачи запишется так:

**Задача.** Сколько времени потребуется пловцу, чтобы пройти вверх по реке 0,2 км, если пловец в стоячей воде проходит  $V$  км/час и скорость течения реки также  $V$  км/час?

**Решение.** Предположим, что пловец пройдет указанное расстояние в  $x$  часов. Тогда

$$\begin{aligned} 0,2 &= x (V - V), \\ 0,2 &= x \cdot 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Уравнение (3) решения не имеет.

**Замечание.** Уравнение (3) мы могли бы получить сразу из уравнения (1), положив в нем  $v = V$ .

## ГЛАВА II

### ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ И ОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

#### § 1. Определение отрицательного числа

Содержание понятия числа не оставалось неизменным при историческом развитии общества и постепенно расширялось по мере расширения круга вопросов и задач, требовавших разрешения средствами математики. Учащимся при изучении математики тоже необходимо шаг за шагом ознакомиться с расширением понятия числа. Первый шаг в этом направлении делается в арифметике, когда к *целым* числам присоединяются *дробные*. Это расширение понятия числа значительно увеличивает круг вопросов и задач, допускающих решение при помощи арифметики.

Теперь пришло время сделать второй шаг. Этот шаг состоит в том, что к числам, изучавшимся в арифметике — целым и дробным — присоединяются новые — *отрицательные* числа.

Под этим названием понимаются числа  $-3$ ,  $-5$  (минус три, минус пять) и т. д. Один случай употребления такого рода чисел вошел в быт, именно при измерении температуры. Всем известны и понятны выражения, вроде: «Температура ночью от минус десяти до минус четырнадцати градусов.»

Введение новых чисел заставляет дать специальное название и для обыкновенных целых и дробных чисел, рассматриваемых в арифметике. Все они, кроме нуля, называются *положительными* числами. Число 0 не причисляется ни к положительным, ни к отрицательным числам.

Раньше чем дать точное определение отрицательного числа, рассмотрим следующую задачу.

**Задача.** Во время сильных дождей уровень воды в реке поднялся на  $a$  сантиметров в течение суток. В течение следующих суток уровень воды понизился на  $b$  сантиметров. Какой будет уровень воды по истечении этих двух суток?

**Решение.** Решим прежде всего эту задачу, сравнивая уровень воды в конце вторых суток с уровнем в начале первых суток. При этом способе решения нам придется рассмотреть три случая.

**Случай 1.** Число  $a$  больше  $b$ . В этом случае уровень воды в конце вторых суток будет выше уровня воды в начале первых суток на  $(a - b)$  см.

*Случай 2.* Число  $a$  равно  $b$ . В этом случае уровень воды в конце вторых суток будет совпадать с начальным уровнем.

*Случай 3.* Число  $a$  меньше  $b$ . В этом случае уровень воды в конце вторых суток будет *ниже* начального уровня на  $(b - a)$  см.

Ответ задачи может быть сформулирован следующим образом. За двое суток вода *поднялась* на  $(a - b)$  см, если  $a$  больше  $b$ ; *осталась на том же уровне*, если  $a$  равно  $b$ , или *опустилась* на  $(b - a)$  см, если  $a$  меньше  $b$ . Таким образом, при самом простом способе решения этой задачи мы не можем дать одну формулу для ее решения, охватывающую всевозможные численные значения для данных чисел  $a$  и  $b$ .

Однако можно дать другой способ решения, при котором мы сможем одной формулой охватить все случаи. Для этого достаточно отсчитывать высоту уровня воды, например, от дна реки в глубоком месте.

Пусть в начале первых суток вода стояла на  $A$  см выше дна реки. Тогда в конце первых суток вода будет находиться на  $(A + a)$  см выше дна, а к концу вторых суток на  $(A + a - b)$  см выше дна. Формулой  $A + a - b$  охватываются все случаи, которые могут представиться в задаче.

Решение выглядит так, как будто к числу  $A$ , определяющему уровень воды в начале первых суток, добавляется число  $a - b$ .

Например, если  $a = 15$  и  $b = 10$ , то

$$A + a - b = A + 5.$$

Однако, если  $a$  меньше  $b$ , то разность  $a - b$  не имеет смысла, а для вычисления  $A + a - b$  нужно от числа  $A$  *отнять* некоторое число. Например, если  $a = 5$  и  $b = 10$ , то  $A + a - b = A - 5$ . Таким образом, в этом случае, вместо *добавления* к числу  $A$  разности  $a - b$ , мы должны *сделать вычитание* из  $A$  некоторого числа.

Введение отрицательных чисел дает возможность сохранить первый способ истолкования формулы  $A + a - b$ . Именно, будем считать, что разность  $a - b$  имеет смысл не только при  $a$ , не меньшем  $b$ , но и при  $a$ , меньшем  $b$ , но в этом случае эта разность есть число, называемое *отрицательным числом*, а именно такое, добавление которого равносильно вычитанию некоторого положительного числа. Так,  $10 - 15$  есть отрицательное число « $-5$ ». Добавление этого числа равносильно вычитанию числа 5.

Дадим теперь точное определение отрицательного числа.

**Определение.** Каждому положительному числу сопоставляется число, называемое *отрицательным*. При этом считается, что добавление к какому-либо числу отрицательного числа равносильно вычитанию соответствующего положительного.

Само собой разумеется, что то число, добавление к которому отрицательного числа равносильно вычитанию соответствующего положительного, нужно считать достаточно большим, чтобы это вычитание имело смысл.

Введем теперь некоторые названия и обозначения, необходимые при пользовании отрицательными числами.

Отрицательное число, соответствующее некоторому положительному числу  $a$ , называется *противоположным* числу  $a$  и обозначается  $-a$ . Так, число, противоположное числу 5, обозначается  $-5$ ; число, противоположное числу 0,73, обозначается  $-0,73$ ; число, противоположное числу  $2\frac{1}{4}$ , обозначается  $-2\frac{1}{4}$  и т. д. Обозначение отрицательных чисел читаются словами так: «минус пять», «минус ноль целых семьдесят три сотых», «минус два и одна четверть» и т. д. Смысл этого обозначения тесно связан с определением отрицательного числа: добавление числа  $-a$ , согласно определению, равносильно вычитанию числа  $a$ .

В свою очередь и положительное число, которому противоположно данное отрицательное число, называется *противоположным* этому отрицательному числу. Так, число, противоположное числу  $-5$ , есть 5; число, противоположное числу  $-2\frac{1}{4}$ , есть  $2\frac{1}{4}$  и т. д.

Можно поэтому говорить, что число 5 и  $-5$  *взаимно противоположны*, так как  $-5$  противоположно числу 5, и 5 противоположно числу  $-5$ .

Наконец за число, противоположное числу 0, принимается само число 0. Это естественно, так как добавление нуля к какому-либо числу или вычитание нуля из этого же числа приведет к одному результату — число не изменится.

Если некоторое число, положительное, отрицательное или 0, как-либо обозначено, то противоположное ему число обозначается таким же образом, но со знаком минус. Например,  $-0$  есть число, противоположное числу 0, и потому  $-0 = 0$ . Число  $-(-5)$  противоположно числу  $-5$ , и потому  $-(-5) = 5$ . Если число обозначено буквой  $a$ , то противоположное ему обозначается  $-a$ . Если  $a$  есть положительное число, то это обозначение совпадает с введенным выше обозначением для отрицательных чисел.

Часто бывает нужно подчеркнуть противопоставление положительных чисел отрицательным. С этой целью перед обозначением положительного числа ставят знак  $+$ . Например,  $+5$  обозначает просто число 5. *Никакого различия между  $+5$  и 5 нет.*

Таким же образом, если какое-либо число, положительное, отрицательное или равное нулю, как-либо обозначено, например буквой  $a$ , то  $+a$  обозначает то же самое число. Например,  $+(-5) = -5$ ,  $+0 = 0$  и т. д.

Целые и дробные положительные числа, противоположные им отрицательные числа и число 0 все вместе носят название *рациональных чисел*.

Введем теперь важное понятие *абсолютной величины* числа.

Определение. *Абсолютной величиной* положительного числа и числа, равного нулю, называется само это число.

*Абсолютной величиной* отрицательного числа называется противоположное ему положительное число.

Например, абсолютная величина числа 5 равна 5, абсолютная величина  $-5$  тоже равна 5.

Вообще, противоположные числа имеют одинаковую абсолютную величину.

Абсолютную величину числа  $a$  обозначают  $|a|$ . Так,

$$|-5| = 5; \quad |5| = 5; \quad |0| = 0.$$

### Упражнения

1. Упростить запись следующих чисел:

$$\begin{array}{lll} -(-3); & -(+3); & -[-(-2)]; \\ -[-(+2)]; & +(-2); & +[-(+3)]. \end{array}$$

2. Выполнить сложение и объяснить результат:

$$7 + (-3); \quad 9 + (-5).$$

3. Вычислить  $|-2|$ ;  $|4-4|$ ;  $-|-4|$ .

## § 2. Вычитание из меньшего положительного числа большего

Присоединение к целым числам дробных чисел дало возможность рассматривать действие деления двух целых чисел как возможное и в том случае, когда делимое «не делится» на делитель, т. е. в том случае, когда частное не является целым числом \*).

Введение отрицательных чисел делает возможным действие, которое не имеет смысла, если оставаться в области обыкновенных чисел, т. е. чисел положительных и числа 0. Именно, введение отрицательных чисел делает возможным вычитание из меньшего положительного числа большего.

Действительно, что такое  $10 - 15$ ? Согласно определению действия вычитания  $10 - 15$  есть такое число, которое, будучи прибавлено к 15, дает в сумме 10. Ясно, что среди положительных чисел такого числа не существует, так как при прибавлении к числу 15 положительного числа в сумме получится число большее, чем 15, в то время как 10 меньше 15. Однако среди отрицательных чисел такое число найдется, именно  $-5$ . Действительно, согласно определению отрицательного числа, добавление к числу 15 числа  $-5$  равносильно вычитанию числа 5. В результате получится 10.

---

\*) Конечно, введение дробных чисел исторически и было вызвано именно тем, что практическая деятельность человека заставляла считать такое действие возможным. Так, например, разделить яблоко пополам можно, и не зная употребления дробей.



Подобным образом можно рассуждать и при других численных значениях уменьшаемого и вычитаемого.

Вывод. *Если уменьшаемое меньше вычитаемого, то их разность есть отрицательное число, противоположное разности вычитаемого и уменьшаемого.*

### Упражнения

1. Выполнить вычитание с подробным объяснением результата

2 — 5;    4 — 9.

### § 3. Применение отрицательных чисел при описании изменения переменной величины

В практической деятельности очень часто приходится иметь дело с *переменными величинами*, численные значения которых меняются в зависимости от обстоятельств. Например, уровень воды в реке повышается во время половодья или во время дождей и понижается в сухую погоду. Температура воздуха в данном месте все время меняется с течением времени. Площадь квадрата изменяется при изменении длины его стороны и т. д.

Для того чтобы составить представление об изменении переменной величины, нужно измерить или вычислить ряд ее значений. Так, чтобы судить об изменении уровня воды в реке, нужно измерять этот уровень через некоторые промежутки времени. Чтобы судить об изменении температуры воздуха в данном пункте, следует измерять ее термометром через некоторые промежутки времени. Чтобы судить об изменении площади квадрата при изменении его стороны, следует вычислить эту площадь для ряда значений стороны и т. д.

Рассмотрим пример. Уровень воды в реке в течение суток измерялся через каждые 2 часа. Результат измерения сведен в следующую таблицу:

| Время измерения                   | 0 ч. | 2 ч. | 4 ч. | 6 ч. | 8 ч. | 10 ч. | 12 ч. | 14 ч. | 16 ч. | 18 ч. | 20 ч. | 22 ч. | 24 ч. |
|-----------------------------------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Уровень воды выше среднего (в см) | 10   | 13   | 17   | 20   | 22   | 23    | 23    | 21    | 19    | 14    | 10    | 6     | 5     |

Из этой таблицы мы видим, что вода сначала поднималась, затем оставалась на одном уровне и, наконец, начала опускаться. Еще более полное представление об изменении уровня мы составим, если рассмотрим, как изменялся уровень воды за каждый из двухчасовых

промежутков времени между двумя измерениями. Результат этого рассмотрения можно свести в такую таблицу:

| Промежуток времени         | От 0 ч.<br>До 2 ч. | 2 ч.<br>4 ч. | 4 ч.<br>6 ч. | 6 ч.<br>8 ч. | 8 ч.<br>10 ч. | 10 ч.<br>12 ч. | 12 ч.<br>14 ч. | 14 ч.<br>16 ч. | 16 ч.<br>18 ч. | 18 ч.<br>20 ч. | 20 ч.<br>22 ч. | 22 ч.<br>24 ч. |
|----------------------------|--------------------|--------------|--------------|--------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Как изменился уровень воды | Повысился          |              |              |              |               |                | Понижился      |                |                |                |                |                |
|                            | на<br>3 см         | на<br>4 см   | на<br>3 см   | на<br>2 см   | на<br>1 см    | не<br>изм.     | на<br>2 см     | на<br>2 см     | на<br>5 см     | на<br>4 см     | на<br>4 см     | на<br>1 см     |

В этой таблице, кроме числа, показывающего величину изменения уровня воды, нам нужно указывать на направление этого изменения — уровень воды сначала повышался, затем стал понижаться.

Таблица сделается проще и нагляднее, если мы введем в рассмотрение наряду с положительными числами также и отрицательные числа следующим образом.

Пусть нам известны два значения переменной величины. При переходе от первого значения ко второму величина может увеличиться или уменьшиться. В обоих случаях величина изменения измеряется разностью между большим и меньшим из сравниваемых значений. Для того чтобы получить второе значение переменной из первого, нужно эту разность добавить или вычесть в зависимости от того, увеличивается переменная при переходе от первого значения ко второму или уменьшается. Поэтому целесообразно приписать этой разности знак минус в случае, если переменная величина уменьшается. Полученное таким образом число называется *приращением переменной величины*. Абсолютная величина приращения определяет величину изменения, а знак определяет направление изменения. Пользуясь приращением, можно записать предыдущую таблицу изменения уровня воды в следующей форме:

| Промежуток времени          | От 0 ч.<br>До 2 ч. | 2 ч.<br>4 ч. | 4 ч.<br>6 ч. | 6 ч.<br>8 ч. | 8 ч.<br>10 ч. | 10 ч.<br>12 ч. | 12 ч.<br>14 ч. | 14 ч.<br>16 ч. | 16 ч.<br>18 ч. | 18 ч.<br>20 ч. | 20 ч.<br>22 ч. | 22 ч.<br>24 ч. |
|-----------------------------|--------------------|--------------|--------------|--------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Приращение уровня<br>(в см) | +3                 | +4           | +3           | +2           | +1            | 0              | -2             | -2             | -5             | -4             | -4             | -1             |

Мы поставили в таблице перед положительными приращениями знак  $+$ , чтобы противопоставить их отрицательным приращениям. Еще раз повторяем, что это делается только для большей наглядности, никакой разницы, например, между числами  $+3$  и  $3$  нет.

Определение. *Приращение переменной величины* при переходе от первого ее значения ко второму есть такое число, которое, будучи добавлено к первому значению, дает второе.

Иными словами, приращение есть разность между вторым и первым значением переменной. Если переменная возрастает при переходе

от первого значения ко второму, то ее приращение положительно, если уменьшается, то ее приращение отрицательно. Наконец, если оба значения одинаковы, то приращение равно нулю.

Таким образом, отрицательные числа наряду с положительными числами и числом 0 удобно применять при описании изменения переменной величины, если дан ряд последовательных ее значений.

### Упражнения

**Задача 1.** Температура воздуха изменялась в течение суток согласно следующей таблице:

| Время измерения     | 0 ч. | 2 ч. | 4 ч. | 6 ч. | 8 ч. | 10 ч. | 12 ч. | 14 ч. | 16 ч. | 18 ч. | 20 ч. | 22 ч. | 24 ч. |
|---------------------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Температура выше 0° | 6°   | 4°   | 3°   | 3°   | 5°   | 8°    | 11°   | 13°   | 12°   | 11°   | 10°   | 8°    | 6°    |

Составить таблицу приращений температуры.

**Задача 2.** Составить таблицу приращений для площади квадрата в предположении, что сторона квадрата принимает значения 0,5 см; 1 см; 1,5 см; 2 см; 2,5 см; 3 см; 3,5 см; 4 см.

**Задача 3.** Дана таблица приращений температуры в течение суток при измерении через каждые два часа. Восстановить таблицу значений температуры. Температура в 0 час. равна +10°.

| Промежуток времени     | От 0 ч.<br>До 2 ч. | 2 ч.<br>4 ч. | 4 ч.<br>6 ч. | 6 ч.<br>8 ч. | 8 ч.<br>10 ч. | 10 ч.<br>12 ч. | 12 ч.<br>14 ч. | 14 ч.<br>16 ч. | 16 ч.<br>18 ч. | 18 ч.<br>20 ч. | 20 ч.<br>22 ч. | 22 ч.<br>24 ч. |
|------------------------|--------------------|--------------|--------------|--------------|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Приращение температуры | —1°                | —2°          | 0°           | +3°          | +4°           | +6°            | +2°            | 0°             | —3°            | —3°            | —5°            | —2°            |

## § 4. Применение отрицательных чисел к измерению величин, изменяющихся в двух противоположных направлениях

Всем известно употребление отрицательных чисел при измерении температуры. Учащиеся знакомы и с другим случаем употребления отрицательных чисел. В географии принято отсчитывать высоту географических пунктов от уровня океана. Эта высота считается положительной, если пункт расположен выше этого уровня, и отрицательной, если ниже. На физических картах часто отмечаются высоты наиболее замечательных пунктов. На карте Азии можно увидеть пометку —26 на изображении Каспийского моря. А на изображении впадины, расположенной к югу от восточных отрогов хребта Тянь-Шань, стоит пометка —298. Это означает, что уровень Каспийского моря на 26 м ниже уровня океана, а дно упомянутой впадины ниже уровня океана на целых 298 м.

В обоих рассмотренных нами примерах величины, для измерения которых привлекались наряду с положительными числами также и отрицательные, обладают следующим общим свойством. Обе эти величины, и температура, и высота над уровнем океана, могут изменяться в двух противоположных направлениях от некоторого значения, принятого за начало отсчета (при измерении температуры за начало отсчета принимается температура тающего льда, при измерении высоты географических пунктов — уровень океана). Это делает возможным и удобным использование отрицательных чисел для измерения в направлении, противоположном тому, в котором результат измерения считается положительным.

Кроме величин, указанных в разобранных примерах, существует очень много других величин, могущих изменяться в двух противоположных направлениях. Всякий раз при измерении таких величин целесообразно использовать отрицательные числа.

Так, при измерении времени относительно некоторого момента, принятого за начало отсчета, целесообразно считать положительным время событий, происшедших после начала отсчета, и отрицательным — время событий, происшедших до начала отсчета. При измерении сил, действующих на пружину, целесообразно считать положительными силы, растягивающие пружину, и отрицательными — силы, сжимающие пружину и т. д.

Пока мы ограничимся рассмотрением этих примеров.

В заключение заметим, что не при всяком измерении имеет смысл привлечение отрицательных чисел. Так, бессмысленно говорить, что число людей в комнате равно  $-2$ , бессмысленно употреблять отрицательные числа при измерении площади, объема, веса. Даже при измерении температуры отрицательные числа лишены смысла при пользовании абсолютной шкалой, в которой за начало отсчета принята самая низкая возможная температура — так называемый абсолютный нуль ( $-273^\circ$  по обычной шкале)\*).

**Вывод.** *Отрицательные числа наряду с положительными числами и с числом нуль служат для измерения величин, могущих изменяться в двух противоположных направлениях от некоторого значения, принятого за начало отсчета.*

## § 5. Изображение чисел в виде точек на прямой линии

Числа имеют очень наглядное изображение в виде точек на прямой линии.

На прямой выбирается точка, которая принимается за начало отсчета, и задается некоторая единица масштаба, например 1 см.

---

\*) Тепловые явления объясняются беспорядочным движением мельчайших частиц — молекул, из которых образованы все вещества. Увеличение скорости этого движения соответствует повышению температуры. Абсолютный нуль соответствует такому состоянию, при котором движение молекул отсутствует.

Выбранная начальная точка разбивает прямую на две части. На одной из них изображаются положительные числа, на другой — отрицательные числа. Для изображения числа берется отрезок, длина которого равна абсолютной величине числа, и этот отрезок откладывается от начальной точки в ту или другую сторону в зависимости от знака изображаемого числа. Другой конец отрезка принимается за точку, изображающую данное число. За изображение числа 0 принимается сама начальная точка.

Прямая, точки которой изображают числа, носит название *числовой оси*. На рис. 3 изображена числовая ось, некоторые точки которой надписаны теми числами, которые они изображают.

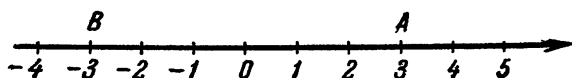


Рис. 3.

Для того чтобы различить части числовой оси, на которых изображаются положительные и отрицательные числа, на оси указывается направление движения от отрицательных чисел к положительным. На чертеже это направление указано стрелочкой.

Абсолютная величина числа есть расстояние от точки, изображающей это число, до начальной точки, измеренное в выбранном масштабе. Противоположные числа изображаются точками, лежащими на одинаковом расстоянии от начальной точки, но по разные стороны от нее.

Числовая ось называется также *осью координат*, а число, изображением которого является данная точка, называется *координатой* этой точки. Так, точка *A* на рис. 3 имеет своей *координатой* число 3, а точка *B* — число  $-3$ .

Таким образом, каждое рациональное число изображается некоторой точкой на числовой оси.

### Упражнения

1. На числовой оси изобразить числа 1;  $-2$ ;  $-1,3$ ;  $2\frac{3}{4}$ ; 0.

## § 6. Сложение положительных и отрицательных чисел

В этом параграфе и в ближайших следующих будут даны правила арифметических действий над любыми рациональными числами.

**Задача.** Уровень воды в реке измерялся в течение двух суток. За первые сутки уровень изменился, получив приращение  $a$  см, за вторые сутки, — получив приращение  $b$  см. Какое приращение получил уровень воды за двое суток?

**Решение.** При решении этой задачи допустим сначала, что числа  $a$  и  $b$  положительны, т. е. что в первые сутки уровень *поднялся* на  $a$  см и за вторые сутки также *поднялся* на  $b$  см.

Очевидно, что в этом случае уровень воды за двое суток *поднялся* на  $(a + b)$  см. Таким образом, приращение уровня за двое суток получается сложением приращений уровня за каждые сутки. Сумма приращений уровня за первые сутки и за вторые сутки равна приращению уровня воды за двое суток.

Мы сделали этот вывод в предположении того, что числа  $a$  и  $b$  положительны. Сохраним то же истолкование суммы и при любых других значениях чисел  $a$  и  $b$ , а на основании этого выведем правила сложения для любых рациональных чисел.

Рассмотрим теперь ряд случаев, которые здесь могут представиться.

**Случай 1.** Число  $a = 10$ ;  $b = -7$ . Вода *поднялась* на 10 см, затем *опустилась* на 7 см. В результате уровень получился выше начального уровня на  $10 - 7 = 3$  см. Таким образом,

$$10 + (-7) = 10 - 7 = 3.$$

**Случай 2.** Число  $a = -7$ ;  $b = 10$ . Вода *опустилась* на 7 см, затем *поднялась* на 10 см. В результате уровень воды оказался на 3 см выше начального уровня. Таким образом,  $(-7) + 10 = 3$ .

**Случай 3.** Число  $a = 7$ ;  $b = -10$ . Вода *поднялась* на 7 см, затем *опустилась* на 10 см. Результатом является понижение уровня на 3 см:

$$7 + (-10) = -3.$$

**Случай 4.** Число  $a = -10$ ;  $b = +7$ . Вода *опустилась* на 10 см, затем *поднялась* на 7 см. Результатом является понижение уровня на 3 см:

$$(-10) + 7 = -3.$$

**Случай 5.** Число  $a = 7$ ;  $b = -7$ . Уровень воды *поднялся* на 7 см, затем *опустился* на 7 см. В результате он вернулся к начальному уровню:

$$7 + (-7) = 0.$$

**Случай 6.**  $a = -7$ ;  $b = 7$ . Вода *опустилась* на 7 см, затем *поднялась* на 7 см. В результате уровень вернулся к исходному:

$$(-7) + 7 = 0.$$

**Случай 7.**  $a = -10$ ;  $b = -7$ . Вода *опустилась* на 10 см, затем снова *опустилась* на 7 см. В результате вода *опустилась* на 17 см:

$$(-10) + (-7) = -17.$$

*Случай 8.*  $a = -7$ ;  $b = 0$ . Вода опустилась на 7 см, затем осталась на том же уровне. В результате уровень воды понизился на 7 см:

$$(-7) + 0 = -7.$$

*Случай 9.*  $a = 0$ ;  $b = -7$ . Уровень воды не изменился за первые сутки, за вторые понизился на 7 см. В результате вода опустилась на 7 см:

$$0 + (-7) = -7.$$

Таким же образом можно рассуждать и при любых других численных значениях для  $a$  и  $b$ .

Обобщая, мы приходим к следующим правилам сложения любых рациональных чисел.

**Правило 1.** Чтобы сложить два числа, из которых одно положительное, а другое отрицательное, нужно найти разность их абсолютных величин и полученную разность взять со знаком слагаемого, имеющего большую абсолютную величину.

**Правило 2.** Чтобы сложить два отрицательных числа, нужно сложить их абсолютные величины и взять результат со знаком минус.

**Правило 3.** Сумма двух противоположных чисел равна нулю.

**Правило 4.** Сумма двух чисел, из которых одно равно нулю, равно другому слагаемому.

### Упражнения

1. Выполнить сложение

$$7 + (-15); \quad -10 + [(-3) + 8]; \quad [(-5) + 4] + [(-7) + 10].$$

2. Определить неизвестное  $x$  из уравнений

$$x + (-3) = 7; \quad (-4) + x = 2;$$

$$4 + x = -1; \quad 5 + x = 0.$$

### § 7. Свойства сложения

Как отмечалось в первой главе, действие сложения в применении к положительным числам обладает двумя важными свойствами, которые носят название переместительного и сочетательного законов. Эти законы выражаются следующими формулами:

$$a + b = b + a \text{ (переместительный закон);}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ (сочетательный закон).}$$

Переместительный и сочетательный законы сохраняются и при сложении любых рациональных чисел.

Справедливость переместительного закона непосредственно следует из правил, по которым выполняется сложение чисел. Действительно, согласно этим правилам, порядок слагаемых не оказывает влияния на результат, так как в этих правилах оба слагаемых совершенно равноправны.

Справедливость сочетательного закона также может быть доказана на основании правил сложения. Однако такое доказательство очень громоздко, так как при его проведении нужно рассмотреть огромное количество случаев, которые тут могут представиться. Поэтому мы поступим иначе. Вернемся к задаче, которая привела нас к правилам сложения, еще несколько усложнив ее условие.

**Задача.** В течение первых суток приращение уровня воды составило  $a$  см, в течение вторых суток  $b$  см, в течение третьих суток  $c$  см. Какое приращение получит уровень по истечении всех трех суток?

**Решение.** Эту задачу можно решить двумя способами. Мы приведем эти два решения в той форме, в какой обычно решаются задачи по арифметике, т. е. в форме вопросов.

**Способ 1.** 1) Какое приращение получил уровень воды за первые двое суток?

Приращение уровня за первые сутки равно  $a$  см, за вторые сутки  $b$  см. Следовательно, за двое первых суток уровень воды получил приращение  $(a + b)$  см.

2) Какое приращение получил уровень воды за трое суток?

За первые двое суток уровень воды получил приращение  $(a + b)$  см, за третьи сутки  $c$  см. Следовательно, за трое суток уровень воды получил приращение  $[(a + b) + c]$  см.

**Ответ.**  $[(a + b) + c]$  см.

**Способ 2.** 1) Каково приращение уровня воды за вторые и третьи сутки?

За вторые сутки уровень воды получил приращение  $b$  см, за третьи  $c$  см. Следовательно, за вторые и третьи сутки приращение уровня равно  $(b + c)$  см.

2) Какое приращение получил уровень воды за все трое суток?

Приращение уровня складывается из приращения за первые сутки и из приращения за вторые и третьи сутки, т. е. оно равно  $[a + (b + c)]$  см.

**Ответ.**  $[a + (b + c)]$  см.

Сравнивая результаты решения по двум приведенным способам, мы приходим к выводу

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Таким образом, справедливость сочетательного закона установлена.



## § 8. Вычитание

Вычитанием называется действие, обратное сложению, т. е. действие, посредством которого по данной сумме и одному из слагаемых определяется второе слагаемое. Таково определение действия вычитания в применении к положительным числам.

Это определение сохраняется и в применении к отрицательным числам. Названия «уменьшаемое», «вычитаемое» и «разность» тоже употребляются в прежнем смысле. Так, вычестъ из числа  $-3$  число  $-5$ , это значит найти такое число, которое, будучи сложено с числом  $-5$ , дает в сумме  $-3$ . Очевидно, что таким числом является 2, ибо  $2 + (-5) = -3$ . Итак,

$$-3 - (-5) = 2.$$

Действие вычитания производится по следующему правилу.

*Правило. Чтобы получить разность, достаточно к уменьшаемому добавить число, противоположное вычитаемому.*

Это правило записывается в виде следующей формулы:

$$a - b = a + (-b).$$

Дадим доказательство справедливости правила вычитания. Обозначим разность  $a - b$  через  $x$ . По определению вычитания  $x$  есть такое число, что  $x + b = a$ . Решим это уравнение относительно  $x$ , добавив к обеим частям равенства число  $-b$ . Мы рассуждаем так. Если

$$x + b = a,$$

то

$$x + b + (-b) = a + (-b),$$

или

$$x = a + (-b),$$

ибо  $b + (-b) = 0$ . Проверим теперь полученное решение

$$x + b = a + (-b) + b = a,$$

ибо  $(-b) + b = 0$ . Таким образом,  $x = a + (-b)$  действительно удовлетворяет уравнению  $x + b = a$ .

Итак,

$$x = a + (-b), \quad \text{т. е.} \quad a - b = a + (-b),$$

что и требовалось доказать.

## Упражнения

1. Выполнить вычитание чисел

$$2 - (-3); \quad -4 - 2; \quad -2 - (-1); \quad 0 - (-5).$$

2. Выполнить указанные действия

$$4 - [-3 - (-6)]; \quad 30 - \{-10 - [-7 - (-6)]\}.$$

3. Решить уравнения

$$x - (-5) = -4; \quad 10 - x = -15.$$

### § 9. Алгебраическая сумма

В гл. I мы условились производить несколько последовательных действий сложения и вычитания в порядке их записи. Всякое отклонение от этого порядка указывается расстановкой скобок.

**Определение.** Алгебраическое выражение, представляющее собой запись нескольких последовательно проведенных действий сложения и вычитания, называется *алгебраической суммой*.

По внешнему виду алгебраическая сумма состоит из нескольких алгебраических выражений (чисел, букв или более сложных выражений), соединенных знаками  $+$  и  $-$ . Примерами алгебраической суммы могут служить выражения  $2 - 3 - 4 + 8 - 7$ ,  $a - b - c + d + e$  и т. д.

На основании правила, установленного в предыдущем параграфе, действие вычитания можно заменить действием сложения с числом, противоположным вычитаемому.

Поэтому *любая алгебраическая сумма может быть записана в виде суммы*. Например,

$$\begin{aligned} 2 - 3 - 4 + 8 - 7 &= 2 + (-3) + (-4) + 8 + (-7), \\ a - b - c + d + e &= a + (-b) + (-c) + d + e, \\ 2 - a + 3 - 5 + b &= 2 + (-a) + 3 + (-5) + b \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

В такой записи *все вычитаемые заменены противоположными им слагаемыми*.

Слагаемые алгебраической суммы и числа, противоположные вычитаемым, называются *членами* алгебраической суммы. Так, членами алгебраической суммы  $a - b - c + d + e$  являются  $a$ ,  $-b$ ,  $-c$ ,  $d$  и  $e$ . *Алгебраическая сумма есть сумма своих членов*. На основании переместительного и сочетательного законов сложения члены алгебраической суммы можно переставлять в любом порядке и посредством расстановки скобок объединять в группы. Например,

$$\begin{aligned} a - b - c + d + e &= a + d + e - b - c = a + e - c + d - b = \\ &= (a + e - c) + (d - b) \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Указанное свойство алгебраической суммы удобно применять для вычисления численно заданной алгебраической суммы. Например,

$$2 - 3 - 4 + 8 - 7 = (2 + 8) + (-3 - 4 - 7) = 10 + (-14) = -4.$$

#### Упражнения

Вычислить:

1.  $2 + 3 - 5 - 8 + 12$ .

2.  $-3 + 5 + 10 - 8 - 11$ .

## § 10. Употребление знаков неравенства

Часто бывает нужно сравнить числа по величине. Для записи результата сравнения употребляются специальные знаки  $>$  и  $<$ , заменяющие слова «больше» и «меньше». Так,  $10 > 8$  (десять больше восьми),  $7 < 10$  (семь меньше десяти) и т. д.

Понятия «больше» и «меньше», естественно, распространяются на любые рациональные числа. Например, чем холоднее воздух, тем меньше его температура. Так, температура  $-2^\circ$  меньше, чем  $+1^\circ$ , температура  $-5^\circ$  меньше, чем  $-2^\circ$ .

Из этих соображений вытекают следующие правила сравнения чисел:

1. Всякое положительное число больше всякого отрицательного числа, всякое отрицательное число меньше всякого положительного числа.

2. Всякое положительное число больше нуля, нуль меньше всякого положительного числа.

3. Всякое отрицательное число меньше нуля, нуль больше всякого отрицательного числа.

4. Из двух различных отрицательных чисел *меньше* то, абсолютная величина которого *больше*, а *больше* то, абсолютная величина которого *меньше*.

Во всех случаях неравенства  $a < b$  и  $b > a$  означают одно и то же.

Согласно сформулированным правилам  $5 > 0$ ;  $-7 < 0$ ;  $-19 < -7$ ;  $3 > -4$  и т. п.

Неравенство  $a > 0$  обозначает, что  $a$  есть положительное число. Действительно, если  $a > 0$ , то  $a$  не может быть равным нулю и не может быть отрицательным числом, ибо всякое отрицательное число меньше нуля. Следовательно,  $a$  положительно.

Таким же образом неравенство  $a < 0$  обозначает, что  $a$  есть отрицательное число.

Рассмотрим теперь геометрический смысл понятий «больше» и «меньше» в применении к любым рациональным числам.

На рис. 4, 5 и 6 изображена числовая ось, направленная слева направо. На каждом из рисунков отмечено начало отсчета, т. е. изображение числа 0 и изображения еще двух чисел  $a$  и  $b$ , причем каждый раз изображение числа  $b$  расположено правее изображения числа  $a$ . Покажем, что во всех трех случаях  $a < b$ .

На рис. 4 рассматривается случай, когда оба числа положительны. В этом случае очевидно, что  $a < b$ .



Рис. 4.

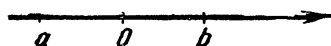


Рис. 5.

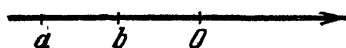


Рис. 6.

На рис. 5 число  $a$  отрицательное,  $b$  положительное. Следовательно, и здесь  $a < b$ .

На рис. 6 оба числа  $a$  и  $b$  отрицательны, причем абсолютная величина числа  $a$  больше абсолютной величины числа  $b$ , ибо точка, изображающая  $a$ , находится от начала отсчета дальше, чем точка, изображающая число  $b$ . Следовательно, и в этом случае  $a < b$ .

Итак, если два числа изображены на числовой оси, направленной слева направо, то из них *большим является то, изображение которого расположено правее, а меньшим то, изображение которого расположено левее.*

Из геометрического смысла неравенств легко вывести следующее свойство неравенств, очевидное для положительных чисел, но нуждающееся в доказательстве для любых рациональных чисел: *если  $a < b$  и  $b < c$ , то  $a < c$ .*

Действительно, изображая числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  на числовой оси, направленной слева направо, мы увидим, что изображение числа  $a$  расположено левее изображения числа  $b$ , а изображение числа  $b$  расположено



Рис. 7.

левее изображения числа  $c$  (рис. 7). Следовательно, изображение  $a$  расположено левее изображения  $c$ , и потому  $a < c$ .

Таким же образом устанавливается, что *если  $a > b$  и  $b > c$ , то  $a > c$ .*

Неравенства одинакового направления часто соединяются в *цепочку*. Например, цепочка  $a < b < c$  обозначает, что  $a < b$  и  $b < c$ . При геометрическом изображении чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  цепочка неравенств  $a < b < c$  обозначает, что изображение  $b$  расположено между изображениями  $a$  и  $c$ .

Знаки неравенств употребляются главным образом для записи границ, в которых могут находиться числа, участвующие в данной задаче или в данном рассуждении. Так, например, если  $a$  обозначает высоту сосны в метрах, то  $a$  должно удовлетворять неравенствам  $0 < a < 50$ , ибо высота дерева есть положительное число и самая высокая сосна не достигает высоты 50 м.

Однако знаков  $>$  и  $<$  недостаточно для записи ограничений этого рода. Пусть  $a$  обозначает высоту в метрах некоторой горы, про которую известно только, что она расположена на территории СССР. Как записать неравенство, которому удовлетворяет число  $a$ , учитывая, что самая высокая гора в СССР — пик Сталина — имеет высоту 7495 м? Записать  $a < 7495$  было бы неверно, так как высота пика Сталина *равна* 7495 м. Можно записать  $a < 7500$  или даже  $a < 8000$ , но такая запись даст менее точное представление о высоте

гор в СССР, чем знание высоты самой высокой горы. Здесь следует сказать: «*а не больше 7495*».

Слова «не больше» заменяются знаком  $\leq$ , который иногда читается «меньше или равно».

Итак, в нашем примере  $a \leq 7495$ .

Таким же образом знак  $\geq$  заменяет слова «не меньше» или, что то же самое, «больше или равно».

Знаки неравенства  $\leq$  и  $\geq$  применяются главным образом к числам, одно из которых (или оба) обозначено буквой.

Кроме перечисленных знаков неравенства, употребляется знак  $\neq$ , который читается «не равно». Так,  $3 \neq 5$  (три не равно пяти) и т. д. Этот знак употребляется в тех случаях, когда требуется подчеркнуть только неравенство двух чисел без указания о направленности этого неравенства.

### Упражнения

1. Расставить знаки  $>$  и  $<$  между числами 3 и  $-7$ ;  $-4$  и  $-7$ ; 0 и 5;  $-6$  и 3.

2. Пусть  $a < b$ . Числа  $a$  и  $b$  изображены на числовой оси. Записать пользуясь знаками неравенств, что

1) число  $x$  изображается точкой, лежащей *внутри* отрезка, ограниченного точками, изображающими  $a$  и  $b$ ;

2) число  $x$  изображается точкой, лежащей *на отрезке*, ограниченном точками, изображающими  $a$  и  $b$ ;

3) число  $a$  есть положительная правильная дробь.

## § 11. Направленные отрезки

Рассмотрим следующий пример. Через город  $H$  проходит шоссе. По этому шоссе из города выехал автомобиль и проехал 40 км. После остановки он проехал по тому же шоссе еще 30 км. На каком расстоянии от города оказался автомобиль?

Очевидно, что формулировка этой задачи неполная, так как в ней нет указания на то, в каком направлении проехал автомобиль последние 30 км; в том же, в котором он раньше проехал 40 км или в противоположном. В первом случае автомобиль окажется в 70 км от города, во втором — в 10 км.

Таким образом, для получения *определенного ответа* нужно в условии задачи к указанию пути в 30 км, пройденного автомобилем во второй прием, добавить указание о направлении его движения.

Таким же образом обстоит дело во всякой задаче, связанной с движением точки по прямой. Если известно исходное положение точки и известна длина отрезка, пройденного точкой, то нужно знать еще направление движения для того, чтобы знать конечное положение точки.

Отрезок на прямой линии, для которого задана не только длина, но и направление, называется *направленным отрезком* или *вектором*.

У направленных отрезков следует различать начало и конец, так что две точки, ограничивающие направленный отрезок, не равноправны. Направленный отрезок обозначают двумя буквами, соответствующими его началу и концу. При этом буква, обозначающая начало, ставится впереди буквы, обозначающей конец.

Направленные отрезки считаются *равными*, если они имеют *одинаковую длину и одинаковое направление*. Так, отрезки  $AB$  и  $CD$  (см. рис. 8) равны, а отрезки  $AB$  и  $BA$  не равны, хотя их длины равны.

Для измерения направленных отрезков используются наряду с положительными числами числа отрицательные. Для этого прямой, на кото-

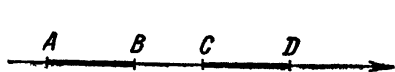


Рис. 8.

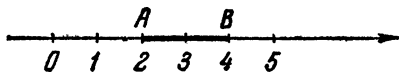


Рис. 9.

рой располагаются направленные отрезки, тоже придается некоторое направление.

Алгебраической величиной направленного отрезка на данной прямой называется его длина, измеренная в данном масштабе, взятая со знаком  $+$ , если направление отрезка совпадает с направлением прямой,

и взятая со знаком  $-$ , если эти направления противоположны.

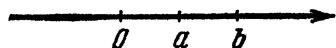
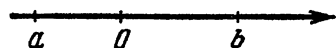


Рис. 10.

Например, отрезок  $AB$  имеет алгебраическую величину 2, а отрезок  $BA$  имеет алгебраическую величину  $-2$  (рис. 9).

Вообще отрезки, имеющие одинаковую длину, но противоположные направления, имеют в качестве алгебраических величин противоположные числа.

Особенно удобно рассматривать направленные отрезки на числовой оси. В этом случае алгебраическая величина направленного отрезка равна разности координаты конца отрезка и координаты его начала.

Действительно (рис. 10), длина отрезка, соединяющего точки с координатами  $a$  и  $b$ , равна сумме абсолютных величин координат концов, если точки лежат по разные стороны от начала, или абсолютной величине разности абсолютных величин координат концов, если точки лежат по одну сторону от начала. В обоих случаях длина отрезка равна абсолютной величине разности координат концов.

Направление отрезка совпадает с направлением оси, если координата начала меньше координаты конца, и направление отрезка противоположно направлению оси, если координата начала больше координаты конца. В обоих случаях знак алгебраической величины отрезка совпадает со знаком разности координат его конца и начала. Таким

образом, алгебраическая величина отрезка и разность координат его конца и начала совпадают по абсолютной величине и имеют одинаковые знаки. Следовательно, они равны.

Направленные отрезки применяются в задачах, связанных с движением. Перемещение за некоторый промежуток времени точки, движущейся по прямой линии, целесообразно рассматривать как направленный отрезок. Алгебраическая величина этого отрезка называется *алгебраической величиной пути* или *величиной перемещения точки*. Таким образом, величина перемещения движущейся точки может быть как положительной, так и отрицательной. Величина перемещения положительна, если направление перемещения совпадает с выбранным направлением прямой, по которой происходит движение, и отрицательна, если эти направления противоположны.

Движение называется *равномерным*, если точка в равные промежутки времени проходит равные пути. Скорость равномерного движения измеряется алгебраической величиной пути, пройденного за единицу времени. Таким образом, скорость равномерного движения точки может измеряться как положительным, так и отрицательным числом. Положительная скорость указывает, что направление движения совпадает с направлением прямой, отрицательная, — что направление движения противоположно направлению прямой.

### Упражнения

**Задача 1.** На числовой оси задана точка  $A$  с координатой  $-2$  и точка  $B$  с координатой  $3$ . Чему равна алгебраическая величина отрезка  $AB$ ? Чему равна алгебраическая величина отрезка  $BA$ ?

**Задача 2.** Найти координату конца отрезка  $AB$ , если его начало имеет координату  $-4$ , а алгебраическая величина равна  $-3$ .

**Задача 3.** Найти координату начала отрезка  $AB$ , если его конец имеет координату  $4$ , а его алгебраическая величина равна  $-6$ .

## § 12. Умножение положительных и отрицательных чисел

Умножение положительных и отрицательных чисел выполняется по следующему правилу.

**Правило.** Произведение двух неравных нулю чисел равно произведению их абсолютных величин, взятому со знаком  $+$ , если оба множителя имеют одинаковые знаки, и со знаком  $-$ , если знаки множителей противоположны. Если один из сомножителей равен нулю или оба равны нулю, то и произведение равно нулю.

Например,

$$3 \cdot (-5) = -15; \quad (-4) \cdot \frac{1}{4} = -1;$$

$$(-5) \cdot (-4) = 20; \quad 0 \cdot (-6) = 0 \text{ и т. д.}$$

Сформулированное правило в случае, если хотя бы один из сомножителей является отрицательным числом, представляет собой *определение* действия умножения и не может быть *доказано*.

Однако легко на примерах показать его *целесообразность*.

**Задача.** Автомобиль, едущий по шоссе с постоянной скоростью  $v$  км/час, проехал через центр города  $H$  в 0 час. Где находится автомобиль в момент времени  $t$  часов?

**Решение.** Для определенности будем считать, что шоссе идет с юга на север. Рассмотрим его как числовую ось, направленную с юга на север, а автомобиль — как точку, равномерно движущуюся по этой оси. За начало отсчета примем центр города  $H$ . Координату автомобиля обозначим буквой  $s$ . Так как автомобиль за 1 час проходит  $v$  километров, за  $t$  часов он проходит  $vt$  километров. Следовательно,  $s = vt$ .

Эта формула выведена в предположении, что  $v$  и  $t$  — положительные числа, только в этом случае проведенное выше рассуждение имеет смысл. Однако по смыслу задачи как  $v$ , так и  $t$  могут иметь и отрицательные значения. Мы уже условились считать скорость равномерного движения отрицательной, если движение происходит в направлении, противоположном выбранному направлению прямой. Мы условились и время считать отрицательным, если соответствующий момент предшествует моменту времени, принятому за начало отсчета.

Посмотрим, верный ли результат дает выведенная формула в случае, если  $v$  или  $t$  принимают отрицательные значения.

Положим, что  $v = -30$ ;  $t = 3$ .

В этом случае формула  $s = vt$  дает  $s = -90$ . Этот результат соответствует действительности. В самом деле,  $v = -30$  означает, что автомобиль движется с севера на юг со скоростью 30 км/час и через 3 часа он окажется на 90 км к югу от города  $H$ , т. е. его координата будет равна  $-90$ , что и было получено из нашей формулы.

Положим теперь  $v = 30$ ;  $t = -3$ . В этом случае мы должны ответить на вопрос, где находился автомобиль за три часа *до того*, как он проехал через центр города  $H$ , двигаясь по шоссе со скоростью 30 км/час с юга на север. Очевидно, что он находился на 90 км к югу от центра города  $H$ , т. е. его координата была равна  $-90$ . Формула тоже дает  $s = 30 \cdot (-3) = -90$ .

Положим, наконец,  $v = -30$ ,  $t = -3$ . В этом случае автомобиль движется с севера на юг, и вопрос ставится о том, где он находился за 3 часа до того, как он проехал через центр города  $H$ . Очевидно, что он находился на 90 км к северу от начала отсчета, т. е. его координата равнялась 90 в соответствии с формулой

$$s = (-30) \cdot (-3) = 90.$$

Таким образом, правило умножения позволяет распространить формулу  $s = v \cdot t$ , выражающую зависимость между  $s$ ,  $v$ ,  $t$ , на любые значения скорости и времени,

*Ответ.*  $s = vt$ .



Целесообразность правила оправдывается и другими соображениями. Одним из основных соображений является следующее. При действиях над числами, а особенно над буквенными выражениями, играют важную роль законы действий, сформулированные для положительных чисел в § 6 гл. I. Из них к умножению относятся три закона:

1) переместительный закон умножения:

$$ab = ba;$$

2) сочетательный закон умножения:

$$(ab)c = a(bc);$$

3) распределительный закон умножения относительно сложения:

$$(a + b)c = ac + bc.$$

Все эти три закона остаются верными при действиях над любыми рациональными числами.

Справедливость переместительного закона непосредственно следует из правила умножения, так как в этих правилах порядок сомножителей никакой роли не играет.

Справедливость сочетательного закона устанавливается так. Абсолютная величина произведений  $(ab)c$  и  $a(bc)$ , очевидно, равна произведению абсолютных величин чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Знаки произведений  $(ab)c$  и  $a(bc)$  тоже одинаковы. Действительно, оба произведения положительны, если все три числа положительны или одно положительно, а два отрицательны. Оба произведения отрицательны, если все три сомножителя отрицательны или один отрицателен, а два положительны. Наконец, оба произведения равны нулю, если хотя бы один из сомножителей равен нулю. Таким образом, во всех возможных случаях

$$(ab)c = a(bc).$$

Доказательство справедливости распределительного закона требует рассмотрения значительного числа частных случаев, связанных со знаками чисел  $a$ ,  $b$ ,  $a + b$ ,  $c$  и с возможностями обращения одного из этих чисел в нуль. Поэтому мы ограничимся рассмотрением нескольких численных примеров:

1)  $a = 5$ ;  $b = -3$ ;  $c = -2$ . В этом случае

$$\begin{aligned}(a + b)c &= [5 + (-3)] \cdot (-2) = 2 \cdot (-2) = -4; \\ ac + bc &= 5 \cdot (-2) + (-3) \cdot (-2) = -10 + 6 = -4.\end{aligned}$$

Мы получили одинаковые результаты.

2)  $a = -8$ ;  $b = 8$ ;  $c = -3$ . В этом случае

$$\begin{aligned}(a + b)c &= [(-8) + 8] \cdot (-3) = 0 \cdot (-3) = 0; \\ ac + bc &= (-8) \cdot (-3) + 8 \cdot (-3) = 24 - 24 = 0.\end{aligned}$$

3 Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский

3)  $a = -8$ ;  $b = -3$ ;  $c = -2$ . В этом случае

$$(a + b)c = [(-8) + (-3)] \cdot (-2) = (-11) \cdot (-2) = 22;$$

$$ac + bc = (-8)(-2) + (-3)(-2) = 16 + 6 = 22.$$

Отметим в заключение некоторые частные случаи умножения рациональных чисел.

*Произведение любого числа  $a$  на 1 равно этому числу.* Действительно, как абсолютная величина такого произведения, так и знак совпадают с абсолютной величиной и знаком числа  $a$ .

*Произведение любого числа  $a$  на целое положительное число  $t$  равно сумме  $t$  слагаемых, каждое из которых равно  $a$ .* Для доказательства достаточно рассмотреть случай отрицательного  $a$ , ибо для  $a$ , положительного или равного нулю, справедливость этого утверждения известна. Пусть  $a = -b$  и  $b > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \underbrace{a + a + \dots + a}_{t \text{ раз}} &= \underbrace{(-b) + (-b) + \dots + (-b)}_{t \text{ раз}} = \\ &= -bt \text{ (согласно правилу сложения)} = \\ &= (-b)t \text{ (согласно правилу умножения)} = \\ &= at. \end{aligned}$$

Наконец *произведение любого числа  $a$  на  $-1$  равно числу  $-a$ , противоположному числу  $a$ .* Действительно, абсолютная величина произведения равна абсолютной величине  $a$ , а знак произведения противоположен знаку  $a$ . Следовательно,

$$a(-1) = -a.$$

### Упражнения

Выполнить умножение:

$$1. (-5) \cdot 3. \quad 2. (-5) \cdot (-7). \quad 3. 5 \cdot (-2). \quad 4. (-7) \cdot 0.$$

Вычислить непосредственно и пользуясь распределительным законом:

$$5. [5 + (-6)] \cdot (-5), \quad 6. [(-3) + 5] \cdot (-14).$$

Определить  $x$  из уравнений:

$$7. (-5)x = 15. \quad 8. 3x = -21. \quad 9. (-0,1)x = -10. \quad 10. \left(-\frac{1}{2}\right)x = 0.$$

### § 13. Основное свойство нуля

Согласно правилу умножения двух рациональных чисел число нуль в действии умножения играет особую роль. Именно, *если один из сомножителей равен нулю, то и произведение равно нулю, каков бы ни был второй сомножитель.*

Важную роль в алгебре играет обратное утверждение: *если произведение двух чисел равно нулю, то по крайней мере один из сомножителей равен нулю*. Для того чтобы убедиться в справедливости этого утверждения достаточно проверить, что произведение двух отличных от нуля сомножителей отлично от нуля. Здесь могут представиться три случая:

Случай 1. Оба сомножителя положительны. Тогда их произведение тоже положительно и, следовательно, не равно нулю.

Случай 2. Оба сомножителя отрицательны. Тогда их произведение положительно и, следовательно, не равно нулю.

Случай 3. Один сомножитель положителен, а другой отрицателен. Тогда их произведение отрицательно и, следовательно, не равно нулю.

Мы рассмотрели все возможные случаи, так как число, не равное нулю, или положительно, или отрицательно. И во всех случаях оказывается, что произведение отличных от нуля чисел отлично от нуля. Следовательно, *если произведение равно нулю, то по крайней мере один из сомножителей равен нулю*.

#### § 14. Умножение нескольких чисел и возведение отрицательного числа в степень

Пример.  $(-5) \cdot 4 \cdot (-3) \cdot 2 \cdot (-0,5) \cdot (-3)$ .

Решение. Выполняем умножение, последовательно присоединяя множители по одному. Получим

$$\begin{aligned} (-5) \cdot 4 &= -20; & (-20) \cdot (-3) &= 60; \\ 60 \cdot 2 &= 120; & 120 \cdot (-0,5) &= -60; & (-60) \cdot (-3) &= 180. \end{aligned}$$

Итак,

$$(-5) \cdot 4 \cdot (-3) \cdot 2 \cdot (-0,5) \cdot (-3) = 180.$$

*Ответ.* 180.

На каждом шагу приведенного вычисления мы умножаем абсолютную величину предшествующего результата на абсолютную величину присоединенного множителя. Поэтому абсолютная величина произведения нескольких чисел равна произведению абсолютных величин сомножителей.

Далее, на каждом шагу знак результата совпадает со знаком предшествующего результата, если присоединяется положительный множитель, и знак последующего результата противоположен знаку предшествующего, если присоединяется отрицательный множитель. Поэтому *произведение нескольких чисел положительно, если все сомножители положительны или если число отрицательных сомножителей четно. Если же число отрицательных сомножителей нечетно, то произведение отрицательно*.

Таким образом, мы пришли к следующему правилу умножения нескольких чисел:

**Правило.** Чтобы перемножить несколько чисел, нужно перемножить их абсолютные величины и взять результат со знаком  $+$ , если число отрицательных сомножителей четно, или со знаком  $-$ , если число отрицательных сомножителей нечетно.

Заметим, что если хотя бы один из сомножителей равен нулю, то и произведение равно нулю.

Из правила умножения нескольких сомножителей вытекает следующее правило для возведения отрицательных чисел в степени:

**Правило.** При возведении отрицательного числа в степень с четным показателем результат положителен. При возведении отрицательного числа в степень с нечетным показателем результат отрицателен. Абсолютная величина степени равна степени абсолютной величины основания с тем же показателем. Например,

$$(-2)^5 = -32; (-3)^4 = 81; \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}.$$

Действительно, степень отрицательного числа есть произведение равных ему сомножителей, число которых равно показателю степени. Если показатель степени есть четное число, то результат положителен, если показатель степени есть нечетное число, то результат отрицателен. Абсолютная величина степени равна произведению сомножителей, каждый из которых равен абсолютной величине основания, т. е. равна степени абсолютной величины основания с тем же показателем.

Отметим одно важное следствие: *степень с четным показателем любого рационального числа не отрицательна*. Это можно записать так: при любом  $a$  и при любом натуральном числе  $n$

$$a^{2n} \geq 0.$$

Действительно, любая степень положительного числа есть положительное число, любая степень числа 0 равна 0, и, наконец, степень с четным показателем отрицательного числа есть число положительное.

В частности, *не существует числа, квадрат которого был бы равен отрицательному числу*.

### Упражнения

1. Вычислить  $x^4 - y^3$  при  $x = -3, y = 2$ ;  $x = -3, y = -2$ ;  $x = 3, y = -2$ ;  $x = 3, y = 2$ .

2. Вычислить  $x^3 - x$  при  $x = -2$ ;  $x = -1,5$ ;  $x = -1$ ;  $x = -\frac{1}{2}$ ;  $x = 0$ ;  $x = 0,5$ ;  $x = 1$ ;  $x = 1,5$ ;  $x = 2$ .

3. Какие значения принимает выражение  $(-1)^n$  при различных  $n$ ?

## § 15. Деление

Действие деления для любых рациональных чисел сохраняет тот же смысл, который имеет это действие в применении к числам положительным. Именно, деление есть действие, посредством которого по данному произведению двух сомножителей и одному из них нахо-

дится другой сомножитель. Названия «делимое», «делитель» и «частное» тоже понимаются в прежнем смысле. Таким образом, если делимое обозначить буквой  $b$ , делитель буквой  $a$ , то частное есть такое число  $x$ , что

$$ax = b.$$

Если  $a = 0$ , то и  $ax = 0$ . Следовательно, при  $b \neq 0$  равенство  $0 \cdot x = b$  невозможно, а при  $b = 0$  выполняется при любом значении  $x$ . Поэтому *делить на нуль нельзя*, так как это действие или невыполнимо, или не приводит к определенному результату (см. § 7 гл.1).

Рассмотрим подробнее уравнение  $ax = b$  в предположении, что  $a \neq 0$ .

По правилу умножения абсолютная величина числа  $b$  равна произведению абсолютных величин чисел  $a$  и  $x$ . Следовательно, абсолютная величина  $x$  равна частному от деления абсолютных величин чисел  $b$  и  $a$ . В частности, если  $b = 0$ , то  $x = 0$ .

Нам остается определить знак числа  $x$  в предположении, что  $b \neq 0$ . Здесь могут представиться 4 случая:

Случай 1. Числа  $a$  и  $b$  оба положительны. Тогда  $x$  тоже положителен.

Случай 2. Число  $a$  положительно,  $b$  отрицательно. Тогда  $x$  должен быть отрицательным числом.

Случай 3. Число  $a$  отрицательно,  $b$  положительно. Тогда  $x$  должен быть отрицательным числом.

Случай 4. Число  $a$  отрицательно,  $b$  отрицательно. Тогда  $x$  должен быть положительным числом.

Итак, *абсолютная величина частного от деления двух чисел равна частному от деления абсолютной величины делимого на абсолютную величину делителя. Частное положительно, если делимое и делитель имеют одинаковые знаки, частное отрицательно, если делимое и делитель имеют разные знаки. Частное равно нулю, если делимое равно нулю.* (Конечно, в этом правиле предполагается, что делитель отличен от нуля). Например,

$$\frac{-6}{-3} = 2; \quad \frac{25}{-5} = -5; \quad \frac{0}{-1} = 0; \quad \frac{4}{-5} = -\frac{4}{5}.$$

Подобно тому, как действие вычитания можно заменить действием сложения с числом, противоположным вычитаемому, действие деления можно заменить действием умножения на число, обратное делителю.

Это утверждение в применении к положительным числам известно из арифметики. В применении к любым рациональным числам оно нуждается в доказательстве. Итак, нам требуется доказать, что при любом  $a \neq 0$

$$\frac{b}{a} = b \cdot \frac{1}{a}.$$

Обозначим  $b \cdot \frac{1}{a} = x$ . Тогда

$$x \cdot a = b \cdot \frac{1}{a} \cdot a = b \cdot 1 = b.$$

Следовательно, по определению частного  $x$  есть частное от деления  $b$  на  $a$ , т. е.

$$b \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a},$$

что и требовалось доказать.

### Упражнения

Выполнить указанные действия:

$$1. \quad \frac{5-3}{3-7} - \frac{4-10}{(11-9)(5-7)}.$$

$$2. \quad \frac{(-3-5)^2 - (-3)^2 - (-6) \cdot (-5) - (-5)^2}{2-3+4-5+6}.$$

3. Составить таблицу значений выражения  $\frac{x}{1-x^2}$ , вычислив его при  $x = -3; -2; -\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}; -1, 1; -0,9; -0,5; 0; 0,5; 0,9; 1,1; \frac{5}{4}; \frac{3}{2}; 3$ .

## § 16. Истолкование отрицательного ответа при решении задач

При алгебраическом решении задач (особенно в случае, если задача формулируется в общем виде, а лишь затем даются численные данные для исходных величин) часто получается отрицательный результат, который иногда не имеет смысла при буквальном понимании вопроса, поставленного в задаче.

Например, если на вопрос «через сколько лет...» получается ответ «—5», то этот ответ при буквальном понимании вопроса смысла не имеет. Действительно, фраза «через минус пять лет...» бессмысленна. Однако тот же ответ становится осмысленным, если его истолковать как «пять лет назад...».

Таким образом, имеет место следующее правило истолкования отрицательного ответа при решении задачи. Если отрицательный ответ на вопрос, поставленный в задаче, не имеет смысла при буквальном понимании вопроса, то иногда этот ответ получает смысл, если его абсолютную величину принять за ответ на вопрос, противоположный по смыслу вопросу, который поставлен в задаче.

Конечно, это правило не является всеобщим. Во-первых, часто бывает, что отрицательный ответ имеет смысл и при буквальном понимании вопроса. Например, ответ «—5°» на вопрос «какова температу-

ра?» имеет смысл без всякого условного истолкования. Часто бывает так, что и условное истолкование отрицательного ответа невозможно по смыслу задачи. Например, ответ «— 5» на вопрос «сколько человек находилось в комнате?» лишен всякого смысла.

### § 17. Графическое изображение зависимости между двумя переменными величинами

От геометрического изображения чисел в виде точек на числовой оси легко перейти к геометрическому изображению зависимости между двумя переменными величинами, применяя тот же прием, который применяется в курсе арифметики при построении диаграмм.

Рассмотрим один пример для того, чтобы напомнить это построение.

Пример. Температура воздуха измерялась в течение суток через каждые два часа. Результаты измерения сведены в следующую таблицу:

| Время измерения  | 0 ч. | 2 ч. | 4 ч. | 6 ч. | 8 ч. | 10 ч. | 12 ч. | 14 ч. | 16 ч. | 18 ч. | 20 ч. | 22 ч. | 24 ч. |
|------------------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Температура в °С | 5    | 3    | 1    | 4    | 7    | 10    | 13    | 15    | 14    | 13    | 11    | 7     | 4     |

Построить диаграмму изменения температуры в течение суток.

Решение. Делается это следующим образом. На прямой линии, которую мы расположим горизонтально (рис. 11), строятся на одинаковых расстояниях точки, изображающие моменты времени измерений.

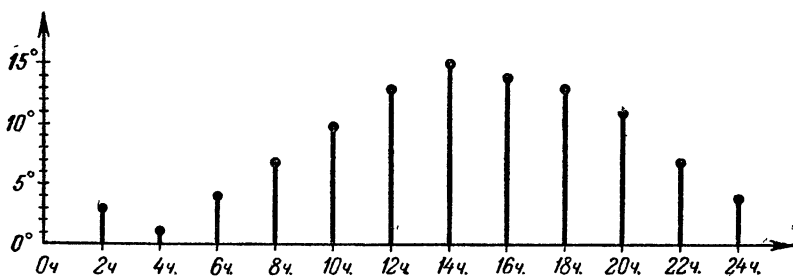


Рис. 11.

Таким образом, отрезки между этими точками изображают промежутки времени между двумя измерениями. На рис. 11 на горизонтальной оси нанесены деления, соответствующие двухчасовому промежутку времени.

От каждой из точек, изображающих моменты измерения, строится вверх перпендикуляр, длина которого в выбранном масштабе равна числу градусов температуры. Мы получаем чертеж, состоящий из ряда отрезков, длины которых наглядно показывают величину температуры

в момент измерения. Этот чертеж и есть диаграмма, изображающая изменение температуры в зависимости от времени. Для сравнения длин отрезков с масштабом мы на перпендикуляре к оси, проведенном через точку, соответствующую нулю, нанесем деления, соответствующие градусам в выбранном масштабе.

Пример. Пусть температура в течение суток изменялась согласно следующей таблице:

| Время измерения  | 0 ч. | 2 ч. | 4 ч. | 6 ч. | 8 ч. | 10 ч. | 12 ч. | 14 ч. | 16 ч. | 18 ч. | 20 ч. | 22 ч. | 24 ч. |
|------------------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Температура в °C | -5   | -5   | -7   | -6   | -4   | -2    | 0     | +2    | +3    | +4    | +3    | +3    | +2    |

Как построить диаграмму в этом случае?

Решение. Очевидно, что отрезки, изображающие отрицательную температуру, следует строить не вверх, а вниз, откладывая на перпен-

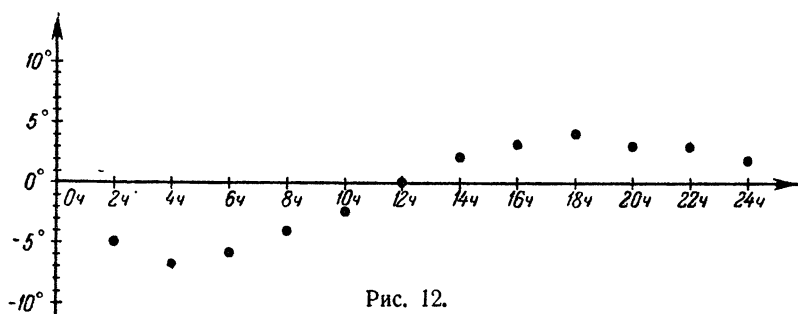


Рис. 12.

дикулярах абсолютные величины числа градусов температуры. Диаграмма для рассматриваемой таблицы приведена на рис. 12, где точками изображены концы отрезков, соответствующих температуре.

Таким образом, при помощи диаграммы можно изобразить зависимость между величинами, принимающими как положительные, так и отрицательные значения. Диаграмма не теряет наглядности, если отбросить перпендикулярные отрезки, сохранив только их концы.

Представим теперь себе, что мы измеряем температуру не каждые два часа, а каждый час. При геометрическом изображении результатов этих измерений на чертеже появятся новые точки, расставленные между прежними. Если же производить измерения каждую минуту, точек будет настолько много, что различать их придется в сильную лупу — они будут отстоять друг от друга на  $\frac{1}{12}$  миллиметра.

Если же представить себе, что измерение производится непрерывно, то точки диаграммы сольются в одну, более или менее плавную, линию. Эта линия носит название *графика зависимости темпера-*



туры от времени. Так называемый самопишущий термометр (термограф) чертит именно график температуры.

Прибор этот (в схематическом описании) состоит из вертикально расположенного барабана, который медленно вращается под действием часового механизма. На барабан накручивается разграфленный лист бумаги. К этому листу прикасается перо, которое под влиянием температуры поднимается и опускается, подобно уровню жидкости в трубке термометра. Таким образом, в каждый момент времени перо стоит на высоте, соответствующей температуре в этот момент. При вращении барабана с течением времени перо чертит на бумаге линию, которая и представляет собой график температуры.

Подобно тому, как строится график зависимости температуры от времени, строятся графики, изображающие зависимость между двумя любыми переменными величинами, если значение второй переменной определяется, как только известно значение первой. Для этого на плоскости берутся две взаимно перпендикулярные оси (рис. 13). Точка их пересечения принимается за начало отсчета на обеих осях. На одной из осей изображается значение первой переменной. В каждой из построенных точек проводится прямая, параллельная второй оси, и на этой прямой откладывается отрезок, длина (в своем масштабе) которого равна абсолютной величине соответствующего значения второй переменной; отрезок откладывается в направлении, совпадающем с направлением второй оси или в противоположном в зависимости от знака значения второй переменной.

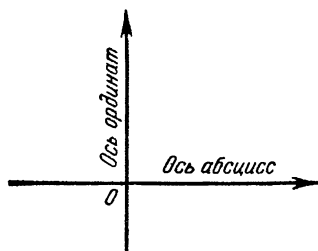


Рис. 13.

Вторые концы этих отрезков и отмечаются на чертеже. Сами отрезки лучше не строить, так как это усложняет чертеж. В этом и нет необходимости, если бумага разграфлена на достаточно малые клетки.

Чем чаще брать значения первой переменной, тем чаще расположатся точки на чертеже.

Построенные точки соединяются линией, вообще говоря, искривленной. При соединении надо следить за тем, чтобы линия была по возможности плавной.

Построенная таким образом линия называется *графиком зависимости*.

Оси, по отношению к которым строится график, носят название осей *координат*. Одна из осей называется осью *абсцисс*, другая — осью *ординат*. Ось абсцисс обычно располагают горизонтально и направляют слева направо. За направление оси ординат обычно принимается направление снизу вверх. Алгебраические величины отрезков, откладываемых параллельно осям координат при построении точки, называются координатами точки. Одна из координат называется

абсциссой, другая ординатой в соответствии с названиями осей. Точка пересечения осей называется началом координат.

Особенно интересным и важным для практического применения является построение графика зависимости, заданной при помощи уравнения, связывающего значения переменных друг с другом.

Для того чтобы построить график такой зависимости, нужно предварительно построить таблицу соответствующих значений переменных. Для этого нужно произвольно задать ряд значений для одной из переменных и вычислить на основании уравнения соответствующие значения второй переменной.

Составив таблицу, можно приступать к построению графика. Если при этом окажется, что точек построено мало, так что остается еще неясным, как их следует соединять, нужно дополнить таблицу новыми значениями. Для построения графиков особенно удобна миллиметровая бумага, которая разграфлена на квадратики со стороной в 1 мм.

Рассмотрим несколько примеров на построение графиков зависимостей.

**Пример 1.** Зависимость между числами  $x$  и  $y$  задана посредством уравнения  $y = \frac{x}{2} + 1$ . Построить график этой зависимости, принимая за единицу масштаба на обеих осях один и тот же отрезок.

**Решение.** Прежде всего вычисляем таблицу:

|     |    |      |    |     |   |     |   |     |   |
|-----|----|------|----|-----|---|-----|---|-----|---|
| $x$ | —4 | —3   | —2 | —1  | 0 | 1   | 2 | 3   | 4 |
| $y$ | —1 | —0,5 | 0  | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 |

Теперь строим график (рис. 14). От точки оси абсцисс с абсциссой —4 откладываем вниз отрезок длиной в 1 единицу масштаба и отмечаем его конец. От точки на оси абсцисс с абсциссой —3 откладываем вниз отрезок длины  $\frac{1}{2}$  и отмечаем конец; затем отмечаем точку на оси абсцисс с абсциссой —2; от точки с абсциссой —1 откладываем отрезок длины  $\frac{1}{2}$  вверх и т. д.

Построенный ряд точек укладывается на одну прямую линию, и мы смело соединяем их этой прямой. Таким образом, графиком зависимости  $y = \frac{x}{2} + 1$  является прямая линия.

Мы сделали это заключение на основании вычисления всего лишь девяти точек. Однако мы не ошиблись. Так, измерив длину отрезка, соответствующего значению  $x = 0,5$ , мы видим из чертежа, что эта длина находится между 1,2 и 1,3. Более определенно высказаться нам не позволяет точность построения. В действительности, если  $x = 0,5$ , то  $y = 1,25$ . Таким образом, в пределах точности чертежа

мы получили правильный результат. Точно так же при  $x=6$  мы из чертежа читаем, что  $y$  приблизительно равно 4. В действительности, при  $x=6$ ,  $y=4$  точно.

Таким образом, вычислив несколько значений, мы получили правильное представление о зависимости между переменными  $x$  и  $y$ .

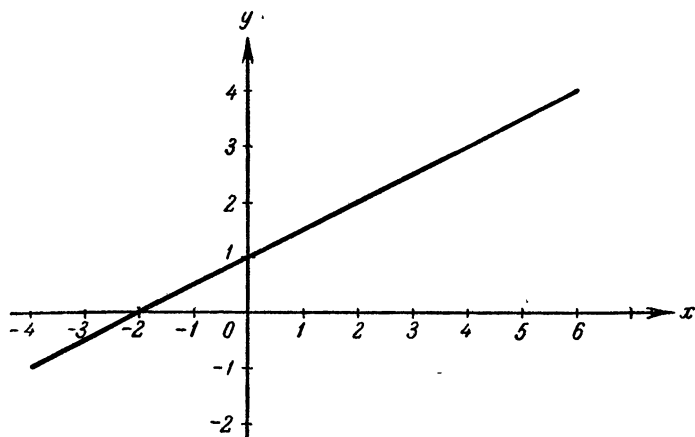


Рис. 14.

**Пример 2.** Дано уравнение  $y=x^2$ . Построить график, выражающий зависимость между числами  $x$  и  $y$ .

**Решение.** Примем за единицу масштаба по обеим осям 1 см. Строим таблицу

|     |    |    |    |   |   |   |   |
|-----|----|----|----|---|---|---|---|
| $x$ | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $y$ | 9  | 4  | 1  | 0 | 1 | 4 | 9 |

Мы не берем значения  $x$  больше 3 по абсолютной величине, так как значения  $y$  очень быстро растут, и мы были бы не в состоянии поместить график на чертеже в выбранном масштабе.

Построив точки, соответствующие этой таблице, мы можем подумать, что две ветви графика сходятся в начале координат под углом. На всякий случай дополняем таблицу еще двумя промежуточными значениями  $x=0,5$  и  $x=-0,5$ :

|     |      |      |
|-----|------|------|
| $x$ | -0,5 | 0,5  |
| $y$ | 0,25 | 0,25 |

Построив соответствующие точки, мы видим, что в действительности график около начала координат плавно закругляется. Теперь

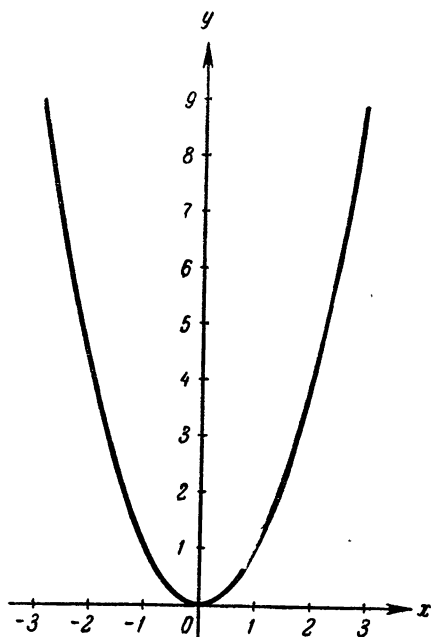


Рис. 15.

мы можем соединить точки. Линия, изображающая зависимость  $y = x^2$ , называется параболой (рис. 15).

**Пример 3.** Сумма длин двух сторон прямоугольника, сходящихся в одной вершине, равна 10 см. Построить график зависимости площади этого прямоугольника от длины одной из его сторон.

**Решение.** Обозначим буквой  $x$  длину одной из сторон. Тогда длина другой стороны будет равна  $10 - x$ . Площадь  $y$ , очевидно, равна  $x(10 - x)$ . Таким образом, нам нужно построить график зависимости  $y = x(10 - x)$ . При этом, по смыслу задачи,  $x$  есть положительное число, не большее 10.

Вычислим таблицу, придавая  $x$  целые значения от 0 до 10, включая и крайние значения, хотя они и не имеют геометрического смысла в данной задаче:

| $x$ | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9 | 10 |
|-----|---|---|----|----|----|----|----|----|----|---|----|
| $y$ | 0 | 9 | 16 | 21 | 24 | 25 | 24 | 21 | 16 | 9 | 0  |

После вычисления мы видим, что для того чтобы график поместился на чертеже, следует, выбрав единицу масштаба по оси абсцисс, принять за единицу масштаба по оси ординат меньший отрезок. Мы примем за единицу по оси ординат отрезок, в 5 раз меньший, чем единица по оси абсцисс (рис. 16).

Что мы можем прочесть из этого графика?

Во-первых, мы видим, что наибольшая площадь прямоугольников равна  $25 \text{ см}^2$ , и она получается при  $x = 5 \text{ см}$ , т. е. когда прямоугольник превращается в квадрат, сторона которого равна 5 см.

Во-вторых, мы видим, что ветви графика опускаются к оси абсцисс при приближении к краям. Это значит, что если сторона прямоугольника очень мала или очень близка к 10 (тогда вторая сторона очень мала), то и площадь будет очень малой.

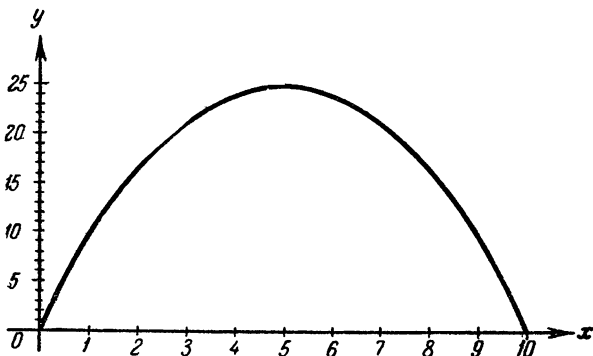


Рис. 16.

Поставим следующий вопрос. Как нужно выбрать сторону прямоугольника, чтобы его площадь равнялась  $12 \text{ см}^2$ ? Алгебраическое решение этой задачи сводится к решению относительно буквы  $x$  уравнения  $x(10 - x) = 12$ . Такого рода уравнения мы решать еще не умеем. Однако из графика мы можем, хотя бы приближенно, определить  $x$ . Именно,  $x$  приближенно равно 1,4 или 8,6. В первом случае вторая сторона приближенно равна 8,6, во втором 1,4. Таким образом, прямоугольник со сторонами 1,4 и 8,6 приближенно удовлетворяет условию. Действительно,  $1,4 \cdot 8,6 = 12,04$ .

На основании рассмотренных примеров мы можем сделать следующие выводы:

Во-первых, график является очень наглядным изображением зависимости. После построения графика формула «оживает», настолько ясным становится ход изменения одной переменной в зависимости от изменения другой.

Во-вторых, график дает средство для приближенного решения задач, точное решение которых затруднительно.

### Упражнения

1. На рис. 17 изображен график температуры. Прочитать по графику, какая температура была в 13 часов? в  $17\frac{1}{2}$  часов? в 2 часа?

2. По графику на рис. 17 прочитать, в котором часу температура была равна  $5^\circ$ ? В котором часу температура была равна  $0^\circ$ ? В котором часу температура была равна  $-2^\circ$ ? В котором часу температура была наибольшей? В котором часу наименьшей?

3. На аэростате были подняты два самопишущих прибора. Один из них записывал температуру, а другой высоту аэростата над поверхностью земли. Полученные графики изображены на рис. 18.

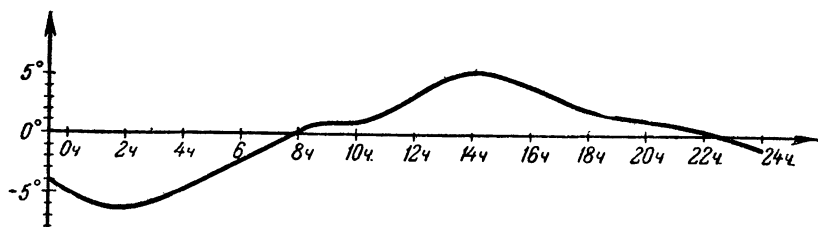


Рис. 17.

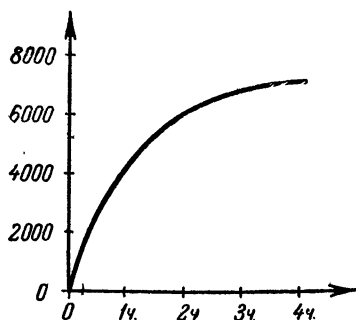
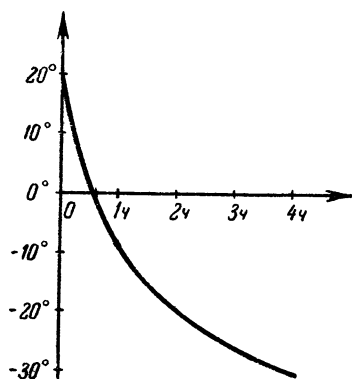


Рис. 18.

Какая температура воздуха была на высоте в 1000 м? На высоте в 2000 м? На высоте в 3000 м? На высоте в 4000 м? На высоте в 5000 м? Построить график зависимости температуры от высоты.

---

## ГЛАВА III

### ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЦЕЛЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

#### § 1. Цель алгебраических преобразований

При решении задач с помощью алгебры обычно приходится производить арифметические действия над алгебраическими выражениями. Причем непосредственно записанный результат получается в виде нового и часто более сложного выражения.

Пусть, например, требуется к сумме двух чисел  $a$  и  $b$  прибавить их разность. Записывая указанные действия, мы получим результат в таком виде:

$$(a + b) + (a - b).$$

Однако это выражение можно упростить, если воспользоваться свойствами сложения. Именно, в силу сочетательного и переместительного законов сложения, результат преобразуется так:

$$\begin{aligned}(a + b) + (a - b) &= a + b + a - b = a + a + b - b = \\ &= (a + a) + (b - b) = 2a.\end{aligned}$$

Выражения  $(a + b) + (a - b)$  и  $2a$  равны тождественно, т. е. равенство между ними справедливо при всех значениях букв  $a$  и  $b$ . Переход от одного алгебраического выражения к другому, тождественно равному ему, называется *тождественным преобразованием*.

Такого рода преобразования, которые большею частью ведут к упрощению записи результата, почти всегда возможны при действиях над алгебраическими выражениями. Настоящая глава содержит описание приемов, применяемых при таких преобразованиях. Этому же вопросу посвящены и две следующие главы.

#### § 2. Типы алгебраических выражений

**Определение.** Алгебраические выражения, представляющие собой запись арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень), производимых над числами и буквами, называются *рациональными алгебраическими выражениями*.

Рациональное выражение называется *целым*, если среди указанных в нем действий нет действия деления на выражение, содержащее буквы. Если же такое действие имеется, то выражение называется *дробным*. Так, выражения

$$(3a + b)^2 - 7abc, \quad \frac{1}{4}xy - \left(0,33c - \frac{1}{7}d\right)^5,$$

$$\frac{(a + b)(a - 2b)^2 + \left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{4}b\right)(7a + 9b)}{43 - 35}$$

являются *целыми*. В последнем примере указано действие деления, но выражение  $43 - 35$ , на которое нужно делить, не содержит букв.

В то же время выражения

$$\frac{a + b}{a - b}, \quad (a : b) - c, \quad \frac{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}}{\frac{a}{b} + \frac{c}{d}}, \quad a^3 : a^5$$

являются выражениями *дробными*.

Заметим, что дробное алгебраическое выражение может равняться целому. Так,  $a^3 : a^3 = a$ . Поэтому рациональные выражения разделяют на целые и дробные в том виде, в котором они заданы непосредственно, до всяких преобразований.

В этой главе мы будем заниматься преобразованием только целых выражений. Среди целых выражений особенно простыми являются так называемые *одночлены*.

*Одночленами* называются произведения, составленные из числового множителя (коэффициента) и одной или нескольких букв, каждая из которых взята в некоторой степени.

Числа, выраженные цифрами (т. е. не обозначенные буквами), также причисляются к одночленам. Коэффициенты в одночленах могут быть целыми и дробными, положительными и отрицательными. При записи одночлена принято писать коэффициент впереди множителей, выраженных буквами. Например,

$$5a^3bc, \quad -3ab^2x, \quad \frac{7}{3}y^2, \quad a, \quad 7,3$$

представляют собой одночлены.

Алгебраическая сумма нескольких одночленов называется *многочленом*. Например,

$$a^2 - 2ab + bc - 3c + 5$$

есть многочлен.

Одночлены, входящие в многочлен, называются его *членами*. Говорят, что многочлен составлен из своих членов. Так, многочлен  $a^2 - 2ab + bc - 3c + 5$  составлен из одночленов  $a^2$ ,  $-2ab$ ,  $bc$ ,  $-3c$  и  $5$ .



Одночлены целесообразно рассматривать как частный случай многочленов, именно как многочлены, составленные только из одного члена. Многочлены, составленные из двух членов, называются двучленами, из трех членов — трехчленами.

Отметим следующие свойства одночленов и многочленов.

*Одночлен не изменяется, если переставить местами множители, из которых он составлен.* Например,

$$5a^3bc = 5bca^3 = 5ca^3b \text{ и т. д.}$$

Это свойство одночлена непосредственно следует из переместительного закона умножения.

*Многочлен не изменяется, если как угодно изменить порядок его слагаемых.* Например,

$$\begin{aligned} a^3 - 2ab + bc - 3c + 5 &= -2ab + 5 - 3c + a^3 + bc = \\ &= bc + a^3 + 5 - 2ab - 3c \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Справедливость этого свойства следует из переместительного закона сложения.

### Упражнения

Указать, какие из следующих алгебраических выражений являются целыми и какие дробными:

$$1. 3ax^2 - 6bxy. \quad 2. \frac{2}{3}xy^2 - 7xy. \quad 3. \frac{x+y}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}. \quad 4. \frac{x}{y}.$$

$$5. (x+y):(x-y). \quad 6. \frac{x^2 - y^2}{x - y}. \quad 7. a^7 : a^3.$$

### § 3. Приведение подобных членов

Рассмотрим многочлен  $5ab - 3ab + 4ab - c$ . Его можно упростить, так как члены  $5ab$ ,  $-3ab$  и  $4ab$  отличаются друг от друга только численными коэффициентами. Такие члены можно соединить в один. Действительно, на основании распределительного закона

$$5ab - 3ab + 4ab = (5 - 3 + 4)ab = 6ab$$

и, следовательно,

$$5ab - 3ab + 4ab - c = 6ab - c.$$

Члены многочлена, равные или отличающиеся только коэффициентами, называются *подобными*. Так, члены  $5ab$ ,  $-3ab$  и  $4ab$  подобны.

Если многочлен содержит подобные члены, то его можно упростить по следующему правилу: *если многочлен содержит несколько*

подобных членов, то их можно соединить в один, подобный каждому из них, приняв за его коэффициент алгебраическую сумму коэффициентов соединяемых членов. Упрощение многочленов по этому правилу называется *приведением подобных членов*.

Пример. Привести подобные члены в многочлене

$$\underline{5ab} - \underline{4a} - \underline{2ab} + \underline{6a} + \underline{\frac{1}{2}ab} - \underline{\frac{3}{2}ab} + c.$$

Решение. В этом примере имеются две группы подобных членов:  $\underline{5ab}$ ,  $\underline{-2ab}$ ,  $\underline{\frac{1}{2}ab}$  и  $\underline{-\frac{3}{2}ab}$  (подчеркнутые один раз) и  $\underline{-4a}$ ,  $\underline{6a}$  (подчеркнутые дважды). Члены первой группы объединяются в

$$(5 - 2 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}) ab = 2ab,$$

члены второй группы в  $(-4 + 6)a = 2a$ . Итак,

$$\underline{5ab} - \underline{4a} - \underline{2ab} + \underline{6a} + \underline{\frac{1}{2}ab} - \underline{\frac{3}{2}ab} + c = 2ab + 2a + c.$$

Правило приведения подобных членов основывается на следующих соображениях. Прежде всего можно на основании переместительного закона расположить члены многочлена так, чтобы все подобные члены оказались рядом. Затем на основании сочетательного закона можно произвести сложение в каждой группе подобных членов. На основании распределительного закона сложение подобных членов сводится к сложению их коэффициентов.

Если многочлен содержит два одночлена, отличающиеся только знаком, то их можно вычеркнуть. Действительно, такие два члена при сложении взаимно уничтожаются, т. е. дают в сумме нуль. Например,

$$2a^2 - \underline{3ab} - b^2 + \underline{3ab} = 2a^2 - b^2.$$

### Упражнения

Привести подобные члены в многочленах:

1.  $x^3 - 4xy + 3a^2 + 8xy - 5a^2$ .
2.  $-0,1x^2 + 0,37a^2 + 4,41ax - 1,14a^2 + 0,93x^2$ .
3.  $5a^2 - 8xy + 10ax + 8xy - 16ax + 6ax$ .

## § 4. Сложение и вычитание многочленов

Правило. Для того чтобы сложить два или несколько многочленов, нужно сложить все одночлены, из которых эти многочлены составлены.

Затем для упрощения результата следует привести подобные члены.

**Пример.**  $(3a + a^2b - ac^2) + (3ac^2 - a^2b + 3a) = 3a + a^2b - ac^2 + 3ac^2 - a^2b + 3a = 6a + 2ac^2$ .

Правило сложения многочленов непосредственно следует из сочетательного закона сложения.

**Правило.** Для того чтобы вычесть многочлен из многочлена, нужно к членам уменьшаемого прибавить члены вычитаемого, взятые с противоположными знаками.

Здесь тоже следует привести подобные члены для упрощения результата.

**Пример.**  $(3a + a^2b - ac^2) - (3ac^2 - a^2b + 3a) = 3a + a^2b - ac^2 - 3ac^2 + a^2b - 3a = 2a^2b - 4ac^2$ .

Правило вычитания многочленов нуждается в некотором пояснении. Мы знаем, что вычесть какое-нибудь число все равно, что прибавить противоположное. Легко видеть, что если некоторое число выражено в виде многочлена, то противоположное ему число равно многочлену, составленному из тех же членов, но взятых с противоположными знаками. Например,

$$-(3ac^2 - a^2b + 3a) = -3ac^2 + a^2b - 3a.$$

Действительно, два таких многочлена при сложении дают в сумме нуль, так как их члены взаимно уничтожаются:

$$(3ac^2 - a^2b + 3a) + (-3ac^2 + a^2b - 3a) = \\ = 3ac^2 - a^2b + 3a - 3ac^2 + a^2b - 3a = 0.$$

Итак, вычесть какой-нибудь многочлен, действительно, все равно, что прибавить многочлен, составленный из тех же членов, но с противоположными знаками.

После того как правила приведения подобных членов, сложения и вычитания многочленов уже освоены, при сложении и вычитании многочленов нет необходимости выписывать промежуточные результаты. Следует сразу писать ответ, осуществляя раскрытие скобок и приведение подобных членов в уме. Например,

$$(\underline{2x^3} - \underline{3x^2} + \underline{6x} + \underline{5}) - (\underline{x^3} + \underline{5x^2} - \underline{6x} + \underline{9}) + (\underline{-x^3} - \underline{4x^2} + \underline{x} + \underline{1}) = \\ = -12x^2 + 13x - 3.$$

При этом нужно аккуратно учитывать знаки коэффициентов. Коэффициенты одночленов, взятых из скобок, перед которыми стоит знак  $+$ , нужно брать без изменения, коэффициенты одночленов, взятых из скобок, перед которыми стоит знак  $-$ , нужно брать с противоположными знаками.

### Упражнения

Выполнить сложение и вычитание многочленов:

1.  $(3x^2 - 4xy + 5y^2) - (7x^2 - 8xy + 13y^2) + (x^2 - xy + 3y^2)$ .

2.  $-(ab - 4a^2 + 3b^2) + (a^2 - 4ba - 3b^2)$ .

3.  $1 - (1 + x) + (1 + x + x^2) - (1 + x + x^2 + x^2) + (1 + x + x^2 + x^2 + x^2)$ .

Решить уравнения относительно буквы  $x$ :

$$4. x + (a^3 - 3ab + b^3) = 2a^3 - ab - b^3.$$

$$5. x - (ab - b^3 + a^3) = 2ab.$$

$$6. (3ab^3 + 3a^2b + a^3) - x = a^3 - b^3.$$

### § 5. Умножение степеней одной буквы и возведение степени в степень

Пример. Умножить  $a^5$  на  $a^3$ .

Решение.  $a^5$  есть произведение пяти множителей, каждый из которых равен  $a$ . Далее,  $a^3$  есть произведение трех множителей, равных  $a$ . Следовательно,  $a^5 \cdot a^3$  есть произведение восьми множителей, равных  $a$ , т. е.

$$a^5 \cdot a^3 = a^8.$$

Также можно рассуждать при любых показателях степени, и мы приходим к следующему правилу.

Правило. *Произведение степеней с одинаковыми основаниями равно степени с тем же основанием и с показателем, равным сумме показателей.*

Короче: *при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются.* Это правило записывается в виде следующей формулы:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Правило применимо не только к преобразованию произведения двух множителей, являющихся степенями одной буквы, но и к преобразованию произведения любого числа множителей этого вида. Например,

$$a^3 \cdot a^2 \cdot a^7 = a^{3+2+7} = a^{12}.$$

Обратимся теперь к возведению степени в степень.

Пример. Возвести  $a^4$  в куб.

Решение.  $(a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4 = a^{4+4+4} = a^{12} = a^{4 \cdot 3}$ .

Правило. *Результат возведения степени в степень равен степени с тем же основанием и с показателем, равным произведению показателей, участвующих в действии.*

Короче: *при возведении степени в степень показатели перемножаются.* Правило записывается следующей формулой:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

### Упражнения

Произвести указанные действия:

$$1. a^7 \cdot a^{12}. \quad 2. a^5 \cdot a^4 \cdot a^5 \cdot a^6. \quad 3. (x^3)^5. \quad 4. [(c^4)^3]^2.$$

$$5. (a-b)^3 \cdot (a-b)^4. \quad 6. [(x^2+y^2)^3]^2.$$

Решить следующие уравнения относительно буквы  $x$ :

$$7. x : b^3 = b^5. \quad 8. x \cdot b^3 = b^5. \quad 9. b^7 : x = b^5.$$

## § 6. Умножение одночленов

Пример. Перемножить одночлены  $\frac{4}{9}a^3b^3c$  и  $\frac{3}{2}a^2c^3$ .

Решение.  $\frac{4}{9}a^3b^3c \cdot \frac{3}{2}a^2c^3 = \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} \cdot a^3 \cdot a^2 \cdot b^3 \cdot c \cdot c^3 = \frac{2}{3}a^5b^3c^3$ .

Мы решили пример следующим образом. Сначала на основании переместительного закона умножения мы изменили порядок множителей так, что коэффициенты оказались рядом и степени одинаковых букв оказались рядом. После этого на основании сочетательного закона умножили коэффициенты и умножили степени с одинаковыми основаниями.

Таким же образом мы можем выполнить умножение любых одночленов.

**Правило.** Чтобы перемножить два (или больше) одночлена, нужно перемножить их коэффициенты и затем приписать каждую букву, входящую в умножаемые одночлены, с показателем, равным сумме показателей, с которыми эта буква входит в одночлены. Если какая-либо буква входит только в один одночлен, переписать ее с тем же показателем.

### Упражнения

Перемножить одночлены:

1.  $5x^2yz$  и  $7xy^3$ .

2.  $-\frac{3}{4}xy^2$  и  $-\frac{8}{9}x^2y$ .

3.  $(0,1abc) \cdot (-100a^3bc) \cdot (-1,3b)$ .

Решить уравнения относительно  $x$ :

4.  $x : (-3abc) = 21a^3$ .

5.  $x \cdot (-7ab) = 63ab^2c$ .

6.  $72a^3bc^3 : x = 9abc$ .

## § 7. Возведение одночлена в степень

Пример.  $(abc)^4$ .

Решение.  $(abc)^4 = abc \cdot abc \cdot abc \cdot abc = a^4b^4c^4$ .

Так же производится возведение в степень с любым показателем произведения, составленного из любого числа множителей.

Именно, степень произведения нескольких чисел равна произведению степеней множителей с тем же показателем.

Это правило легко применяется к возведению в степень любого одночлена.

Пример.  $(2a^3bc)^3 = 2^3 \cdot (a^3)^3 \cdot b^3 \cdot c^3 = 8a^9b^3c^3$ .

Конечно, при возведении одночлена в степень нет необходимости записывать промежуточный результат. Следует сразу писать ответ.

Пример.  $\left(-\frac{1}{3}ab^2x\right)^3 = -\frac{1}{27}a^3b^6x^3$ .

## Упражнения

Возвести в степени:

$$1. (2a^3bc)^4. \quad 2. (-ab^2c)^5. \quad 3. \left(\frac{2}{3}xy^2\right)^3. \quad 4. (-0,3a^3xy^2)^4.$$

## § 8. Умножение многочлена на одночлен

Пример. Произвести умножение

$$(2x^2y - 3xy^2 + y^3) \cdot (-2xy^2).$$

Решение. Здесь нужно умножить сумму чисел  $2x^2y$ ,  $-3xy^2$  и  $y^3$  на число  $-2xy^2$ . Согласно распределительному закону умножения, нужно каждое слагаемое умножить на это число и сложить результаты. Итак,

$$\begin{aligned} (2x^2y - 3xy^2 + y^3) \cdot (-2xy^2) &= \\ &= 2x^2y \cdot (-2xy^2) + (-3xy^2) \cdot (-2xy^2) + y^3 \cdot (-2xy^2) = \\ &= -4x^3y^3 + 6x^2y^4 - 2xy^5. \end{aligned}$$

Точно таким же образом можно поступать всегда при умножении многочлена на одночлен. Мы пришли к следующему правилу.

*Для того чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и результаты сложить.*

Конечно, после некоторой тренировки нет необходимости записывать промежуточный результат. Следует писать ответ сразу, выполняя умножение одночленов в уме.

Пример.

$$(-3xy + 2x^2 - 3y^2) \cdot \left(-\frac{1}{2}xy\right) = \frac{3}{2}x^2y^2 - x^3y + \frac{3}{2}xy^3.$$

Замечание. Если многочлен не содержит подобных членов, то и при умножении его на любой одночлен получится многочлен, не содержащий подобных членов. Таким образом, при умножении многочлена на одночлен приведение подобных членов в результате умножения невозможно, если только его нельзя было сделать еще до умножения.

## Упражнения

Умножить многочлен на одночлен:

$$1. \left(-\frac{1}{3}xy + 2x^2\right) \cdot (-3x). \quad 2. (a^2 - ab + 2b^2) \cdot (-2ab).$$

Решить следующие уравнения относительно буквы  $x$ :

$$3. x : (-3ab) = a^3 + b^3. \quad 5. x \cdot (a - 2b) = a^2 - 2ab.$$

$$4. (a^2 + ab) : x = a + b. \quad 6. 3ab \cdot x = 9a^2b - 6ab^2.$$

## § 9. Умножение многочлена на многочлен

**Пример.** Перемножить многочлены  $a + 2b$  и  $3a - 2b$ .

**Решение.** Всякий многочлен, в частности многочлен  $3a - 2b$ , выражает запись результата определенных действий над числами и в конце концов обозначает некоторое число. Поэтому при умножении суммы на это число можно пользоваться распределительным законом

$$(a + 2b)(3a - 2b) = a(3a - 2b) + 2b(3a - 2b).$$

Дальнейшие преобразования сводятся к знакомым для нас действиям — умножению многочлена на одночлен и сложению одночленов. Продолжая вычисления, получим

$$a(3a - 2b) + 2b(3a - 2b) = 3a^2 - 2ab + 6ab - 4b^2 = 3a^2 + 4ab - 4b^2.$$

Сделаем еще один пример, на этот раз не прерывая выкладки рассуждениями.

**Пример.**

$$\begin{aligned} (x^3y - 2xy^3 + y^3)(x + 3y) &= \\ &= x^3y(x + 3y) - 2xy^3(x + 3y) + y^3(x + 3y) = \\ &= x^3y + 3x^3y^2 - 2x^2y^3 - 6xy^3 + xy^3 + 3y^4 = x^3y + x^3y^2 - 5xy^3 + 3y^4. \end{aligned}$$

Мы приходим к следующему правилу:

**Правило 1.** Для того чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член первого множителя умножить на второй множитель и сложить получившиеся результаты.

Умножение членов первого многочлена на второй можно произвести сразу, и это действие сводится к умножению членов первого многочлена на все члены второго. Таким образом, мы приходим к следующему правилу.

**Правило 2.** Для того чтобы перемножить два многочлена, нужно каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго многочлена и результаты сложить.

Например:

$$(a + 4b^2)(3ab - b) = 3a^2b - ab + 12ab^3 - 4b^3.$$

Второе правило умножения многочленов сокращает запись по сравнению с первым. Рекомендуется, однако, сначала пользоваться первым правилом и переходить ко второму, когда первое правило уже освоено.

Правила умножения многочленов можно применять и к умножению равных многочленов, т. е. к возведению многочлена в квадрат. Например,

$$\begin{aligned} (2a + 3b)^2 &= (2a + 3b)(2a + 3b) = 4a^2 + 6ab + 6ab + 9b^2 = \\ &= 4a^2 + 12ab + 9b^2. \end{aligned}$$

## Упражнения

Выполнить умножение многочленов:

1.  $(x^2 + xy + y^2)(2x^2 - 3xy + 4y^2)$ .      2.  $(2a + b - c)(2a + b + c)$ .

3.  $\left(-\frac{4}{9}x^2 + \frac{2}{7}xy - \frac{9}{49}y^2\right)(14x + 9y)$ .      4.  $(x^2 + xy + y^2)^2$ .

## § 10. Умножение нескольких многочленов

Умножение нескольких многочленов следует производить постепенно, объединяя множители каким-либо способом по два.

Пример.

$$\begin{aligned}(a + b)(a + 2b)(a - 3b) &= [(a + b)(a + 2b)](a - 3b) = \\ &= (a^2 + ab + 2ab + 2b^2)(a - 3b) = (a^2 + 3ab + 2b^2)(a - 3b) = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3a^2b^2 - 9ab^2 + 2ab^2 - 6b^3 = a^3 - 7ab^2 - 6b^3.\end{aligned}$$

Расстановку квадратных скобок можно было, конечно, не делать, а сразу приступить к умножению первых двух множителей.

Пример.

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4).$$

Выполним умножение, объединив первый множитель со вторым, третий с четвертым:

$$\begin{aligned}(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) &= \\ &= (x^2 + 2x + x + 2)(x^2 + 4x + 3x + 12) = \\ &= (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = \\ &= x^4 + 7x^3 + 12x^2 + 3x^3 + 21x^2 + 36x + 2x^2 + 14x + 24 = \\ &= x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24.\end{aligned}$$

Можно сразу производить умножение нескольких многочленов, руководствуясь следующим правилом:

*Чтобы умножить несколько многочленов, нужно составить всеми возможными способами произведения членов, взятых по одному из всех перемножаемых многочленов, и сложить полученные результаты.*

Приведем один пример на это правило с подробной записью:

$$\begin{aligned}(a + b)(a + 2b)(a - 3b) &= \\ &= a \cdot a \cdot a + b \cdot a \cdot a + a \cdot 2b \cdot a + b \cdot 2b \cdot a + a \cdot a \cdot (-3b) + \\ &\quad + b \cdot a \cdot (-3b) + a \cdot 2b \cdot (-3b) + b \cdot 2b \cdot (-3b) = \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 - 3a^2b - 3ab^2 - 6ab^2 - 6b^3 = a^3 - 7ab^2 - 6b^3.\end{aligned}$$

Однако при пользовании этим правилом легко ошибиться, пропустив какую-нибудь комбинацию членов перемножаемых многочленов. Поэтому этим правилом следует пользоваться только в самых простых случаях, например при перемножении двучленов.



## Упражнения

Перемножить многочлены:

1.  $(x + 2y - z)(2x - y + 2)(x - z)$ . 2.  $(x - 2y)(x + 2y)(x^2 + 4y^2)$ .
3.  $(x + y + z)^2$ . 4.  $(a - b)(a + 2b)(a + b)(a - 3b)$ .

## § 11. Умножение многочленов, содержащих одну букву

Члены многочлена, содержащего одну букву, целесообразно располагать в порядке убывания показателей степеней, с которыми эта буква в него входит. При этом если многочлен содержит так называемый свободный член, т. е. слагаемое, не содержащее букв, то его следует поставить на последнем месте. Например, многочлен  $2a^4 - a^5 + 2 - 3a^3 + a^2$  после расположения его членов по убывающим степеням принимает вид

$$-a^5 + 2a^4 - 3a^3 + a^2 + 2.$$

Член многочлена, содержащий наибольшую степень буквы, называется *старшим членом многочлена*. Показатель степени в старшем члене называется *степенью многочлена*. Так, старший член многочлена  $2x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 4$  есть  $2x^4$ , и этот многочлен есть многочлен *четвертой степени*. Считается условно, что «многочлены», состоящие только из свободного члена, т. е. числа, выраженные цифрами, являются многочленами нулевой степени.

Очевидно, что при умножении многочлена, расположенного по убывающим степеням, на какой-либо одночлен, зависящий от той же буквы, получается в результате многочлен, также расположенный по убывающим степеням.

При умножении двух расположенных многочленов целесообразно подписывать результаты умножения отдельных членов одного многочлена на другой друг под другом, сдвигая начало записи так, чтобы подобные члены оказывались в одном столбце. В случае, если степени идут не подряд, следует оставлять между соответствующими одночленами пустые места, так как может оказаться, что, хотя в первой строке одночлен, содержащий некоторую степень буквы, отсутствует, в других строках появятся одночлены этой степени.

Пример.

$$\begin{array}{r} (a^4 + a^2 - a + 3)(a^3 - 3a^2 + 1) = \\ = a^7 + a^5 - a^4 + 3a^3 \\ - 3a^6 - 3a^4 + 3a^3 - 9a^2 \\ + a^4 + a^2 - a + 3 = \\ \hline = a^7 - 3a^6 + a^5 - 3a^4 + 6a^3 - 8a^2 - a + 3. \end{array}$$

При такой записи умножение многочленов становится похожим на умножение многозначных чисел.

Заметим, что из правила умножения многочленов следует, что старший член произведения двух многочленов равен произведению

старших членов множителей. Следовательно, степень произведения двух многочленов равна сумме степеней множителей. Так, при умножении многочлена пятой степени на многочлен третьей степени мы получим многочлен восьмой степени.

При умножении многочленов не очень высокой степени рекомендуется еще один способ, при котором результат можно писать сразу, без записи промежуточных результатов. При пользовании этим способом некоторые несложные вычисления приходится производить в уме.

Рассмотрим один пример с подробным объяснением порядка действий.

Пример.  $(x^3 + 3x^2 - x - 3)(x^2 + 5x - 4)$ .

Решение. Старший член произведения данных многочленов равен произведению их старших членов  $x^3 \cdot x^2 = x^5$ .

Далее, в произведение могут входить члены, содержащие  $x^4$ ,  $x^3$ ,  $x^2$ ,  $x$  и свободный член.

Члены, содержащие  $x^4$ , получаются по следующей схеме:

$$\underbrace{(x^3 + 3x^2 - x - 3)(x^2 + 5x - 4)}_{\text{члены, содержащие } x^4}$$

Здесь соединены скобками все те слагаемые данных многочленов, при умножении которых получаются члены, содержащие  $x^4$ . Следовательно, коэффициент  $x^4$  в произведении равен  $1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 8$ .

Члены, содержащие  $x^3$ , получаются так:

$$\underbrace{(x^3 + 3x^2 - x - 3)(x^2 + 5x - 4)}_{\text{члены, содержащие } x^3}$$

Следовательно, коэффициент при  $x^3$  равен  $1 \cdot (-4) + 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 = 10$ .

Коэффициент при  $x^2$  в произведении

$$\underbrace{(x^3 + 3x^2 - x - 3)(x^2 + 5x - 4)}_{\text{члены, содержащие } x^2}$$

равен  $3 \cdot (-4) + (-1) \cdot 5 + (-3) \cdot 1 = -20$ .

Коэффициент при  $x$  в произведении

$$\underbrace{(x^3 + 3x^2 - x - 3)(x^2 + 5x - 4)}_{\text{члены, содержащие } x}$$

равен  $(-3) \cdot 5 + (-1) \cdot (-4) = -11$ . Наконец, свободный член равен

$$(-3) \cdot (-4) = 12.$$

Итак, произведение равно  $x^5 + 8x^4 + 10x^3 - 20x^2 - 11x + 12$ .

Ответ.  $x^5 + 8x^4 + 10x^3 - 20x^2 - 11x + 12$ .

Конечно, при пользовании этим приемом не нужно переписывать произведение  $(x^3 + 3x^2 - x - 3)(x^2 + 5x - 4)$  несколько раз, как мы это сделали при объяснении. Нужно прямо выписывать члены результата умножения один за другим, каждый раз сосредоточивая внимание на том, какие члены нужно перемножить, для того чтобы получить  $x$  в данной степени, и выполняя все необходимые вычисления в уме.

В особенно простых случаях описанный прием можно применять и при умножении нескольких многочленов.

Пример.  $(x + 2)(x + 3)(x + 5) = x^3 + 10x^2 + 31x + 30$ .

В последнем примере мы сразу записали результат умножения, воспользовавшись общим правилом умножения многочленов (§ 10): чтобы умножить многочлены, нужно составить всеми возможными способами произведения их членов, взятых по одному из каждого множителя, и сложить полученные результаты. Старший член произведения равен произведению старших членов множителей и, следовательно, равен  $x^3$ . Далее смотрим, какие члены нужно умножить, чтобы получить одночлены, содержащие  $x^2$ . Очевидно, что для этого нужно из двух скобок взять первое слагаемое, а из третьей — второе и сделать этот выбор всеми возможными способами. Следовательно, коэффициент при  $x^2$  равен  $2 + 3 + 5 = 10$ .

Далее,  $x$  в первой степени получается при умножении первого слагаемого из одной скобки на вторые слагаемые из остальных двух. Поэтому коэффициент при  $x$  равен  $2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 31$ . Наконец свободный член равен просто произведению свободных членов  $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ .

### Упражнения

Перемножить многочлены:

1.  $(a^2 + 2a + 5)(a^3 - a^2 - a + 1)$ .

2.  $(2a^2 + 3a - 1)(a^4 + a^2 + 3a - 5)$ .

3.  $(b - 1)(b^5 + b^4 + b^3 + b^2 + b + 1)$ .

4.  $(x - 1)(x + 3)(x + 5)$ .

5.  $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ .

## § 12. Сокращенное умножение по формулам

При умножении многочленов часто повторяются некоторые типичные случаи, которые следует запомнить.

Формула 1.  $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ , т. е. *квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}(A + B)^2 &= (A + B)(A + B) = A^2 + AB + BA + B^2 = \\ &= A^2 + 2AB + B^2.\end{aligned}$$

Формула 2.  $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ , т. е. *квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.*

Доказательство.

$$\begin{aligned}(A - B)^2 &= (A - B)(A - B) = A^2 - AB - BA + B^2 = \\ &= A^2 - 2AB + B^2.\end{aligned}$$

Формула 3.  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ , т. е. *произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел.*

Доказательство.

$$(A + B)(A - B) = A^2 + BA - AB - B^2 = A^2 - B^2.$$

Рассмотрим несколько примеров на применение этих формул к умножению многочленов. При пользовании формулами следует помнить, что  $A$  и  $B$  в формулах обозначают любые числа, и в частности, эти числа могут быть выражены в виде одночленов или многочленов.

Пример.  $(5x^3 - 7y^3)^3$ . Здесь можно применить формулу 2, принимая  $5x^3 = A$ ,  $7y^3 = B$ . Применяя эту формулу, получим

$$(5x^3 - 7y^3)^3 = (5x^3)^3 - 2 \cdot (5x^3)(7y^3) + (7y^3)^3 = 25x^4 - 70x^2y^2 + 49y^4.$$

Выписывать промежуточный результат с такой подробностью нет необходимости. По мере развития навыков в пользовании формулами нужно привыкать к возможно более краткой записи.

Пример.  $(3x^2y + y^3)^3$ . Применяя формулу 1, положив  $A = 3x^2y$ ,  $B = y^3$ , получим  $(3x^2y + y^3)^3 = 9x^4y^2 + 6x^2y^3 + y^4$ .

Пример.  $(5x + 4y)(5x - 4y) = 25x^2 - 16y^3$ . Здесь применена формула 3 при  $A = 5x$ ,  $B = 4y$ .

Рассмотрим теперь более сложный пример.

Пример.  $(3a + 2b + 4c - d)(3a + 2b - 4c + d)$ . Здесь прежде всего можно применить формулу 3, полагая  $A = 3a + 2b$ ;  $B = 4c - d$ . Сделав это, получим

$$(3a + 2b + 4c - d)(3a + 2b - 4c + d) = (3a + 2b)^3 - (4c - d)^3.$$

А теперь можно применить формулы 1 и 2 для дальнейших преобразований. Получим

$$(3a + 2b)^3 - (4c - d)^3 = 9a^3 + 12ab + 4b^3 - 16c^3 + 8cd - d^3.$$

Несколько реже, но все же достаточно часто приходится пользоваться еще следующими формулами.

Формула 4.  $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$ , т. е. куб суммы двух чисел равен кубу первого числа плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго, плюс куб второго числа.

Формула 5.  $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$ , т. е. куб разности двух чисел равен кубу первого числа минус утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго, минус куб второго числа.

Формула 6.  $(A + B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + B^3$ .

Формула 7.  $(A - B)(A^3 + AB + B^3) = A^3 - B^3$ .

Формула 8.  $(A + B + C)^2 = A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC$ .

Доказательства этих формул необходимо произвести самим учащимся.

Формула 6 читается так: произведение суммы двух чисел на неполный квадрат их разности равно сумме кубов этих чисел. Здесь «неполным квадратом разности» чисел  $A$  и  $B$  названо выражение  $A^2 - AB + B^2$ . Название это не точное, но образное и связано с внешним сходством выражения  $A^2 - AB + B^2$  с выражением  $A^2 - 2AB + B^2$ , являющимся квадратом разности чисел  $A$  и  $B$ .

Таким же образом выражение  $A^3 + AB + B^3$ , участвующее в формуле 7, называется неполным квадратом суммы чисел  $A$  и  $B$  на основании внешнего сходства с выражением  $A^3 + 2AB + B^3 = (A + B)^3$ .

Так что формула 7 читается так: *произведение разности двух чисел на неполный квадрат их суммы равно разности кубов этих чисел.*

Наконец формула 8 читается так: *квадрат суммы нескольких чисел равен сумме их квадратов плюс всевозможные удвоенные произведения этих чисел, взятых по два.*

Рассмотрим несколько примеров на применение формул 4—8.

Пример.

$$(2a + 3b)^3 = 8a^3 + 3 \cdot 4a^2 \cdot 3b + 3 \cdot 2a \cdot 9b^2 + 27b^3 = \\ = 8a^3 + 36a^2b + 54ab^2 + 27b^3.$$

Пример.

$$(a + b - c)^3 = (a + b)^3 - 3(a + b)^2c + 3(a + b)c^2 - c^3 = \\ = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2c - 6abc - 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 - c^3.$$

Пример.

$$(5x + 3y)(25x^2 - 15xy + 9y^2) = 125x^3 + 27y^3.$$

Здесь результат пишется сразу, как только обнаружено, что второй множитель  $25x^2 - 15xy + 9y^2$  есть «неполный квадрат разности» чисел  $5x$  и  $3y$ .

Пример.

$$(x^2 + x + 1)^3 = x^4 + x^3 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x = \\ = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$$

Здесь применена формула 8.

Пример.  $(2a - b)(2a + b)^3$ .

Решение. Решим этот пример тремя способами:

Способ 1.

$$(2a - b)(2a + b)^3 = (2a - b)(4a^2 + 4ab + b^2) = \\ = 8a^3 + 8a^2b + 2ab^2 - 4a^2b - 4ab^2 - b^3 = 8a^3 + 4a^2b - 2ab^2 - b^3.$$

Здесь мы сначала преобразовали  $(2a + b)^3$  как квадрат суммы, а затем умножили многочлены по общему правилу умножения многочлена на многочлен.

Способ 2.

$$(2a - b)(2a + b)^3 = (2a - b)(4a^2 + 4ab + b^2) = \\ = (2a - b)(4a^2 + 2ab + b^2 + 2ab) = 8a^3 - b^3 + 4a^2b - 2ab^2.$$

Здесь мы разбили квадрат суммы  $4a^2 + 4ab + b^2$  на «неполный квадрат суммы»  $4a^2 + 2ab + b^2$  и одночлен  $2ab$ , а затем воспользовались распределительным законом и формулой 7.

Способ 3.

$$(2a - b)(2a + b)^3 = (2a - b)(2a + b) \cdot (2a + b) = \\ = (4a^2 - b^2)(2a + b) = 8a^3 + 4a^2b - 2ab^2 - b^3.$$

В заключение обзора формул сделаем следующее общее замечание. Всякое преобразование произведения многочленов, которое совершается при помощи формул 1—8, может быть проведено и без применения формул, посредством общих правил умножения многочлена на многочлен. Формулы 1—8 позволяют только в некоторых случаях упростить и сократить вычисления. Поэтому, формулы 1—8 называют *формулами сокращенного умножения*.

## Упражнения

Выполнить умножение многочленов при помощи формул:

1.  $(3ab - x^2)(3ab + x^2)$ .
2.  $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ .
3.  $(a + b)^2(a - b)^2$ . (Решить двумя способами.)
4.  $(a^2 + 3ab + b^2)(a^2 - 3ab + b^2)$ .
5.  $(3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2)$ .
6.  $(2x + 1)^2$ .
7.  $(-a - b)^2$ .
8.  $(x^2 + 2x - 1)^2$ .

Решить относительно буквы  $x$  следующие уравнения:

9.  $(a + b)x = a^2 - b^2$ .
10.  $(3a^2 - 2b)x = 9a^4 - b^2$ .
11.  $(2p + 3q)x = 4p^2 + 12pq + 9q^2$ .
12.  $(a^3 - 8b^3):x = a - 2b$ .
13.  $x:(3p + q) = 9p^2 - 3pq + q^2$ .

### § 13. Применение формул сокращенного умножения к устным вычислениям

Формулы сокращенного умножения применяются не только к умножению многочлена на многочлен. Они с успехом могут быть применены к многим вычислениям над числами. Рассмотрим несколько таких примеров.

Пример. Вычислить  $19 \cdot 21$ .

Решение. Достаточно заметить, что  $19 = 20 - 1$  и  $21 = 20 + 1$ , чтобы, воспользовавшись формулой 3, сразу сказать результат. Именно,  $19 \cdot 21 = 20^2 - 1^2 = 399$ .

Пример.  $41^2 = 1681$ . Как получен этот результат?

Решение. При помощи формулы 1

$$41^2 = (40 + 1)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 + 1 = 1681.$$

Пример.  $18^2 = (20 - 2)^2 = 400 - 80 + 4 = 324$ .

Пример.  $97^2 = (100 - 3)^2 = 10\,000 - 600 + 9 = 9409$ .

Таким образом, формулы сокращенного умножения удобно применять:

1. При умножении чисел, представляющих собой сумму и разность двух чисел, каждое из которых легко возвести в квадрат.

2. При возведении в квадрат двузначных чисел, близких к «круглым» числам.

Покажем некоторые другие применения. Часто приходится возводить в квадрат числа, очень близкие к единице, причем результат нужно знать приближенно с тем же числом знаков после запятой, с которым дано число, возводимое в квадрат. Например,

$$1,002^2 = (1 + 0,002)^2 = 1 + 0,004 + 0,000004 = 1,004004 \approx 1,004.$$

Знак  $\approx$  применен здесь в качестве знака *приближенного равенства*. Мы отбросили четыре единицы последнего знака, так как ошибка, возникающая при таком отбрасывании меньше, чем требуемая точность. Таким же образом

$$0,997^2 = (1 - 0,003)^2 = 1 - 0,006 + 0,000009 \approx 0,994.$$

Обобщая эти два примера, приходим к следующему выводу. Если  $\alpha$  есть очень маленькое по абсолютной величине число, положительное или отрицательное, то

$$(1 + \alpha)^2 \approx 1 + 2\alpha.$$

Точное равенство имеет вид  $(1 + \alpha)^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2$ . Но число  $\alpha^2$  меньше абсолютной величины  $\alpha$  во столько же раз, во сколько абсолютная величина  $\alpha$  меньше 1. Поэтому, если  $\alpha$  очень мало по абсолютной величине, то  $\alpha^2$  будет исчезающе малым по сравнению с остальными слагаемыми.

Таким же образом из формулы для куба суммы мы получим приближенную формулу для куба числа, близкого к единице. Именно,

$$(1 + \alpha)^3 \approx 1 + 3\alpha.$$

Посмотрим на примере, насколько эта формула точна.

Пример.

$$(1,003)^3 = (1 + 0,003)^3 = 1 + 0,009 + 0,000027 + 0,000000027.$$

Последние два слагаемых исчезающе малы по сравнению с первыми, так что действительно  $1,003^3 \approx 1,009$ , что соответствует указанной приближенной формуле.

Наконец, формула 3 дает при малых  $\alpha$  следующий результат:

$$(1 + \alpha)(1 - \alpha) = 1 - \alpha^2 \approx 1,$$

откуда

$$\frac{1}{1 + \alpha} \approx 1 - \alpha \quad \text{и} \quad \frac{1}{1 - \alpha} \approx 1 + \alpha.$$

Например,  $\frac{1}{1,004} \approx 0,996$ .

### Упражнения

Выполнить устно следующие действия:

1.  $43 \cdot 37$ .    2.  $42^2$ .    3.  $96^2$ .    4.  $84 \cdot 96$ .

5. Доказать, что для того чтобы возвысить «целое число с половиной» в квадрат, нужно умножить это целое число на соседнее большее и к результату приписать  $\frac{1}{4}$ . Например,  $\left(7 \frac{1}{2}\right)^2 = 56 \frac{1}{4}$ .

Вычислить приближенно:

6.  $(1,0035)^3$ .    7.  $(0,997)^3$ .    8.  $\frac{1}{1,003}$ .

### § 14. Некоторые выводы

В § 2 этой главы мы условились рассматривать многочлены как частный случай многочленов, именно как многочлены, составленные из одного члена. Воспользуемся этим соглашением и сделаем следующие выводы:

1. Сумма и разность двух многочленов есть многочлен.
2. Произведение двух многочленов есть многочлен.

А из этих выводов непосредственно следует такая общая теорема:  
*Всякое целое алгебраическое выражение равно некоторому многочлену.*

Или, что то же самое:

*Всякое целое алгебраическое выражение может быть преобразовано к виду многочлена.*

Действительно, целое алгебраическое выражение есть запись действий сложения, вычитания и умножения (в том числе и умножения равных множителей, т. е. возведения в степень) над числами, часть которых обозначена буквами. Как заданные числа, так и отдельные буквы представляют собой одночлены.

Произведя над ними одно за другим указанные действия, мы будем получать результаты в виде многочленов в силу сформулированных выше выводов. И, наконец, окончательный результат тоже будет иметь вид многочлена, что и требовалось доказать. Например,

$$\begin{aligned}
 & [(a+b)^2 - 4ab] \cdot [(a-b)^2 + (a+2b)(a+b)] + \\
 & + [2a^3 - (a+2b)(2a-b)] \cdot [(2b+a)(a+3b) - (a-b)(a-6b)] = \\
 & = (a^2 + 2ab + b^2 - 4ab)(a^2 - 2ab + b^2 + a^2 + 2ab + ab + 2b^2) + \\
 & + (2a^3 - 2a^2 - 4ab + ab + 2b^2) \cdot (2ab + a^2 + 6b^2 + \\
 & + 3ab - a^2 + ab + 6ab - 6b^2) = \\
 & = (a^2 - 2ab + b^2)(2a^2 + ab - 3b^2) + (-3ab + 2b^2)(12ab) = \\
 & = 2a^4 + a^3b + 3a^2b^2 - 4a^3b - 2a^2b^2 - 6ab^3 + 2a^2b^3 + ab^3 + \\
 & + 3b^4 - 36a^2b^2 + 24ab^3 = \\
 & = 2a^4 - 3a^3b - 33a^2b^2 + 19ab^3 + 3b^4.
 \end{aligned}$$

Заметим еще, что всякий многочлен равен некоторому *приведенному* многочлену, т. е. многочлену, не содержащему подобных членов. Действительно, если многочлен содержит подобные члены, то их можно привести. В силу этого всякое целое алгебраическое выражение можно преобразовать к виду приведенного многочлена.

Цепочка тождественных преобразований называется *алгебраической выкладкой*. Таким образом, в настоящей главе даны правила проведения выкладки, посредством которой всякое целое алгебраическое выражение может быть преобразовано к виду приведенного многочлена.

Очевидно, что если два приведенных многочлена составлены из одинаковых одночленов, то они равны тождественно, т. е. их значения равны при всех численных значениях входящих в них букв. Верна также и обратная теорема:

*Теорема о тождестве. Если два приведенных многочлена равны тождественно, то они составлены из одинаковых одночленов.*



Доказательство теоремы о тождестве довольно сложно и выходит за рамки курса элементарной алгебры.

Эти две теоремы дают возможность ответить на такой вопрос. Пусть даны два целых алгебраических выражения. Равны они тождественно или нет? Для решения этого вопроса достаточно привести каждое из выражений к виду приведенного многочлена. Если при этом окажется, что полученные многочлены составлены из одинаковых одночленов, то данные выражения тождественно равны. Если же полученные многочлены окажутся различными, т. е. составленными из неодинаковых одночленов, то данные выражения не равны тождественно.

Пример. Доказать тождество

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = \frac{2}{3} [(a+b)(a+2b) + (a-b)(2a-b)].$$

Решение.

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

$$\frac{2}{3} [(a+b)(a+2b) + (a-b)(2a-b)] =$$

$$= \frac{2}{3} [a^2 + ba + 2ab + 2b^2 + 2a^2 - 2ab - ab + b^2] =$$

$$= \frac{2}{3} [3a^2 + 3b^2] = 2a^2 + 2b^2.$$

После преобразований выражение, находящееся в левой части равенства, оказалось равным  $2a^2 + 2b^2$  и выражение, находящееся в правой части равенства, тоже равно  $2a^2 + 2b^2$ . Тождество доказано.

Пример. Рассмотрим два выражения

$$(x^3 + 3x)(3x^3 - 3x + 2) \quad \text{и} \quad 4x^3(x^3 + 1).$$

Они имеют ряд одинаковых значений. Действительно, при  $x=0$  они оба равны нулю; при  $x=1$  каждое из них равно  $4 \cdot 2 = 8$ ; при  $x=2$  первое равно  $10 \cdot 8 = 80$ , второе равно  $16 \cdot 5 = 80$ ; при  $x=3$  первое равно  $18 \cdot 20 = 360$ , второе  $36 \cdot 10 = 360$ . Может быть они равны тождественно? Для выяснения этого вопроса раскроем скобки:

$$(x^3 + 3x)(3x^3 - 3x + 2) = 3x^4 - 3x^3 + 2x^3 + 9x^3 - 9x^3 + 6x =$$

$$= 3x^4 + 6x^3 - 7x^3 + 6x,$$

$$4x^3(x^3 + 1) = 4x^4 + 4x^3.$$

Таким образом, данные выражения преобразуются в различные приведенные многочлены, и следовательно, они не могут равняться тождественно. И действительно, они принимают различные значения, например при  $x = \frac{1}{2}$ : первое

выражение равно  $\frac{7}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{35}{16}$ , второе — равно  $1 \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$ .

### Упражнения

Доказать следующие тождества:

1.  $x(x+1)(x+2)(x+3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$ .
2.  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$ .

## ГЛАВА IV

### РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ НА МНОЖИТЕЛИ

#### § 1. Понятие о разложении на множители

Часто, особенно при преобразованиях дробных алгебраических выражений, бывает нужно представить данный многочлен в виде произведения двух или более многочленов. При этом требуется, чтобы оба множителя содержали одну букву. Преобразование многочлена к виду произведения многочленов называется *разложением многочлена на множители*.

Например, равенство  $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$ , которое легко проверяется перемножением многочленов  $x + 3$  и  $x + 4$ , дает разложение многочлена  $x^2 + 7x + 12$  на множители  $x + 3$  и  $x + 4$ .

Конечно, разложение на множители возможно далеко не всегда. Например, многочлен  $x^2 + 2$  нельзя представить в виде произведения двух многочленов, содержащих букву  $x$ , так как старший член произведения двух таких многочленов содержит  $x$  по крайней мере во второй степени, а может быть и в более высокой, в то время как многочлен  $x^2 + 2$  таких степеней буквы  $x$  не содержит. Многочленов, не допускающих разложения на множители, существует сколько угодно.

Многочлен, который не может быть представлен в виде произведения двух многочленов или в виде произведения многочлена на одночлен, содержащий хотя бы одну букву, называется *неприводимым* или *неразложимым на множители многочленом*. Так, многочлен  $x^2 + 2$  неприводим. Наоборот, если многочлен может быть разложен на множители, то он называется *приводимым*.

Задача о разложении многочлена на множители имеет сходство с задачей о разложении целых чисел на множители. Здесь неприводимые многочлены играют такую роль, какую там играют простые числа, а приводимые многочлены — такую же, как составные числа. Задача о разложении целого числа на множители считается решенной до конца, когда число разложено на простые множители и дальнейшее разложение невозможно. Таким же образом задача о разложении многочлена на множители может считаться решенной до конца, если все множители, получающиеся в результате разложения, оказываются неприводимыми. Однако так поставленная задача в общем виде очень трудна. В частности, часто бывает трудно ответить на вопрос,

приводим заданный многочлен или неприводим? Полное решение этой задачи недоступно по своей трудности для учащихся средней школы.

Однако существует целый ряд простых приемов для разложения многочленов на множители, и искусное владение этими приемами дает возможность почти всегда найти разложение, если только оно вообще возможно.

Заметим еще, что ставить задачу о разложении на множители имеет смысл для многочленов, содержащих более одного члена. Для одночленов задача решена сама собой, так как одночлен есть произведение степеней букв, а степень тоже есть произведение, но только равных множителей. Преобразование, подобное

$$3a^3 = 3a \cdot a \cdot a,$$

нельзя рассматривать как разложение на множители. Это просто переход от сокращенной записи  $3a^3$  к развернутой  $3a \cdot a \cdot a$ . Даже в арифметике при разложении целых чисел на простые множители принято пользоваться записью с применением степеней. Например,  $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$ .

## § 2. Вынесение за скобку

**Пример.** Разложить на множители многочлен  $a^3b - a^2b^2 - 3ab^3$ .

**Решение.** Здесь можно заметить, что все три члена многочлена имеют общий множитель  $ab$ . Действительно,

$$a^3b = a^2 \cdot ab, \quad -a^2b^2 = -ab \cdot ab, \quad -3ab^3 = -3b \cdot ab.$$

На основании распределительного закона данный многочлен можно записать в виде произведения суммы первых множителей его членов на одночлен  $ab$ . Итак,

$$a^3b - a^2b^2 - 3ab^3 = a^2 \cdot ab - ab \cdot ab - 3b \cdot ab = (a^2 - ab - 3b)ab.$$

$$\text{Ответ. } (a^2 - ab - 3b)ab.$$

Прием, примененный в рассмотренном примере, называется *вынесением за скобку*. Этот прием тесно связан с правилом умножения многочлена на одночлен. Так же как правило умножения многочлена на одночлен, вынесение за скобку основывается на распределительном законе. При умножении многочлена на одночлен распределительный закон применяется для того, чтобы представить в виде суммы произведение суммы на число. При вынесении за скобку, наоборот, сумма нескольких слагаемых, имеющих общий множитель, преобразовывается в произведение некоторой суммы на этот множитель.

При вынесении за скобку следует руководствоваться следующим правилом:

**Правило.** Если все члены многочлена содержат некоторую букву в каких-либо степенях, то можно вынести за скобку степень этой буквы с наименьшим из показателей, с которыми

буква входит в отдельные члены многочлена. Если таких букв имеется несколько, то выносятся за скобку произведение степеней этих букв с надлежащими показателями.

Точно так же можно выносить за скобку числовой коэффициент. Вообще говоря, этот коэффициент может быть взят каким угодно. Например,

$$\begin{aligned} 3a^2b - 6ab^2 &= ab(3a - 6b) = 3ab(a - 2b) = 6ab\left(\frac{1}{2}a - b\right) = \\ &= -3ab(2b - a) = -\frac{3}{2}ab(4b - 2a) \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Однако наиболее удобно так выбирать коэффициент, чтобы многочлен, остающийся в скобке, имел целые коэффициенты, не имеющие общего целого множителя, например,

$$3a^2b - 6ab^2 = 3ab(a - 2b),$$

или

$$3a^2b - 6ab^2 = -3ab(2b - a).$$

При преобразовании алгебраических выражений вынесение за скобку играет вспомогательную роль. Поэтому выбор знака коэффициента, а иногда и его величины, должен производиться в соответствии с целью, для достижения которой делается вынесение за скобку. В частности, часто бывает нужно вынести за скобку численный множитель, например,

$$5a^3 - 20ab + 20b^3 = 5(a^3 - 4ab + 4b^3) = 5(a - 2b)^3.$$

Отметим, наконец, что вынесение за скобку возможно во всяком алгебраическом выражении, представляющем собой сумму нескольких слагаемых, имеющих общий множитель, например,

$$3a(c + d) - 2b(c + d) = (3a - 2b)(c + d).$$

Иногда при этом наличие общего множителя становится очевидным только после некоторых преобразований.

Пример. Разложить на множители многочлен

$$7ab(3c - 6d) + 5(2d - c).$$

Решение. Здесь мы видим, что если из выражения, находящегося в первой скобке, вынести число 3, то в скобке останется двучлен, члены которого только знаками отличаются от членов второй скобки. Поэтому преобразование нужно вести так:

$$\begin{aligned} 7ab(3c - 6d) + 5(2d - c) &= 7ab \cdot 3(c - 2d) - 5(c - 2d) = \\ &= (21ab - 5)(c - 2d). \end{aligned}$$



## Упражнения

Вынести за скобку все, что возможно:

1.  $7a^2b^2 + 14a^2b - 28ab^3$ .
4.  $a(c - 3d) + b(3d - c)$ .
2.  $x^3 + 3x^2 + x$ .
5.  $3ax(5x^2 - 15y^2) - 6ay(6y^3 - 2x^2)$ .
3.  $a(c + d) + b(c + d)$ .

### § 3. Применение вынесения за скобку к расположению многочлена по степеням одной буквы

Многочлены, содержащие одну букву, целесообразно записывать в порядке убывания степеней. Это оказалось полезным при умножении многочленов, это полезно при разложении на множители и при делении многочлена на многочлен.

Такая запись часто оказывается удобной и для многочленов, содержащих несколько букв. При этом из всех букв нужно выбрать одну, главную букву и записывать одночлены в порядке убывания степеней этой буквы.

Например, многочлен  $ax^2 - b^2x - c^2x + abc$  расположен в порядке убывания степеней буквы  $x$ . Если бы мы в этом многочлене в качестве главной буквы взяли вместо  $x$  другую букву, например  $b$ , мы должны были бы записать его члены в другом порядке, именно  $-xb^2 + acb + ax^2 - c^2x$ .

При таком расположении часто оказывается, что имеется несколько членов, содержащих главную букву в одной и той же степени. В нашем примере  $ax^2 - b^2x - c^2x + abc$  имеется два члена, содержащих  $x$  в первой степени. Для того чтобы еще более подчеркнуть, что за главную букву принимается  $x$ , целесообразно рассматривать члены, содержащие  $x$  в одной и той же степени, как подобные, и соединять их вместе посредством вынесения буквы  $x$  в надлежащей степени за скобку из алгебраической суммы таких членов. Так,

$$ax^2 - b^2x - c^2x + abc = ax^2 - (b^2 + c^2)x + abc.$$

В такой записи многочлен выглядит как многочлен, зависящий только от одной буквы  $x$ , но с *буквенными коэффициентами* и с буквенным свободным членом. Так, коэффициентами в многочлене  $ax^2 - (b^2 + c^2)x + abc$  являются  $a$ ,  $-(b^2 + c^2)$  и свободным членом является  $abc$ .

Естественно поставить вопрос о том, какую букву нужно выбрать за главную, если мы хотим расположить по степеням одной буквы многочлен, зависящий от нескольких букв.

Если многочлен рассматривается без связи с какой-либо задачей, то выбор главной буквы совершенно безразличен. Если же многочлен получается при решении задачи, часто условие задачи подсказывает, какую букву следует считать главной.

Рассмотрим один пример этого рода.

**Задача.** Коробка имеет длину  $a$  см, ширину  $b$  см. Требуется найти высоту, при которой площадь поверхности коробки равняется  $s$  см<sup>2</sup>.

**Решение.** Обозначим высоту буквой  $x$ . Поверхность коробки составлена из шести прямоугольников. Два из этих прямоугольников (дно и крышка) имеют площадь  $ab$  см<sup>2</sup>, другие два (левая и правая стенки) имеют площадь  $bx$  см<sup>2</sup>, и последние два (передняя и задняя стенки) имеют площадь  $ax$  см<sup>2</sup>. Следовательно, между четырьмя буквами  $a$ ,  $b$ ,  $s$  и  $x$  имеется следующая зависимость:

$$2ab + 2ax + 2bx = s,$$

или, что то же самое,

$$2ab + 2ax + 2bx - s = 0.$$

Мы получили уравнение, в левой части которого находится многочлен, зависящий от букв  $a$ ,  $b$ ,  $x$  и  $s$ . Какую же из этих четырех букв следует принять за главную букву? Конечно,  $x$ , так как  $x$  играет особую роль в задаче. Числа  $a$ ,  $b$  и  $s$  — это числа известные, данные. Число  $x$  — неизвестное. Поэтому полученное нами уравнение следует записать так:

$$(2a + 2b)x + 2ab - s = 0.$$

А теперь его легко решить.

Сумма чисел  $(2a + 2b)x$  и  $2b - s$  равна нулю. Следовательно, это противоположные числа.

$$(2a + 2b)x = -(2ab - s) = s - 2ab.$$

Произведение числа  $x$  на число  $2a + 2b$  равно  $s - 2ab$ . Следовательно,

$$x = \frac{s - 2ab}{2a + 2b}.$$

Задача решена.

### Упражнения

1. Расположить по степеням буквы  $b$  многочлен

$$2abc - 2ab^2 - 3b^2c + b^3 - a^2c - ac^2 + 4a^2b.$$

2. Расположить по степеням буквы  $y$  многочлен

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2.$$

### § 4. Способ группировки

Рассмотрим следующий пример на умножение многочленов:

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Мы воспользовались правилом 1 умножения многочлена на многочлен (гл. III, § 9).

Представим теперь себе, что у нас поставлена обратная задача. Дан многочлен  $ac + ad + bc + bd$ . Требуется разложить его на множители. Очевидно, что для этого нужно провести те же вычисления, но в обратном порядке:

$$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d).$$

Мы объединяем первое слагаемое со вторым и выносим из их суммы  $a$  за скобку, одновременно объединяем третье и четвертое слагаемые и из их суммы выносим за скобку  $b$ . В обеих скобках получается одно и то же выражение  $c + d$ , и его снова выносим за скобку.

Рассмотрим теперь еще один пример, в котором разложение на множители заранее неизвестно.

Пример. Разложить на множители многочлен

$$3ac + 3ad - 2bc - 2bd.$$

Решение. Мы видим, что если объединить первое и второе слагаемые, то из их суммы можно вынести за скобку  $3a$ , а из суммы третьего слагаемого с четвертым можно вынести за скобку  $-2b$ . В обоих случаях в скобке остается одно и то же выражение  $c + d$ , так что многочлен преобразуется в сумму двух слагаемых, имеющих общий множитель  $c + d$ . После этого можно вынести за скобку  $c + d$ .

Наметив такой план преобразований, переходим к его осуществлению:

$$3ac + 3ad - 2bc - 2bd = 3a(c + d) - 2b(c + d) = (3a - 2b)(c + d).$$

$$\text{Ответ. } (3a - 2b)(c + d).$$

Примененный в рассмотренном примере способ называется *способом группировки*. В общем виде *способ группировки* состоит в том, что слагаемые, из которых составлен многочлен, объединяются в группы с таким расчетом, чтобы после вынесения в каждой группе некоторых однокленов за скобку в скобках оказались бы одинаковые многочлены.

Конечно, совсем не обязательно объединять слагаемые, находящиеся рядом, как это было сделано в рассмотренных примерах. В многочлене  $3ac + 3ad - 2bc - 2bd$  мы могли с тем же успехом объединить первое слагаемое с третьим, а второе с четвертым. Действительно,

$$\underline{3ac} + \underline{3ad} - \underline{2bc} - \underline{2bd} = (3a - 2b)c + (3a - 2b)d = (3a - 2b)(c + d).$$

А в многочлене  $a^3 + 4bc - ab - 4ac$  группировка соседних слагаемых ничего не дает. Здесь нужно объединить первое слагаемое с третьим, второе с четвертым или первое с четвертым, второе с третьим:

$$\underline{a^3} + \underline{4bc} - \underline{ab} - \underline{4ac} = a(a - b) - 4c(a - b) = (a - 4c)(a - b)$$

или

$$\underline{a^3} + \underline{4bc} - \underline{ab} - \underline{4ac} = a(a - 4c) - b(a - 4c) = (a - b)(a - 4c).$$

### Упражнения

Разложить на множители многочлены:

1.  $4x^2y - 4xy^2 - y + x$ .

3.  $a^3 + a - 2ab + 3 + 3a^2 - 6b$ .

2.  $2ax + ay - az - 2bx - by + bz$ .

4.  $a^3 + 3 + 3a^2 + a$ .

## § 5. Разложение отдельных членов многочлена на подобные слагаемые

Часто бывает, что при умножении многочлена на многочлен после того как скобки раскрыты можно сделать приведение подобных членов. Поэтому при разложении многочлена на множители часто бывает полезно прежде чем совершать группировку разбить некоторые

одночлены на подобные слагаемые с тем, чтобы эти слагаемые разнести потом в *разные* группы.

**Пример.** Разложить на множители многочлен  $a^3 + 3ab + 2b^3$ .

**Решение.** В этом многочлене группировка его членов бесполезна для разложения на множители. Однако, если предварительно разбить одночлен  $3ab$  на сумму двух членов  $ab$  и  $2ab$  и разнести их в разные группы, то разложение удастся. Действительно,

$$\begin{aligned} a^3 + 3ab + 2b^3 &= a^3 + ab + 2ab + 2b^3 = a(a + b) + 2b(a + b) = \\ &= (a + 2b)(a + b). \end{aligned}$$

*Ответ.*  $(a + 2b)(a + b)$ .

Более того, при умножении многочленов возможно, что некоторые слагаемые, получившиеся в результате раскрытия скобок, при приведении подобных членов взаимно уничтожаются. Поэтому иногда при разложении многочлена на множители перед группировкой слагаемых нужно вставить новый одночлен, взяв его два раза с противоположными знаками.

**Пример.**

$$\begin{aligned} a^3 + ac - bc - b^3 &= a^3 + ac + ab - ab - bc - b^3 = \\ &= a(a + c + b) - b(a + c + b) = (a - b)(a + c + b). \end{aligned}$$

### Упражнения

Разложить на множители:

$$1. x^3 + ax - 2a^3. \quad 2. x^3 + 3bx^2 - 4b^2x. \quad 3. x^4 + 5x^3y^2 + 6y^4.$$

## § 6. Применение формул сокращенного умножения

Формулы сокращенного умножения часто значительно облегчают разложение на множители, позволяя избежать разложения одночленов на подобные слагаемые и обойтись без вставки новых одночленов.

**Пример.** Разложить на множители  $x^3 - 4$ .

**Решение.** Мы видим, что исследуемый многочлен есть разность квадратов чисел  $x$  и 2. Следовательно, его можно записать в виде произведения суммы этих чисел на их разность

$$x^3 - 4 = (x + 2)(x - 2).$$

**Пример.** Разложить на множители  $x^3 + 4xy + 4y^2 - 9z^2$ .

**Решение.** Мы видим, что сумма первых трех слагаемых есть квадрат суммы чисел  $x$  и  $2y$ . Действительно, квадрат первого числа равен  $x^2$ , удвоенное произведение первого на второе равно  $4xy$ , квадрат второго равен  $4y^2$ . Итак,

$$x^3 + 4xy + 4y^2 - 9z^2 = (x + 2y)^2 - 9z^2.$$



Теперь наш многочлен приведен к виду разности квадратов чисел  $(x+2y)$  и  $3z$ . Следовательно, его можно представить в виде произведения суммы этих чисел на их разность

$$(x+2y)^2 - 9z^2 = (x+2y+3z)(x+2y-3z).$$

Пример. Разложить на множители многочлен  $2x^4 - 16xy^3$ .

Решение. Прежде всего надо вынести за скобку  $2x$

$$2x^4 - 16xy^3 = 2x(x^3 - 8y^3).$$

Теперь мы видим, что многочлен, находящийся в скобке, есть разность кубов чисел  $x$  и  $2y$ . По сокращенной формуле мы знаем, что разность кубов двух чисел равна произведению разности этих чисел на «неполный квадрат их суммы». Итак,

$$x^3 - 8y^3 = (x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2).$$

Окончательно получаем

$$2x^4 - 16xy^3 = 2x(x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2).$$

Мы прерывали запись действий *рассуждениями*. Конечно, при решении такого рода примеров рассуждения надлежит производить без записи — вслух или про себя, и запись должна выглядеть так:

$$2x^4 - 16xy^3 = 2x(x^3 - 8y^3) = 2x(x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2).$$

### Упражнения

Разложить на множители:

- |                      |                                |                            |
|----------------------|--------------------------------|----------------------------|
| 1. $x^4 - 16y^4$ .   | 3. $a^2 + 6ab + 9b^2 - 4c^2$ . | 5. $4xy - xyz^2$ .         |
| 2. $4xy^3 - 4x^3y$ . | 4. $8x^4 - 27a^3x$ .           | 6. $x^3 + 2x - y^2 - 2y$ . |

## § 7. Более сложные примеры

Мы разобрали несколько приемов разложения многочлена на множители — вынесение за скобку, способ группировки, разложение одночленов на подобные слагаемые, использование формул сокращенного умножения. *Не существует никаких общих правил* для того, какими из этих приемов и в каких сочетаниях их друг с другом надлежит пользоваться для достижения цели в каждом частном случае. (Конечно, если это возможно, следует раньше всего сделать вынесение за скобку. Это никогда не ведет к усложнению, но часто упрощает задачу.) Поэтому, прежде чем приступить к выкладке, необходимо взвешивать в строение разлагаемого многочлена и составить план действий. Для того чтобы показать, как составлять этот план, рассмотрим несколько более сложных примеров.

Пример. Разложить на множители многочлен

$$x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz.$$

Решение. Мы видим, что если из суммы первых двух слагаемых вынести  $xу$ , в скобке останется  $x+y$ . Попробуем сгруппировать остальные слагаемые так, чтобы  $x+y$  входило множителем в сумму слагаемых каждой группы. Мы видим, что «хорошей» в этом смысле группой является сумма  $xz^2+y^2z$ ; при вынесении из нее за скобку  $z^2$  в скобке останется  $x+y$ . Остается группа слагаемых  $x^2z+y^2z+2xyз$ . Если в этой группе вынести за скобку  $z$ , то в скобке останется  $x^2+y^2+2xy$ , т. е. квадрат суммы  $(x+y)$ . Итак,

$$\begin{aligned} x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz &= \\ &= (x^2y + xy^2) + (xz^2 + yz^2) + (x^2z + y^2z + 2xyz) = \\ &= xy(x+y) + z^2(x+y) + z(x^2+y^2+2xy) = \\ &= xy(x+y) + z^2(x+y) + z(x+y)^2 = \\ &= [xy + z^2 + z(x+y)](x+y) = \\ &= (z^2 + zx + zy + xy)(x+y). \end{aligned}$$

Первый множитель можно разложить дальше, воспользовавшись способом группировки:

$$\begin{aligned} (z^2 + zx + zy + xy)(x+y) &= [z(z+x) + y(z+x)](x+y) = \\ &= (z+y)(z+x)(x+y). \end{aligned}$$

Пример.  $x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ .

Решение. Здесь прежде всего бросается в глаза сходство с кубом суммы или разности чисел  $x$  и 1. Однако это сходство обманчиво — знаки не те! Поэтому следует искать другой прием. Например, хорошо сгруппировать вместе крайние члены  $x^3$  и 1 и средние —  $-3x^2$  и  $-3x$ , ибо  $x^3+1$  содержит множитель  $x+1$  по формуле суммы кубов, и тот же множитель  $x+1$  обнаруживается в  $-3x^2-3x$  посредством вынесения за скобку. Итак,

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 3x + 1 &= x^3 + 1 - 3x^2 - 3x = \\ &= (x+1)(x^2 - x + 1) - 3x(x+1) = (x+1)(x^2 - 4x + 1). \end{aligned}$$

Пример.  $a^4 + 2a^3b - 3a^2b^2 - 4ab^3 - b^4$ .

Решение. Здесь целесообразно член  $-3a^2b^2$  разбить на сумму двух членов  $a^3b^2$  и  $-4a^2b^3$ . Действительно, тогда сумма первых трех членов, а также взятая с обратным знаком сумма последних трех представится в виде квадратов, и после этого останется применить формулу для разложения разности квадратов. Осуществим этот план:

$$\begin{aligned} a^4 + 2a^3b - 3a^2b^2 - 4ab^3 - b^4 &= \\ &= a^4 + 2a^3b + a^2b^2 - 4a^2b^3 - 4ab^3 - b^4 = \\ &= a^4 + 2a^3b + a^2b^2 - (4a^2b^3 + 4ab^3 + b^4) = \\ &= (a^2 + ab)^2 - (2ab + b^2)^2 = \\ &= (a^2 + 3ab + b^2)(a^2 - ab - b^2). \end{aligned}$$

Пример.  $a^6 - b^6$ .

Решение.

$$\begin{aligned}\text{Способ 1. } a^6 - b^6 &= (a^3)^2 - (b^3)^2 = (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = \\ &= (a - b)(a^2 + ab + b^2)(a + b)(a^2 - ab + b^2).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Способ 2. } a^6 - b^6 &= (a^2)^3 - (b^2)^3 = (a^2 - b^2)(a^4 + a^2b^2 + b^4) = \\ &= (a - b)(a + b)(a^4 + a^2b^2 + b^4).\end{aligned}$$

Сравнивая результаты, мы видим, что  $a^4 + a^2b^2 + b^4$  разлагается на два множителя:  $(a^2 + ab + b^2)$  и  $(a^2 - ab + b^2)$ . В этом можно убедиться и непосредственно:

$$\begin{aligned}a^4 + a^2b^2 + b^4 &= a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2 = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = \\ &= (a^2 + b^2 + ab)(a^2 + b^2 - ab).\end{aligned}$$

Пример. Разложить на множители  $x^4 + 4$ .

Решение.

$$\begin{aligned}x^4 + 4 &= x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = \\ &= (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2).\end{aligned}$$

Пример. Разложить на множители  $x^4 - 3x^2 + 9$ .

Решение.

$$\begin{aligned}x^4 - 3x^2 + 9 &= x^4 + 6x^2 + 9 - 9x^2 = (x^2 + 3)^2 - (3x)^2 = \\ &= (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 3x + 3).\end{aligned}$$

В последних двух примерах разложение удается посредством преобразования в разность квадратов. Этот прием часто ведет к цели при разложении так называемого *биквадратного трехчлена*, т. е. трехчлена, составленного из четвертой и второй степеней одной буквы с некоторыми коэффициентами и свободного члена.

### Упражнения

Разложить на множители:

1.  $x^6 + x^3 - x^2 - 1$ .

2.  $a^4 - 2a^2b - 8a^2b^2 - 6ab^3 - b^4$ .

3.  $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 3xyz$ .

4.  $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ .

5.  $x^5 - 1$ .

## § 8. Разложение квадратного трехчлена на множители

*Квадратным трехчленом* называется многочлен второй степени, содержащий одну букву, например,  $a^2 - 5a + 6$ ;  $2x^2 - 7x + 5$  и т. д.

В частности, член, содержащий первую степень буквы, или свободный член могут отсутствовать. Такого рода выражения называются неполными квадратными трехчленами, хотя на самом деле они состоят

только из двух слагаемых. Например,  $2x^2 - 5x$  и  $x^2 + 6$  — неполные трехчлены.

Для разложения квадратного трехчлена на множители можно рекомендовать два способа, которые мы рассмотрим на решении одного примера.

Пример. Разложить на множители  $x^2 + 2x - 15$ .

Решение.

Способ 1. Рассмотрим тождество

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab,$$

которое легко проверяется. Действительно,

$$(x + a)(x + b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a + b)x + ab.$$

Из этого тождества следует, что если мы сумеем разложить коэффициент при  $x$  на сумму двух слагаемых  $a$  и  $b$  так, чтобы произведение  $ab$  этих слагаемых равнялось свободному члену, то нам удастся найти разложение трехчлена на множители.

В нашем примере  $x^2 + 2x - 15$  в качестве таких слагаемых можно взять 5 и  $-3$ . Тогда

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 15 &= x^2 + 5x - 3x - 15 = x(x + 5) - 3(x + 5) = \\ &= (x - 3)(x + 5). \end{aligned}$$

Способ 2. В данном трехчлене  $x^2 + 2x - 15$  выделим полный квадрат суммы посредством следующего рассуждения. Заметим, что  $x^2$  есть квадрат числа  $x$ . Примем  $x$  за первое слагаемое. Рассмотрим затем следующий член  $2x$  как удвоенное произведение первого слагаемого  $x$  на второе. Очевидно, что за второе слагаемое нужно принять 1. Затем добавляем квадрат этого второго слагаемого и, чтобы равенство не нарушилось, сразу его отнимаем. Получим

$$x^2 + 2x - 15 = x^2 + 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2 - 15 = (x + 1)^2 - 16.$$

Дальнейшее ясно:  $16 = 4^2$ , и следовательно,

$$(x + 1)^2 - 16 = (x + 1 + 4)(x + 1 - 4) = (x + 5)(x - 3).$$

Во втором способе, в отличие от первого, мы не прибегаем к подбору. Мы собираем все члены, содержащие  $x$ , в выражение, имеющее вид полного квадрата, и затем, если это возможно, пользуемся формулой для разложения разности квадратов.

Пример. Разложить на множители  $x^2 + 7x + 6$ .

Решение.

$$\begin{aligned} x^2 + 7x + 6 &= x^2 + 2x \cdot \frac{7}{2} + \frac{49}{4} - \frac{49}{4} + 6 = \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = \\ &= \left(x + \frac{7}{2} + \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{7}{2} - \frac{5}{2}\right) = (x + 6)(x + 1). \end{aligned}$$

Если коэффициент при  $x^2$  отличен от 1, следует предварительно вынести его за скобку.

Пример. Разложить на множители  $2x^2 - 5x + 2$ .

Решение.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 5x + 2 &= 2\left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right) = 2\left(x^2 - 2 \cdot \frac{5}{4}x + \frac{25}{16} - \frac{9}{16}\right) = \\ &= 2\left[\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] = 2\left(x - \frac{5}{4} + \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{5}{4} - \frac{3}{4}\right) = \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x - 2) = (2x - 1)(x - 2). \end{aligned}$$

Второй способ, кроме этого, дает возможность выяснить вопрос о том, разлагается квадратный трехчлен на множители или нет. Именно, если число, остающееся после выделения полного квадрата суммы или разности из квадратного трехчлена, не является квадратом со знаком минус, то трехчлен не может быть разложен на множители.

Пример. Разложить на множители  $x^2 + 2x - 6$ .

Решение.

$$x^2 + 2x - 6 = (x + 1)^2 - 7.$$

Этот трехчлен на множители не разлагается.

Пример. Разложить на множители  $x^2 + 4x + 5$ .

Решение.

$$x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1.$$

Разложение на множители тоже невозможно.

Оба приема разложения можно применять к трехчленам, содержащим, кроме выбранной главной буквы, также и другие буквы.

Пример. Разложить на множители

$$x^2 + 2(a + b)x - (3a^2 - 10ab + 3b^2).$$

Решение.

$$\begin{aligned} x^2 + 2(a + b)x - (3a^2 - 10ab + 3b^2) &= \\ &= x^2 + 2(a + b)x + (a + b)^2 - (a + b)^2 - (3a^2 - 10ab + 3b^2) = \\ &= (x + a + b)^2 - (a^2 + 2ab + b^2 + 3a^2 - 10ab + 3b^2) = \\ &= (x + a + b)^2 - (4a^2 - 8ab + 4b^2) = \\ &= (x + a + b)^2 - (2a - 2b)^2 = \\ &= (x + 3a - b)(x - a + 3b). \end{aligned}$$

### Упражнения

Разложить на множители:

- |                      |                                           |
|----------------------|-------------------------------------------|
| 1. $x^2 + 6x + 5$ .  | 4. $4x^2 + 4x - 3$ .                      |
| 2. $x^2 - 8x + 15$ . | 5. $2x^2 - x - 3$ .                       |
| 3. $x^2 - 8x - 9$ .  | 6. $x^2 - 2(a + b)x + a^2 + 2ab - 3b^2$ . |
-

## ГЛАВА V

### ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДРОБНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

#### § 1. Особенность дробных выражений

Как говорилось уже (гл. III, § 2), алгебраическое выражение называется дробным, если в числе указанных в нем действий есть деление на выражение, содержащее буквы. Это является причиной некоторых особенностей дробных алгебраических выражений по сравнению с выражениями целыми.

Мы знаем, что действия сложения, вычитания и умножения выполняемы всегда, каковы бы ни были числа, над которыми производятся эти действия. Поэтому и всякое целое алгебраическое выражение имеет смысл при всевозможных численных значениях входящих в него букв. Иначе обстоит дело с выражениями дробными. Из-за того, что деление на нуль невозможно, всякое дробное выражение не имеет смысла при таких значениях букв, при которых знаменатель обращается в нуль.

Например, выражение

$$\frac{3+x}{3-x}$$

теряет смысл при  $x=3$ . При всех остальных значениях  $x$  это выражение имеет смысл, ибо  $3-x$  обращается в нуль только при  $x=3$ .

Точно так же выражение

$$\frac{5-x}{(2+x)(3-x)}$$

теряет смысл при  $x=-2$  и при  $x=3$ , а при всех остальных значениях для  $x$  имеет смысл.

Выражение

$$\frac{ab}{a-b}$$

теряет смысл при  $a=b$  и имеет смысл при любых неравных значениях  $a$  и  $b$  и т. д.

Рассмотрим, наконец, следующее алгебраическое выражение:

$$\frac{a^3}{a^2},$$

или, что то же самое,

$$a^3 : a^2.$$

По смыслу действия деления,  $a^3 : a^2$  есть такое число, которое, будучи умножено на  $a^2$ , дает  $a^3$ . Очевидно, что таким числом является  $a$ , ибо  $a \cdot a^2 = a^3$ .

Таким образом,

$$\frac{a^3}{a^2} = a.$$

Однако, это равенство верно не при всех численных значениях  $a$ . Именно, если  $a=0$ , то правая часть равенства есть 0, а левая превращается в выражение  $\frac{0}{0}$ . Это выражение, как мы уже видели, приходится рассматривать как не имеющее смысла.

Итак, равенство

$$a^3 : a^2 = a$$

оказывается верным при всех значениях  $a$ , кроме значения  $a=0$ .

Точно так же равенство

$$(x^2 - 4) : (x - 2) = x + 2$$

верно при всех значениях  $x$ , кроме  $x=2$ . Действительно,

$$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2),$$

и следовательно, по определению деления, если  $x \neq 2$ , то

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2.$$

А при  $x=2$  левая часть равенства теряет смысл.

Как было сказано раньше, тождеством называется равенство двух выражений, верное при всех *допустимых* значениях входящих в него букв, причем под *допустимыми* значениями понимаются такие, при которых оба сравниваемых выражения имеют смысл.

В силу этого определения равенства

$$\frac{a^3}{a^2} = a \text{ и } (x^2 - 4) : (x - 2) = x + 2$$

следует рассматривать как *тождества*. Однако при тождественных преобразованиях с дробными выражениями необходимо помнить о том, что при тех значениях букв, при которых одна или обе части равенства теряют смысл, и все «тождество» превращается в равенство, лишенное смысла. Особенно важно помнить об этом в случае, когда дробное выражение получается в результате решения какой-либо задачи. В этом случае необходимо подвергнуть отдельному исследо-

ванию такие числовые значения для букв, при которых дробное выражение теряет смысл.

Пример. При каких значениях  $y$  имеет место равенство

$$y(x-2) = x^2 - 4?$$

Решение. Очевидно, что  $y$  находится посредством действия деления. Именно,

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2.$$

Форма ответа  $y = x + 2$  такова, что при любом значении числа  $x$   $y$  получает вполне определенное значение. Так, при  $x = 0$   $y = 2$ ; при  $x = 1$   $y = 3$  и т. д. В частности, при  $x = 2$   $y = 4$ .

Однако последнее утверждение неточно. Действительно, при  $x = 2$  наше равенство превращается в такое:

$$(2 - 2)y = 2^2 - 4$$

или  $0 \cdot y = 0$ , верное при *любом* значении  $y$ , а не только при  $y = 4$ . Поэтому точный ответ на поставленный вопрос будет такой:

$$\text{при } x \neq 2 \quad y = x + 2,$$

при  $x = 2$   $y$  может быть равен любому числу.

### Упражнения

При каких значениях букв имеют смысл следующие алгебраические выражения:

1.  $\frac{1}{x-9}.$

3.  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$

5.  $a^3 : (b-3)a.$

2.  $\frac{x^2 - 64}{x - 8}.$

4.  $\frac{2}{x+1} - \frac{3x}{x-1}.$

6.  $\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}.$

## § 2. Основное свойство дроби

При преобразованиях дробных алгебраических выражений постоянно приходится пользоваться следующим *основным свойством* дроби.

*Значение дроби не изменяется, если числитель и знаменатель умножить на одно и то же число, отличное от нуля.*

В буквенной записи это свойство выглядит так: при любом  $m \neq 0$  имеет место равенство

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}.$$

Читая это равенство справа налево, мы приходим к следующему правилу: *любой общий множитель числителя и знаменателя дроби может быть сокращен.*



Это свойство в обеих формулировках в применении к численным дробям хорошо известно и широко пользуется при действиях над дробями. В первой формулировке — при приведении дробей к общему знаменателю, во второй — при сокращении дробей. Например,

$$\frac{36}{39} = \frac{3 \cdot 12}{3 \cdot 13} = \frac{12}{13};$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}.$$

В первом примере мы произвели сокращение дроби на 3, во втором для приведения дробей к общему знаменателю мы умножили числитель и знаменатель первой дроби на 3, второй дроби — на 2.

В арифметике это свойство используется в применении к дробям, числитель и знаменатель которых — целые числа, и к множителям, также являющимися целыми числами. В алгебре под буквами понимаются любые числа: целые и дробные, положительные и отрицательные. Поэтому в алгебраической дроби числитель и знаменатель, даже если они имеют вид целых алгебраических выражений, могут принимать не только целые, но и дробные значения. Соответственно и множитель тоже может принимать дробные значения.

Поэтому, желая распространить основное свойство дроби на дроби алгебраические, следует его предварительно доказать при самых общих предположениях.

Доказательство основного свойства. Нам нужно доказать, что если  $m \neq 0$ , то  $\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb}$ .

Дробь  $\frac{a}{b}$  есть частное от деления числа  $a$  на число  $b$ , т. е. такое число, которое при умножении на делитель  $b$  дает делимое  $a$ . Обозначив  $\frac{a}{b}$  через  $x$ , мы будем иметь равенство  $bx = a$ . Умножив обе части этого равенства на любое число  $m$ , мы получим снова верное равенство

$$mbx = ma.$$

По условию,  $m \neq 0$ . Тогда и  $mb \neq 0$ , ибо  $b \neq 0$  (иначе частное  $\frac{a}{b}$  не имело бы смысла), а произведение двух не равных нулю чисел не равно нулю. Таким образом,  $x$  есть такое число, которое при умножении на не равное нулю число  $mb$  дает число  $ma$ . Следовательно, по определению действия деления,  $x = \frac{ma}{mb}$ . Но буквой  $x$  была обозначена дробь  $\frac{a}{b}$ . Следовательно,

$$\frac{a}{b} = \frac{ma}{mb},$$

что и требовалось доказать.

### § 3. Деление целых алгебраических выражений

Если требуется разделить одно целое алгебраическое выражение на другое, результат всегда может быть записан в виде дроби, в числителе и знаменателе которой находятся эти выражения. Такие дроби называются *алгебраическими дробями*. Однако часто бывает, что частное от деления двух целых алгебраических выражений в свою очередь оказывается целым алгебраическим выражением. В этом случае говорят, что первое выражение *делится* на второе.

Например,

$$\frac{x^3 - 4}{x - 2} = x + 2,$$

т. е. многочлен  $x^3 - 4$  *делится* на многочлен  $x - 2$ . Точно так же одночлен  $a^3$  делится на  $a^2$ , так как  $a^3 : a^2 = a$  и т. д. Но одночлен  $a$  не делится на одночлен  $b$ , так как их частное  $\frac{a}{b}$  не может быть записано в виде целого алгебраического выражения.

Понятие делимости в применении к целым алгебраическим выражениям сходно с понятием делимости целых чисел: мы говорим, что одно целое число делится на другое целое число, если их частное есть целое число (например, 6 делится на 2, но 6 не делится на 4 и т. д.). Однако не следует их путать одно с другим. Так, например, одночлен  $2x$  делится в алгебраическом смысле на одночлен  $3x$ , так как их частное равно одночлену  $\frac{2}{3}$ , т. е. целому алгебраическому выражению. Однако при целых значениях для буквы  $x$  число  $2x$  никогда не делится в арифметическом смысле на число  $3x$ , так как частное от их деления есть *дробное* число  $\frac{2}{3}$ .

Цель ближайших параграфов состоит в установлении некоторых приемов деления целых алгебраических выражений и в установлении некоторых признаков, по которым можно узнать, делится или не делится одно данное выражение на другое.

### § 4. Деление степеней с одинаковыми основаниями

**Пример.** Выполнить деление

$$a^5 : a^5.$$

**Решение.** Без всяких вычислений ясно, что частное равно 1. Такой же результат будет при делении одинаковых степеней с любым показателем.

**Пример.** Выполнить деление

$$a^7 : a^3.$$

**Решение.** Очевидно, что результат равен  $a^4$ , ибо  $a^4 \cdot a^3 = a^7$ . Результат получен посредством *вычитания* показателей степени в делимом и делителе на основании того, что при проверке деления умножением показатели *складываются*.

**Правило.** При делении степеней с одинаковыми основаниями в предположении, что показатель степени в делимом больше показателя степени в делителе, частное равно степени с тем же основанием и с показателем, равным разности показателей в делимом и делителе.

Короче: при делении степеней с одинаковыми основаниями показатели *вычитаются*.

Действительно, если  $m > n$ , то

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{m-n} a^n}{a^n} = a^{m-n}.$$

**Пример.** Выполнить деление

$$a^8 : a^5.$$

**Решение.** Запишем то же самое в виде дроби  $\frac{a^8}{a^5}$  и произведем сокращение на  $a^3$ , учитывая, что  $a^5 = a^3 \cdot a^2$ . Получим

$$\frac{a^8}{a^5} = \frac{a^8}{a^3 \cdot a^2} = \frac{1}{a^2}.$$

Результат имеет такой же вид при любых показателях степени, если только показатель в делимом меньше показателя в делителе.

Если  $m < n$ , то

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m \cdot a^{n-m}} = \frac{1}{a^{n-m}}.$$

При делении степеней с одинаковыми основаниями мы рассмотрели все три случая, которые могут представиться.

**Случай 1.** Показатели степени равны.

**Случай 2.** Показатель степени в делимом больше показателя степени в делителе.

**Случай 3.** Показатель степени в делимом меньше показателя степени в делителе.

Мы убедились в том, что в первых двух случаях в частном получается целое алгебраическое выражение. Таким образом,  $a^m$  делится на  $a^n$ , если  $m$  равно  $n$  или  $m$  больше  $n$ . В третьем случае ( $m < n$ )  $a^m$  не делится на  $a^n$ , ибо частное  $\frac{1}{a^{n-m}}$  не может быть представлено в виде одночлена или многочлена. Действительно, никакой одночлен или многочлен при умножении на  $a^{n-m}$  не может дать 1.

## Упражнения

Выполнить деление:

1.  $a^7 : a^3$ .      2.  $c^2 : c^5$ .      3.  $b^{11} : b^{11}$ .

Найти  $x$ :

4.  $x : a^2 = a^5$ .      5.  $a^3 : x = a^7$ .      6.  $x \cdot a^2 = a^4$ .

## § 5. Деление одночленов

Пример. Выполнить деление

$$6a^3b^2c : (3abc).$$

Решение. Требуется найти такое выражение, которое, будучи умножено на  $3abc$ , даст  $6a^3b^2c$ . Легко найти *одночлен*, удовлетворяющий этому требованию. Мы знаем, что при умножении одночленов коэффициенты перемножаются, а показатели степени при каждой букве складываются. Поэтому в искомом одночлене коэффициент равен  $6 : 3 = 2$ , буква  $a$  должна входить с показателем  $3 - 1 = 2$ , буква  $b$  с показателем  $2 - 1 = 1$ , а буква  $c$  совсем не должна входить. Таким образом,

$$6a^3b^2c : (3abc) = 2a^2b.$$

Такое же рассуждение можно привести в любом другом случае деления одночлена на одночлен: *необходимо только, чтобы все буквы, входящие в делитель, входили и в делимое с меньшими показателями степени.*

Только что отмеченное условие есть условие *делимости* одночленов, т. е. условие, при выполнении которого частное от деления одночленов есть целое алгебраическое выражение, именно одночлен.

Мы приходим к следующему правилу.

*Чтобы поделить одночлен на одночлен, в случае, если все буквы, входящие в делитель, входят и в делимое с меньшими показателями, нужно:*

1. *Поделить коэффициенты и частное принять за коэффициент результата.*

2. *Буквы, входящие в делимое с большими показателями, чем в делитель, вписать в результат с показателями, равными разностям соответствующих показателей в делимом и делителе.*

3. *Буквы, входящие в делимое, но не входящие в делитель, вписать в результат с неизменными показателями.*

4. *Буквы, входящие в делимое и в делитель с одинаковыми показателями, опустить.*

Менее подробно: *при делении одночленов коэффициенты нужно поделить, а показатели при одинаковых буквах вычесть.*

Можно, однако, этим правилом не пользоваться, а сразу записать дробь и произвести возможные сокращения. Рассмотрим тот же пример:

$$6a^3b^2c : (3abc) = \frac{6a^3b^2c}{3abc} = \frac{2a^2b}{1} = 2a^2b.$$

Здесь условие делимости выполнено. Посмотрим теперь, какой вид имеет результат, если условие делимости не выполнено.

Пример. Выполнить деление

$$27a^3bc^3 : (9ab^3c).$$

Решение. Здесь условие делимости не выполнено, так как буква  $b$  входит в делитель в большей степени, чем в делимое. Однако мы можем записать дробь и произвести сокращение.

Получим

$$\frac{27a^3bc^3}{9ab^3c} = \frac{3a^2c}{b}.$$

Очевидно, что полученное выражение  $\frac{3a^2c}{b}$  не может равняться целому алгебраическому выражению, т. е. многочлену или одночлену, так как произведение одночлена  $b$  на любой многочлен (или одночлен) равно многочлену (или одночлену), содержащему букву  $b$ , а  $3a^2c$  буквы  $b$  не содержит.

Таким образом, всегда, если только условие делимости не выполнено, частное от деления двух одночленов не является целым алгебраическим выражением. Это частное можно записать только в виде алгебраической дроби.

### Упражнения

Выполнить деление одночленов:

1.  $3a^3bc : (-4ab).$
2.  $\frac{3}{5} x^2yz^3 : \left(\frac{4}{7} xyz^2\right).$
3.  $0,1a^3bc : (-0,01ab).$
4.  $\frac{63ab^3xy^6}{9abxy}.$
5.  $\frac{3,2a^3bpq}{2,4ab}.$

Записать следующие выражения в виде алгебраической дроби и произвести сокращения:

6.  $\frac{2}{5} a^3bc : \left(\frac{1}{3} ab^2c\right).$
7.  $7ab^2c : (5a^3b^3c^3).$
8.  $25a^4x^1y : (7a^3xy^2).$

### § 6. Деление многочлена на одночлен

Правило умножения многочлена на одночлен было выведено на основании распределительного закона умножения суммы на число. Точно так же правило деления многочлена на одночлен основывается на распределительном законе, видоизмененном применительно к делению. Это видоизменение выглядит так:

*Частное от деления суммы нескольких слагаемых на число равно сумме частных, получающихся при делении каждого слагаемого на то же число.*

Запишем это правило в виде формулы:

$$(a + b + c + d) : m = a : m + b : m + c : m + d : m$$

или при обозначении частного в виде дроби

$$\frac{a + b + c + d}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \frac{d}{m}.$$

Докажем эту формулу. Мы знаем, что поделить какое-либо число на число  $m$  — это все равно, что умножить его на обратное число  $\frac{1}{m}$ . Следовательно,

$$(a + b + c + d) : m = (a + b + c + d) \cdot \frac{1}{m}.$$

Для умножения суммы на число, в каком бы виде это число ни было выражено, справедлив распределительный закон. Поэтому

$$(a + b + c + d) \frac{1}{m} = a \cdot \frac{1}{m} + b \cdot \frac{1}{m} + c \cdot \frac{1}{m} + d \cdot \frac{1}{m}.$$

А теперь воспользуемся тем, что умножить какое-либо число на  $\frac{1}{m}$  все равно, что разделить его на  $m$ , т. е.

$$a \cdot \frac{1}{m} + b \cdot \frac{1}{m} + c \cdot \frac{1}{m} + d \cdot \frac{1}{m} = a : m + b : m + c : m + d : m.$$

Соединяя выкладки в одну цепочку равенств, получим

$$\begin{aligned} (a + b + c + d) : m &= (a + b + c + d) \cdot \frac{1}{m} = \\ &= a \cdot \frac{1}{m} + b \cdot \frac{1}{m} + c \cdot \frac{1}{m} + d \cdot \frac{1}{m} = a : m + b : m + c : m + d : m, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Мы сформулировали и доказали правило деления суммы на число для суммы четырех слагаемых. Очевидно, однако, что те же рассуждения можно применить к сумме любого числа слагаемых.

Применим теперь доказанное правило к делению многочлена на одночлен.

Пример. Выполнить деление:

$$\frac{3a^3b - 2ab^2 + 6a^2b^3}{12ab}.$$

(Заметим, что мы для обозначения действия деления прибегаем к черте. Здесь это удобнее знака:, так как избавляет от необходимости ставить скобки.)

Решение. По правилу деления суммы на число имеем

$$\frac{3a^2b - 2ab^2 + 6a^3b^2}{12ab} = \frac{3a^2b}{12ab} - \frac{2ab^2}{12ab} + \frac{6a^3b^2}{12ab} = \frac{1}{4}a - \frac{1}{6}b + \frac{1}{2}a^2b.$$

Можно решить этот пример и другим способом, посредством вынесения за скобку:

$$\begin{aligned} \frac{3a^2b - 2ab^2 + 6a^3b^2}{12ab} &= \frac{ab(3a - 2b + 6a^2b)}{12ab} = \frac{3a - 2b + 6a^2b}{12} = \\ &= \frac{1}{4}a - \frac{1}{6}b + \frac{1}{2}a^2b. \end{aligned}$$

Вынесение за скобку здесь оказывается полезным потому, что само действие вынесения за скобку есть действие деления, но не указанное явно. Действительно, что значит вынести за скобку одночлен  $ab$  из многочлена  $3a^2b - 2ab^2 + 6a^3b^2$ ? Какой многочлен останется в скобке при выполнении этого действия? Очевидно, такой многочлен, который при умножении на  $ab$  дает  $3a^2b - 2ab^2 + 6a^3b^2$ , т. е., по определению деления, частное от деления многочлена  $3a^2b - 2ab^2 + 6a^3b^2$  на одночлен  $ab$ .

$$\text{Ответ. } \frac{1}{4}a - \frac{1}{6}b + \frac{1}{2}a^2b.$$

*Многочлен делится на одночлен, очевидно, в том и только в том случае, если каждый его член делится на этот одночлен.*

Если это условие не выполнено, то чаще всего следует ограничиться записью результата в виде дроби и, если это возможно, произвести сокращение посредством вынесения подходящих множителей в числителе за скобку.

Пример. Упростить выражение

$$(x^3y - xy^3) : 3x^2y.$$

$$\text{Решение. } (x^3y - xy^3) : 3x^2y = \frac{x^3y - xy^3}{3x^2y} = \frac{xy(x^2 - y^2)}{3x^2y} = \frac{x^2 - y^2}{3x}.$$

Пример. Упростить выражение

$$\frac{a+b}{ab}.$$

Решение. В этом примере нельзя произвести сокращение. Поэтому никаких упрощающих преобразований произвести нельзя.

*Ответ. Упростить нельзя.*

Иногда бывает целесообразно произвести почленное деление многочлена на одночлен и в случае, если отдельные члены многочлена на этот одночлен не делятся. При этом в результате получается сумма нескольких слагаемых, часть которых (или все) имеют вид дробей.

Рассмотрим преобразование такого типа для двух последних примеров

$$\frac{x^2y - xy^2}{3x^2y} = \frac{x^2y}{3x^2y} - \frac{xy^2}{3x^2y} = \frac{1}{3}x - \frac{y}{3x},$$

$$\frac{a+b}{ab} = \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} = \frac{1}{b} + \frac{1}{a}.$$

Повторяем, что такого рода преобразования применяются сравнительно редко. Еще реже применяется вынесение за скобку одночлена так, что при этом в скобке получается сумма дробей. Но все же иногда такое преобразование бывает нужно.

Пример.

$$\begin{aligned} abcd + 2abc + 2abd + 2acd + 2bcd &= \\ &= abcd \left( 1 + \frac{2abc}{abcd} + \frac{2abd}{abcd} + \frac{2acd}{abcd} + \frac{2bcd}{abcd} \right) = \\ &= abcd \left( 1 + \frac{2}{d} + \frac{2}{c} + \frac{2}{b} + \frac{2}{a} \right). \end{aligned}$$

Мы вынесли  $abcd$  за скобку. При этом в скобке остается частное от деления данного многочлена на  $abcd$ . После выполнения возможных сокращений в скобке получилась сумма очень простых дробей, так что все алгебраическое выражение стало проще на вид. Однако мы его несколько «испортили». В первоначальной записи оно было целым и имело смысл при всех значениях букв  $a, b, c, d$ . В новой записи появились дроби, и теперь выражение не имеет смысла, если хотя бы одна буква принимает значение, равное нулю.

### Упражнения

Выполнить деление:

1.  $(3x^2y - 0,1xy^2 + 7,3x^2y) : (-0,1xy)$ .

2.  $(x^2yz + xy^2z + xyz^2) : (xyz)$ .

3.  $\frac{a^2b + a^2b^2 - 3ab^3}{2ab}$ .

4. Преобразовать посредством почленного деления  $\frac{xy + xz + yz}{xyz}$ .

5. Вынести за скобку  $x^2y^2z^2$  в многочлене  $x^2y^2z^2 - xy^2z^2 + x^2yz^2$ .

## § 7. Применение формул сокращенного умножения к делению многочлена на многочлен

Формулы сокращенного умножения могут быть применены и к делению многочлена на многочлен. Действительно, действие деления заключается в том, что находится один из множителей, если задан второй и их произведение. Частное есть такое число или алгебраическое выражение, которое, будучи умножено на делитель, дает делимое. Если делимое имеет вид результата какой-либо из формул



сокращенного умножения, а делитель имеет вид одного из множителей в той же формуле, то частное равно другому множителю. Рассмотрим несколько примеров.

Пример. Выполнить деление

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2}.$$

Решение. Здесь делимое есть разность квадратов двух чисел  $x$  и  $2$ , а делитель есть разность первых степеней тех же чисел. Следовательно, частное равно их сумме

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2.$$

Пример. Выполнить деление

$$\frac{a^3 + 8b^3}{a + 2b}.$$

Решение. Здесь делимое есть сумма кубов чисел  $a$  и  $2b$ , делитель равен сумме этих чисел. Поэтому частное есть неполный квадрат их разности

$$\frac{a^3 + 8b^3}{a + 2b} = a^2 - 2ab + 4b^2.$$

Пример. Выполнить деление

$$\frac{a^3 - 27b^3}{a^2 + 3ab + 9b^2}.$$

Решение. Здесь делимое есть разность кубов  $a$  и  $3b$ , делитель — неполный квадрат суммы тех же чисел. Следовательно,

$$\frac{a^3 - 27b^3}{a^2 + 3ab + 9b^2} = a - 3b.$$

Пример. Выполнить деление

$$\frac{x^2 + 4xy + 4y^2}{x + 2y}.$$

Решение. Делимое есть квадрат суммы чисел  $x$  и  $2y$ , т. е. произведение двух множителей, каждый из которых равен сумме чисел  $x$  и  $2y$ . Делитель равен просто сумме этих чисел. Следовательно,

$$\frac{x^2 + 4xy + 4y^2}{x + 2y} = x + 2y.$$

Пример.  $\frac{a^2 + 2ab + b^2 - c^2}{a + b + c} = \frac{(a + b)^2 - c^2}{a + b + c} = a + b - c.$

## Упражнения

Выполнить деление:

$$1. \frac{x^4 - 16y^4}{x^2 + 4y^2}. \quad 3. \frac{(a+b)^2 - (c+d)^2}{a+b-c-d}.$$

$$2. \frac{x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3}{x+y}. \quad 4. \frac{x^4 + 6x^2 + 9}{x^2 + 3}.$$

Решить уравнения относительно буквы  $x$ :

$$5. x(a+2b) = a^2 - 4b^2. \quad 6. (a-3b)x = a^2 - 6ab + 9b^2.$$

$$7. (a-b-c)x = a^2 - 2ab + b^2 - c^2.$$

### § 8. Общие замечания о делении многочлена на многочлен

Частное от деления многочлена на многочлен иногда оказывается равным многочлену, но чаще оказывается дробным алгебраическим выражением, которое не может быть преобразовано в целое — в многочлен или одночлен. В первом случае говорят, что многочлен, являющийся делимым, *делится* на многочлен, являющийся делителем. Во втором — что не *делится*.

Укажем некоторые признаки, по которым можно узнать, что делимость не имеет места.

**Первый признак.** *Если степень делимого относительно какой-нибудь буквы меньше степени делителя относительно той же буквы, то частное не может быть целым алгебраическим выражением.*

Например,  $\frac{x+2}{x^2+1}$ ,  $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ ,  $\frac{a^2+b^2+c}{c^2-a-b}$  не могут быть представлены в виде целых алгебраических выражений — одночленов или многочленов.

Докажем это для первого примера. Допустим, что частное является многочленом или одночленом. Тогда этот многочлен (или одночлен), будучи умножен на  $x^2+1$ , должен равняться  $x+2$ , и следовательно, его старший член, умноженный на  $x^2$ , должен равняться  $x$ . Но это невозможно, так как произведение  $x^2$  на любой одночлен содержит  $x$  в степени, показатель которой не меньше 2.

Такое же рассуждение можно привести для любых рациональных дробей, зависящих от одной буквы, если степень числителя меньше степени знаменателя. Доказательство для дробей, зависящих более чем от одной буквы, несколько сложнее из-за того, что членов, содержащих наивысшую степень выбранной буквы, может быть несколько.

**Второй признак.** *Если существуют такие численные значения для букв, при которых делитель обращается в нуль, а делимое не обращается в нуль, то частное не может быть целым алгебраическим выражением.*

Дробь  $\frac{a^3 + b^3}{a - b}$  нельзя представить в виде целого выражения, так как, например, при  $a = 1$  и  $b = 1$   $a - b = 0$ , но  $a^3 + b^3 = 2 \neq 0$ .

Совершенно строгое доказательство второго признака не очень просто и требует довольно глубокого исследования свойств алгебраических тождеств.

### Упражнения

Пользуясь признаками делимости, убедиться в том, что

1.  $a^3 - ab + b$  не делится на  $b^3 + a + 1$ .
2.  $x^3 + x^2 - x - 3$  не делится на  $x - 2$ .
3.  $\frac{a^4 + b^4}{a + b}$  не равно целому алгебраическому выражению.

## § 9. Деление многочленов, зависящих от одной буквы

Возьмем два многочлена  $x^3 + 2x^2 - x - 3$  и  $x^2 - x + 1$  и умножим их, пользуясь первым правилом умножения многочлена на многочлен. Получим

$$\begin{aligned} (x^3 + 2x^2 - x - 3)(x^2 - x + 1) &= \\ &= x^3(x^2 - x + 1) + 2x^2(x^2 - x + 1) - x(x^2 - x + 1) - \\ &\quad - 3(x^2 - x + 1) = x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x - 3. \end{aligned}$$

Запишем результат в следующей форме:

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x - 3 &= x^3(x^2 - x + 1) + 2x^2(x^2 - x + 1) - \\ &\quad - x(x^2 - x + 1) - 3(x^2 - x + 1). \end{aligned}$$

Теперь представим себе, что перед нами поставлена обратная задача. Даны многочлены  $x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x - 3$  и  $x^2 - x + 1$ . Требуется определить их частное.

В рассматриваемом примере эта задача уже решена, частное равно  $x^3 + 2x^2 - x - 3$ . Выясним теперь некоторые свойства членов частного, при помощи которых мы смогли бы определить их последовательно один за другим, если бы частное нам не было известно.

Прежде всего старший член частного при умножении на старший член делителя дает старший член делимого. Далее, составим разность

$$x^5 + x^4 - 2x^3 + 2x - 3 - x^3(x^2 - x + 1).$$

Эта разность, очевидно, равна

$$2x^2(x^2 - x + 1) - x(x^2 - x + 1) - 3(x^2 - x + 1).$$

Отсюда мы можем заключить, что произведение второго члена частного на старший член делителя равно старшему члену составленной разности.



ности. Старший член полученной разности делим на старший член делителя, частное —3 принимаем за четвертый член частного. При следующем вычитании получается разность, равная нулю.

По такой же схеме можно производить деление многочленов всегда, если только деление выполнимо. Заметим только, что при вычислении разностей нет необходимости выписывать все члены делимого, их следует записывать по мере появления подобных членов в вычитаемых многочленах.

Рассмотрим еще один пример

$$(x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1) : (x^2 - x + 1).$$

Действуем по описанной схеме

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \quad | \quad x^2 - x + 1 \\
 x^4 - \quad x^3 + \quad x^2 \phantom{- 2x + 1} \\
 \hline
 - \quad x^3 + 2x^2 - 2x \phantom{+ 1} \\
 - \quad x^3 + \quad x^2 - \quad x \phantom{+ 1} \\
 \hline
 \phantom{-} \quad x^2 - \quad x + 1 \\
 \phantom{-} \quad x^2 - \quad x + 1 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Однако может случиться, что делимое не делится на делитель. Рассмотрим пример этого рода:

$$(x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 3) : (x^2 + 3x - 1).$$

Схема деления дает следующий результат:

$$\begin{array}{r}
 x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 3 \quad | \quad x^2 + 3x - 1 \\
 x^4 + 3x^3 - \quad x^2 \phantom{+ 6x - 3} \\
 \hline
 - \quad x^3 - 2x^2 + 6x \phantom{- 3} \\
 - \quad x^3 - 3x^2 + \quad x \phantom{- 3} \\
 \hline
 \phantom{-} \quad x^2 + 5x - 3 \\
 \phantom{-} \quad x^2 + 3x - 1 \\
 \hline
 \phantom{-} \quad 2x - 2
 \end{array}$$

Мы продолжали деление до тех пор, пока это было возможно, именно, пока степень разности не оказалась меньше степени делителя. Эта последняя разность называется *остатком* от деления данных многочленов. *Степень остатка меньше степени делителя*. Многочлен, записанный на месте частного, называется *неполным частным* от деления данных многочленов.

Очевидно, что для получения полного частного нужно к неполному частному добавить частное от деления остатка на делитель. Таким образом,

$$\begin{aligned}
 (x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 3) : (x^2 + 3x - 1) = \\
 = x^2 - x + 1 + \frac{2x - 2}{x^2 + 3x - 1},
 \end{aligned}$$



на одночлен. В случае, если числитель и знаменатель дроби являются многочленами, для сокращения дроби нужно разложить числитель и знаменатель на множители.

Если окажется, что числитель и знаменатель имеют общие множители, то можно их сократить. Если общих множителей нет, то упрощение дроби посредством сокращения невозможно.

Пример.

$$\frac{a^2 - b^2}{a^3 - b^3} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)(a^2 + ab + b^2)} = \frac{a+b}{a^2 + ab + b^2}.$$

Пример.

$$\begin{aligned} \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a+b)^2 + (a-b)^2} &= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2} = \frac{4ab}{2a^2 + 2b^2} = \\ &= \frac{4ab}{2(a^2 + b^2)} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Здесь нам удалось сократить только численный множитель.

### Упражнения

Сократить дроби:

1.  $\frac{x^2y + xy^2}{x^2 - y^2}.$
2.  $\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 9}.$
3.  $\frac{a^4 - 2a^2 + 1}{a^3 - 3a^2 + 3a - 1}.$
4.  $\frac{(x+2y)^2 - (2x+y)^2}{(x+3y)^2 - (3x+y)^2}.$

## § 11. Упрощение алгебраической дроби с дробными коэффициентами

Если числитель и знаменатель рациональной дроби являются многочленами с дробными коэффициентами, то для упрощения целесообразно умножить числитель и знаменатель на общий знаменатель всех коэффициентов. Это можно сделать в силу основного свойства дроби.

Пример.

$$\frac{\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b}{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{6}ab + \frac{1}{3}b^2} = \frac{12\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b\right)}{12\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{6}ab + \frac{1}{3}b^2\right)} = \frac{4a - 6b}{3a^2 - 2ab + 4b^2}.$$

### Упражнения

Упростить дроби:

1.  $\frac{\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y - \frac{2}{15}z}{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{10}y^2 - \frac{5}{6}z^2}.$
2.  $\frac{0,02a^2 - 0,06ab + 0,08b^2}{0,01a^2 + 0,03ab + 0,05b^2}.$

## § 12. Сложение и вычитание алгебраических дробей

Для того чтобы сложить или вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить или вычесть их числители, оставив знаменатель без изменения. Например,

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1.$$

Это следует из распределительного закона, примененного к частному от деления алгебраической суммы на число

$$\frac{a+b+c+d}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \frac{d}{m},$$

прочитанного справа налево.

Если же знаменатели различны, дроби нужно предварительно привести к одному знаменателю. В качестве общего знаменателя можно взять любое общее кратное знаменателей данных дробей, т. е. любой многочлен, делящийся на каждый из этих знаменателей. В частности, за общий знаменатель можно принять произведение знаменателей данных дробей. Выгодно выбирать общий знаменатель, возможно более низкой степени. Для того чтобы показать, как следует находить общий знаменатель, рассмотрим несколько примеров.

Пример. Сложить дроби  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2}$ .

Решение. Сперва нужно привести эти дроби к общему знаменателю. В качестве общего знаменателя здесь можно взять  $a^2b^2$ , так как  $a^2b^2$  делится на  $a^2$ , на  $ab$  и на  $b^2$ .

Для того чтобы привести дроби к общему знаменателю, умножим числитель и знаменатель первой дроби на  $b^2$ , второй — на  $ab$ , третьей — на  $a^2$ . Получим

$$\frac{1}{a^2} = \frac{b^2}{a^2b^2}; \quad \frac{1}{ab} = \frac{ab}{a^2b^2}; \quad \frac{1}{b^2} = \frac{a^2}{a^2b^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2} = \frac{b^2}{a^2b^2} + \frac{ab}{a^2b^2} + \frac{a^2}{a^2b^2} = \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2b^2}.$$

Можно принять за общий знаменатель и произведение знаменателей данных дробей:  $a^2 \cdot ab \cdot b^2 = a^3b^3$ . При таком выборе общего знаменателя мы получим

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2} = \frac{ab^3}{a^3b^3} + \frac{a^2b^2}{a^3b^3} + \frac{a^3b}{a^3b^3} = \frac{ab^3 + a^2b^2 + a^3b}{a^3b^3}.$$

Здесь возможно сокращение дробей. Действительно,

$$\frac{ab^3 + a^2b^2 + a^3b}{a^3b^3} = \frac{ab(b^2 + ab + a^2)}{a^3b^3} = \frac{b^2 + ab + a^2}{a^2b^2}.$$



Таким образом, неэкономный выбор общего знаменателя приводит к появлению общих множителей в числителе и знаменателе дроби, получающейся в результате. Хотя их в конце концов можно сократить, но это удлиняет и усложняет выкладки.

Пример. Выполнить сложение и вычитание

$$\frac{4a}{3bc} + \frac{3b}{4ac} - \frac{5c}{6ab}.$$

Решение. Здесь за общий знаменатель следует принять  $12abc$ . Числитель и знаменатель первой дроби нужно умножить на  $4a$ , второй дроби — на  $3b$  и третьей дроби — на  $2c$ . Получим

$$\frac{4a}{3bc} + \frac{3b}{4ac} - \frac{5c}{6ab} = \frac{16a^2}{12abc} + \frac{9b^2}{12abc} - \frac{10c^2}{12abc} = \frac{16a^2 + 9b^2 - 10c^2}{12abc}.$$

Пример. Выполнить сложение и вычитание

$$\frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} - \frac{3x}{x^2-y^2}.$$

Решение. Здесь мы можем заметить, что  $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ . Поэтому за общий знаменатель мы можем принять  $(x-y)(x+y)$ . Приняв это во внимание, проводим выкладки

$$\begin{aligned} \frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} - \frac{3x}{x^2-y^2} &= \frac{2(x-y)}{(x+y)(x-y)} + \frac{x+y}{(x-y)(x+y)} - \\ &- \frac{3x}{(x-y)(x+y)} = \frac{2x-2y+x+y-3x}{(x-y)(x+y)} = -\frac{y}{x^2-y^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ. } -\frac{y}{x^2-y^2}.$$

Таким образом, если знаменателями слагаемых дробей являются многочлены, то для целесообразного выбора общего знаменателя нужно предварительно разложить эти многочлены на множители, если это возможно. За общий знаменатель нужно взять произведение всех полученных множителей, взятых в наибольшей степени, в которой они входят в знаменатели данных дробей.

Для каждой дроби нужно найти дополнительный множитель, на который нужно умножить числитель и знаменатель данной дроби, чтобы получить дробь со знаменателем, равным выбранному общему знаменателю.

Пример. Выполнить сложение и вычитание

$$\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-9} - \frac{2}{x^2-4x+3}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-9} - \frac{2}{x^2-4x+3} &= \\ &= \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{(x-3)(x+3)} - \frac{2}{(x-1)(x-3)}. \end{aligned}$$

Здесь за общий знаменатель следует принять

$$(x-1)(x+1)(x-3)(x+3).$$

Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{(x-3)(x+3)} - \frac{2}{(x-1)(x-3)} = \\ & = \frac{(x-3)(x+3) + (x-1)(x+1) - 2(x+1)(x+3)}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)} = \\ & = \frac{x^2 - 9 + x^2 - 1 - 2x^2 - 8x - 6}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)} = \frac{-8x - 16}{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)}. \end{aligned}$$

Пример. Выполнить сложение и вычитание

$$\frac{a^3}{a-1} - a^2 - a - 1.$$

Решение. Здесь требуется сложить дробь  $\frac{a^3}{a-1}$  с многочленом  $-a^2 - a - 1$ . Для приведения к общему знаменателю умножим и разделим многочлен на  $a-1$ . Получим

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{a-1} - a^2 - a - 1 &= \frac{a^3}{a-1} - \frac{(a^2 + a + 1)(a-1)}{a-1} = \\ &= \frac{a^3 - (a^3 - 1)}{a-1} = \frac{1}{a-1}. \end{aligned}$$

### Упражнения

Сложить дроби:

1.  $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}.$
2.  $\frac{1}{a(a+1)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)}.$
3.  $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}.$
4.  $\frac{3x}{x+2} - \frac{1}{x} - \frac{2x}{x-2}.$
5.  $x + \frac{1}{x}.$
6.  $1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{(x+1)^2}{x^2}.$

## § 13. Умножение алгебраических дробей

При умножении алгебраических дробей применяется то же правило, что и при умножении численных дробей. Именно, *произведение двух дробей равно дроби, числитель которой равен произведению числителей перемножаемых дробей, а знаменатель равен произведению знаменателей, т. е.*

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}.$$

Здесь  $A, B, C, D$  обозначают любые алгебраические выражения.

В применении к обыкновенным численным дробям, т. е. в случае, если  $A, B, C, D$  — целые положительные числа, это правило известно из арифметики. В общем виде справедливость этого правила нуждается в доказательстве, так как значениями выражений  $A, B, C, D$  могут быть не только целые числа, но и дробные, не только положительные, но и отрицательные.

Проведем доказательство правила. Обозначим  $\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D}$  буквой  $x$  и составим произведение

$$BDx = BD \cdot \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = B \cdot \frac{A}{B} \cdot D \cdot \frac{C}{D}.$$

По определению действия деления  $\frac{A}{B}$  есть число, которое при умножении на  $B$  дает  $A$ . Следовательно,  $B \cdot \frac{A}{B} = A$ . Таким же образом  $D \cdot \frac{C}{D} = C$ . Итак,  $BDx = AC$ . Отсюда заключаем, в силу определения действия деления, что  $x = \frac{AC}{BD}$ , что и требовалось доказать.

Пример. 
$$\frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+2}{x+3} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+2)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}.$$

### Упражнения

Перемножить дроби:

$$\begin{array}{ll} 1. \frac{x}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2} & 3. \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) \left(1 + \frac{1}{x+2}\right). \\ 2. \frac{a+b}{a^2+b^2} \cdot \frac{a^4-b^4}{2ab} & 4. (x^2-1) \cdot \frac{2x}{x^2-1}. \end{array}$$

## § 14. Деление алгебраических дробей

**Правило.** Частное от деления двух дробей равно дроби, числитель которой равен произведению числителя делимого на знаменатель делителя, а знаменатель равен произведению знаменателя делимого на числитель делителя, т. е.

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC}.$$

Это правило иначе формулируется так: частное от деления двух дробей равно произведению делимого на дробь, числитель которой равен знаменателю делителя, а знаменатель равен числителю делителя.

Доказательство правила проводится посредством проверки деления умножением. Имеем:

$$\frac{AD}{BC} \cdot \frac{C}{D} = \frac{ADC}{BCD} = \frac{A}{B}.$$

Следовательно,

$$\frac{AD}{BC} = \frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D},$$

что и требовалось доказать.

Пример.

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2} : \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x^2 - 2x + 1)(x+1)}{(x^2 + 3x + 2)(x-1)} = \frac{(x-1)^2(x+1)}{(x+1)(x+2)(x-1)} = \frac{x-1}{x+2}.$$

### Упражнения

Выполнить деление дробей:

$$1. \frac{x-1}{x+1} : \frac{1}{x^2-1}.$$

$$3. x : \frac{x-1}{x+1}.$$

$$2. \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 + 4ab + 3b^2} : \frac{a^2 - b^2}{a^2 - 9b^2}.$$

$$4. \frac{x^2 - 3ax - a^2}{x+a} : (x-a).$$

### § 15. Упрощение дроби, числитель и знаменатель которой являются алгебраическими суммами дробей

Пример. Упростить выражение

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}.$$

Решение. Здесь можно выполнить сложение дробей в числителе и знаменателе и затем поделить полученные результаты:

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{b-a}{ab}} = \frac{b+a}{ab} \cdot \frac{ab}{b-a} = \frac{b+a}{b-a}.$$

Однако проще непосредственно воспользоваться основным свойством дроби, именно умножить числитель и знаменатель на  $ab$ :

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{ab \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)}{ab \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)} = \frac{b+a}{b-a}.$$

Для упрощения дроби, числитель и знаменатель которой являются алгебраическими суммами дробей, следует умножить числитель и знаменатель на общее кратное знаменателей всех дробей, находящихся в числителе и знаменателе.

Пример. Упростить выражение

$$\frac{2 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}{x + \frac{x}{x^2-1}}.$$

Решение. Умножаем числитель и знаменатель на  $x^2 - 1$ . Получим

$$\frac{2(x^2-1) + x+1 - (x-1)}{x(x^2-1) + x} = \frac{2x^2 - 2 + x + 1 - x + 1}{x^3 - x + x} = \frac{2x^2}{x^3} = \frac{2}{x}.$$

### Упражнения

Упростить дроби:

$$1. \frac{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}}. \quad 2. \frac{\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)}}{\frac{6x}{x+2} - \frac{x}{x}}.$$

## § 16. Общие выводы

В § 12—14 мы убедились в том, что сумму, разность, произведение и частное двух алгебраических дробей можно снова представить в виде алгебраической дроби или, в отдельных частных случаях, в виде многочлена. Отсюда следует, что любое дробное алгебраическое выражение может быть преобразовано к виду алгебраической дроби (или многочлена). Действительно, всякое дробное алгебраическое выражение есть запись результата действий сложения, вычитания, умножения и деления над числами и буквами. В результате первых по порядку действий сложения, вычитания и умножения мы приходим к многочленам. В результате первого деления мы получим алгебраическую дробь. Результаты дальнейших действий над алгебраическими дробями будут представлять собой алгебраические дроби, и окончательный результат также будет алгебраической дробью. При этом возможно, что многочлен, находящийся в числителе дроби, поделится на многочлен, находящийся в знаменателе, и тогда окончательный результат преобразуется к виду многочлена.

Пример:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) : \left( \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} - \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right) = \\ & = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} : \frac{(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)^2}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} = \\ & = \frac{x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2}{x^2 - y^2} : \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - x^4 + 2x^2y^2 - y^4}{(x^2-y^2)(x^2+y^2)} = \\ & = \frac{4xy}{x^2-y^2} : \frac{(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{4x^2y^2} = \frac{x^2+y^2}{xy}. \end{aligned}$$

Как уже говорилось в гл. III, цепочка тождественных преобразований алгебраического выражения называется алгебраической выкладкой.

В результате изложенного в гл. III, IV, V мы видим, что алгебраическая выкладка может вестись в различных направлениях. При преобразовании целых алгебраических выражений можно раскрывать скобки, можно, наоборот, производить вынесение за скобку, при выполнении сложения многочлена и дроби можно сумму представить в виде одной дроби, а иногда бывает полезно выделение из данной дроби целой части, что приводит к разложению данной дроби на сумму многочлена и дроби и т. д.

Само собой разумеется, что алгебраическая выкладка должна проводиться верно. Но этого недостаточно для полного овладения искусством алгебраической выкладки. Приведем один очень грубый пример:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

Выкладка проведена верно, но бессмысленность ее бросается в глаза. Зачем было производить какие-то преобразования, чтобы вернуться к исходному выражению?

Алгебраическая выкладка всегда должна быть направлена к определенной цели. В упражнениях цель бывает обычно указана в условии, например «разложить на множители», «сложить дроби» и т. д. Часто целью является упрощение данного алгебраического выражения. Но в применениях алгебры к решению практических задач нужно уметь *найти цель* в проведении выкладки.

**Пример.** При решении некоторой задачи в общем виде ответ получен в виде формулы  $x = \frac{a^2 + b^2}{a - b}$ . Требуется вычислить  $x$  с точностью до 0,1 при  $a = 51, 52, 53, 54, 55$  и при  $b = 3, 4, 5$ .

**Решение.** Здесь целесообразно сделать следующее преобразование:

$$x = \frac{a^2 - b^2 + 2b^2}{a - b} = a + b + \frac{2b^2}{a - b}.$$

По внешнему виду мы даже несколько усложнили ответ, но *считать* после преобразования становится много легче, так как мы избавились от необходимости возводить большое число  $a$  в квадрат, а затем делить большое число  $a^2 + b^2$  на  $a - b$ . Например, при  $a = 51, b = 3$  по исходной формуле

$$x = \frac{51^2 + 9}{48} = \frac{2610}{48} \approx 54,4,$$

по преобразованной —

$$x = 54 + \frac{18}{48} \approx 54,4.$$

## ГЛАВА VI

### ПРОПОРЦИИ И ПРОПОРЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ

#### § 1. Определения

1. *Отношением* числа  $a$  к числу  $b$  называется частное  $\frac{a}{b}$ ,  $a$  называется *предыдущим*,  $b$  — *последующим членом* отношения.

2. *Пропорцией* называется равенство, каждая часть которого является отношением двух чисел. В пропорции

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

члены  $a$  и  $d$  называются *крайними*, а  $b$  и  $c$  *средними*.

При изложении свойств пропорций будем считать, что ни один из членов пропорции не равен нулю.

Пример.  $\frac{7}{2}$  — отношение числа 7 к числу 2. Предыдущий член здесь 7, последующий 2.

Пример.  $\frac{10}{5} = \frac{4}{2}$  — пропорция. Крайние члены здесь 10 и 2, средние — 4 и 5.

#### § 2. Главное свойство пропорции

**Теорема 1.** *Во всякой пропорции произведение крайних членов равно произведению средних.*

**Доказательство.** Дана пропорция

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \quad (1)$$

Умножим обе части равенства (1) на  $bd$ , получим

$$ad = bc. \quad (2)$$

Теорема доказана.

**Теорема 2 (обратная).** *Если произведение двух чисел равно произведению двух других чисел, то из этих четырех чисел можно составить пропорцию, крайними членами которой являются*

*сомножители одного из двух произведений, а средними—сомножители другого.*

При этом предполагается, что ни один из сомножителей не равен нулю.

Доказательство. Пусть

$$ad = bc,$$

$a, b, c, d$  все отличны от нуля. Разделим обе части равенства на  $bd$ , получим

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Теорема доказана.

Пример.  $\frac{10}{5} = \frac{4}{2}$  — пропорция. Произведение крайних ее членов равно 20, произведение средних ее членов также равно 20.

Пример.  $8 \cdot 9 = 3 \cdot 24$  — равенство двух произведений. Разделим обе части этого равенства на  $9 \cdot 24$ , получим пропорцию

$$\frac{8}{24} = \frac{3}{9}.$$

### § 3. Определение неизвестного члена пропорции

*Теорема 3. Средний член пропорции равен произведению крайних, деленному на другой средний. Крайний член пропорции равен произведению средних, деленному на другой крайний.*

Пусть

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \quad (1)$$

Покажем, что

$$b = \frac{ad}{c}, \quad (2)$$

$$a = \frac{bc}{d}. \quad (3)$$

На основании теоремы 1 имеем

$$ad = bc. \quad (4)$$

Разделим обе части равенства (4) на  $c$ , получим равенство (2). Разделим обе части равенства (4) на  $d$ , получим равенство (3). Теорема доказана.

Пример. Найти  $x$ , если  $\frac{x}{5} = \frac{4}{2}$ .

Решение.  $x = \frac{4 \cdot 5}{2}$ ;  $x = 10$ .

Пример. Найти  $x$ , если  $\frac{10}{5} = \frac{x}{2}$ .

Решение.  $x = \frac{10 \cdot 2}{5}$ ;  $x = 4$ .



#### § 4. Перестановка членов пропорции

**Теорема 4.** *Во всякой пропорции можно переставить средние члены, переставить крайние члены, переставить и средние члены и крайние, средние поставить на место крайних, а крайние на место средних.*

Иными словами, если

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad (1)$$

то

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \quad (2)$$

(переставлены средние члены),

$$\frac{d}{b} = \frac{c}{a} \quad (3)$$

(в (1) переставлены крайние члены),

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a} \quad (4)$$

(в (1) переставлены и средние и крайние члены),

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c} \quad (5)$$

(средние поставлены на место крайних, крайние — на место средних).

**Доказательство.** В пропорции (1)

$$ad = bc \quad (6)$$

Разделим обе части равенства (6) на  $cd$ , получим равенство (2). Точно так же, разделив обе части равенства (6) на  $ab$ , а затем на  $ac$ , получим равенства (3) и (4). Равенство (5) получается из равенства (4) посредством перестановки отношений. Теорема доказана.

**Следствие.** Переставим отношения в равенствах (1), (2), (3), получим еще три пропорции

$$\frac{c}{d} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{b}{d} = \frac{a}{c},$$

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b}.$$

Таким образом, *всякую пропорцию посредством перестановки ее членов можно представить в восьми различных видах.*

### § 5. Производные пропорции

**Теорема 5.** 1) Во всякой пропорции сумма членов первого отношения так относится к последующему члену этого отношения, как сумма членов второго отношения относится к своему последующему.

2) Во всякой пропорции разность членов первого отношения так относится к последующему члену этого отношения, как разность членов второго отношения относится к своему последующему.

Иными словами, если

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad (1)$$

то

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}, \quad (2)$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}. \quad (3)$$

**Доказательство.** Прибавим к каждой части равенства (1) по 1, получим равенство (2). Вычтем из каждой части равенства (1) по 1, получим равенство (3). Теорема доказана.

**Теорема 6.** 1) Во всякой пропорции сумма членов первого отношения так относится к предыдущему члену этого отношения, как сумма членов второго отношения относится к своему предыдущему.

2) Во всякой пропорции разность членов первого отношения так относится к предыдущему члену этого отношения, как разность членов второго отношения относится к своему предыдущему.

Иными словами, если

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

то

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}, \quad (4)$$

$$\frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c}. \quad (5)$$

**Доказательство.** Разделим равенство (2) почленно на равенство (1), т. е. левую часть равенства (2) разделим на левую часть равенства (1), а правую часть равенства (2) на правую часть равенства (1). Получим равенство (4). Разделив равенство (3) почленно на равенство (1), получим равенство (5). Теорема доказана.

**Теорема 7.** Во всякой пропорции сумма членов первого отношения так относится к их разности, как сумма членов второго

*отношения относятся к их разности, если только эти разности отличны от нуля.*

Иными словами, если

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad a - b \neq 0, \quad c - d \neq 0,$$

то

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}. \quad (6)$$

Доказательство. Разделив почленно равенство (4) на равенство (5), получим равенство (6).

## § 6. Ряд равных отношений

*Теорема 8. Если даны несколько равных отношений, то сумма всех предыдущих членов отношений относится к сумме всех последующих как любой из предыдущих к своему последующему.*

Доказательство. Пусть имеется несколько равных отношений

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n}. \quad (1)$$

Обозначим результат деления  $a_1$  на  $b_1$  буквой  $q$ . Так как все отношения ряда (1) равны между собой, каждое из них также равно  $q$ .

Таким образом,

$$\frac{a_1}{b_1} = q; \quad \frac{a_2}{b_2} = q; \quad \dots; \quad \frac{a_n}{b_n} = q.$$

Отсюда

$$a_1 = b_1 q; \quad a_2 = b_2 q; \quad \dots, \quad a_n = b_n q. \quad (2)$$

Сложив почленно все равенства (2), имеем

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = (b_1 + b_2 + \dots + b_n) q,$$

откуда

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = q = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a}{b_n}$$

Теорема доказана.

**З а д а ч а.** Дано, что

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Доказать, что при любых  $m_1, m_2, m_3$ , отличных от нуля,

$$\frac{a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3}{b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Решение. Умножим каждый член первого отношения на  $m_1$ , получим пропорцию

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 m_1}{b_1 m_1}.$$

Точно так же

$$\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_2 m_2}{b_2 m_2}; \quad \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_3 m_3}{b_3 m_3}.$$

Значит,

$$\frac{a_1 m_1}{b_1 m_1} = \frac{a_2 m_2}{b_2 m_2} = \frac{a_3 m_3}{b_3 m_3}.$$

На основании теоремы 8 имеем

$$\frac{a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3}{b_1 m_1 + b_2 m_2 + b_3 m_3} = \frac{a_1 m_1}{b_1 m_1} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}.$$

Задача. Решить уравнение  $\frac{x+2}{x+1} = \frac{5}{4}$ .

Решение. Пользуясь теоремой 7 § 5, имеем

$$\frac{2x+3}{1} = \frac{9}{1}, \quad \text{т. е.} \quad 2x=6; \quad x=3.$$

### Упражнения

1. Решить уравнение  $\frac{2x+5}{2x-1} = \frac{5}{3}$ .

2. Доказать, что из  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$  следует, что  $\frac{a_1^2}{b_1^2} = \frac{a_2^2}{b_2^2} = \frac{a_3^2}{b_3^2}$ .

## § 7. Пропорциональная зависимость

Мы много раз составляли уравнения, выражающие зависимость между величинами, и могли наблюдать, что зависимости эти бывают весьма разнообразны.

При решении многих задач мы встречаемся с двумя величинами, зависимость между которыми такова, что при изменении этих величин их отношение остается неизменным. Такие величины называются *прямо пропорциональными*, а зависимость между ними — *пропорциональной зависимостью*.

Для примера приведем несколько задач, в которых мы встретимся с величинами, находящимися в пропорциональной зависимости.

Задача. Скорость течения реки 3 км в час. Плот за  $t$  часов прошел вниз по реке  $S$  км. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $S$  и  $t$ .

Ответ.  $S = 3t$ .

Задача. С каждого гектара собрано 30 ц ржи и, таким образом, с  $k$  га собрано  $A$  ц. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $A$  и  $k$ .

Ответ.  $A = 30k$ .

**Задача.** Основание прямоугольника 2 см, высота  $h$  см, площадь  $Q$  см<sup>2</sup>. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $Q$  и  $h$ .  
*Ответ.*  $Q = 2h$ .

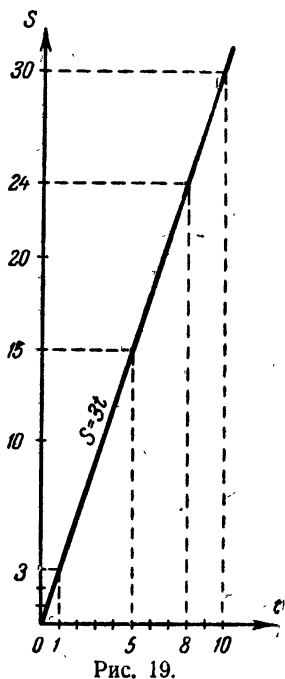
**Задача.** 1 м материи стоит 20 руб. За  $t$  м этой материи уплатили  $N$  руб. Составить уравнение, выражающее зависимость между  $N$  и  $t$ .

*Ответ.*  $N = 20t$ .

Мы рассмотрели четыре задачи, которые по своему содержанию относятся к различным областям практической деятельности. Нетрудно убедиться, что в каждой из этих задач мы действительно имеем дело с прямо пропорциональными величинами.

Так, в первой задаче отношение расстояния (в км), пройденного плотом, к времени (в часах), в течение которого плот находился в пути, всегда одно и то же и равно 3. Поэтому расстояние, которое проходит плот вниз по реке, пропорционально времени, в течение которого плот находится в пути, при условии, что скорость течения реки повсюду одна и та же.

Точно так же во второй задаче количество ржи, собранной с нескольких гектаров, пропорционально количеству ржи, собранной с одного гектара, при условии, что с каждого гектара собрано по одному и тому же количеству ржи и т. д.



Заметим, что уравнения, к которым мы пришли в рассмотренных задачах, имеют один и тот же вид. В этих уравнениях одна из величин равна произведению некоторого числового множителя на другую величину. Этот множитель называется коэффициентом пропорциональности. В первой задаче коэффициент пропорциональности равен 3, во второй задаче он равен 30, в третьей задаче он равен 2, в четвертой задаче он равен 20.

Таким образом, пропорциональная зависимость между величинами всегда выражается уравнением  $y = kx$ , где  $k$  — коэффициент пропорциональности. Известно, что зависимость между двумя величинами может быть наглядно представлена таблицей, а затем и графиком.

Для примера представим таблицей зависимость, выражаемую уравнением  $S = 3t$  (первая задача):

|     |   |   |    |    |    |
|-----|---|---|----|----|----|
| $t$ | 0 | 1 | 5  | 8  | 10 |
| $S$ | 0 | 3 | 15 | 24 | 30 |

Построим график зависимости  $S=3t$  (рис. 19). Обратим внимание на следующие обстоятельства:

1. Отношение чисел, находящихся в одном столбце таблицы, повсюду одно и то же и равно коэффициенту пропорциональности:

$$\frac{3}{1} = \frac{15}{5} = \frac{24}{8} = \frac{30}{10}$$

и т. д. (для первого столбца это отношение не имеет смысла, так как на ноль делить нельзя).

2. График представляет собой луч, выходящий из начала координат (при  $t=0$ ,  $S=0$ ): (Доказательство этого утверждения здесь провести нельзя, так как для этого требуются некоторые сведения из геометрии.)

То же самое можно наблюдать и при графическом представлении любой другой пропорциональной зависимости между двумя величинами.

### Упражнения

1. Представить таблицей и графиком зависимость  $Q=2h$ .

Указать, какие из следующих утверждений справедливы:

2. Рост человека пропорционален его возрасту.

3. Площадь квадрата пропорциональна его стороне.

4. Длина окружности пропорциональна ее радиусу.

5. Длина окружности пропорциональна ее диаметру.

6. Длина солнечной тени, отбрасываемой деревом, пропорциональна высоте дерева.

7. Площадь круга пропорциональна его радиусу.

8. Площадь круга пропорциональна квадрату его радиуса.

---

## ГЛАВА VII

### УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ С ОДНИМ НЕИЗВЕСТНЫМ

#### § 1. Два свойства уравнений

Мы много раз пользовались уравнениями и знаем, что они очень полезны для решения различных задач. Чтобы успешно пользоваться уравнениями, надо хорошо знать их свойства и изучить различные приемы их решения.

Решение уравнений — один из основных вопросов курса алгебры. К этому вопросу мы будем возвращаться несколько раз. Сейчас рассмотрим два основных свойства уравнений.

*Свойство 1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число или один и тот же многочлен относительно неизвестного, то полученное в результате этого новое уравнение имеет те же и только те же решения, что и исходное уравнение.*

Или, другими словами: *уравнение не теряет и не приобретает решения, когда к обеим частям его прибавляется одно и то же число или один и тот же многочлен относительно неизвестного.*

Разъясним сначала, почему уравнение не может потерять решение, когда к обеим частям его прибавляется одно и то же число или один и тот же многочлен относительно неизвестного.

Рассмотрим уравнение

$$1 + \frac{3x-1}{7} + \frac{2x-1}{3} = 2x - 4. \quad (1)$$

Это уравнение имеет решение  $x=5$ . При  $x=5$  уравнение (1) превращается в тождество  $6=6$ . Прибавим теперь к каждой части уравнения (1) по 20, получим новое уравнение

$$\left(1 + \frac{3x-1}{7} + \frac{2x-1}{3}\right) + 20 = (2x - 4) + 20. \quad (2)$$

После замены в уравнении (2) буквы  $x$  числом 5 каждое из выражений, заключенных в скобки, дает в результате опять 6, и таким образом мы в каждой части получим 26. Разница между уравнением (1) и уравнением (2) заключается лишь в том, что при  $x=5$  уравнение (1) превращается в тождество  $6=6$ , а уравнение (2) превращается в тождество  $26=26$ .

Если бы к каждой части уравнения (1) прибавили не по 20, а по —200, новое уравнение опять при  $x=5$  превратилось бы в тождество. Различие между этим уравнением и уравнением (1) заключалось бы только в том, что в каждой части нового уравнения получилось бы по —194, а не по 6, как в уравнении (1).

Если бы мы к каждой части уравнения прибавили по многочлену  $x^2 + x + 2$ , новое уравнение опять при  $x=5$  превратилось бы в тождество  $38=38$  (многочлен  $x^2 + x + 2$  при  $x=5$  принимает значение 32).

Выходит, что решение  $x=5$  не теряется, когда к каждой части уравнения (1) прибавляется одно и то же число или один и тот же многочлен относительно неизвестного.

То, что мы показали на уравнении (1), можно так же показать и на каком угодно другом уравнении. Так как вычитание любого числа и любого многочлена можно заменить сложением, уравнение не может потерять решение и тогда, когда от каждой части его отнимается одно и то же число или один и тот же многочлен относительно неизвестного.

Разъясним теперь, почему уравнение не может *приобрести* решение, когда к обеим частям его прибавляется одно и то же число или один и тот же многочлен относительно неизвестного. Рассмотрим опять уравнение (1) и (2) и выясним, почему при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) мы не могли приобрести решения.

Для того чтобы от уравнения (2) перейти к уравнению (1), достаточно от каждой части его отнять по 20 (или к каждой части прибавить по —20). Значит, при переходе от уравнения (2) к уравнению (1) мы не можем потерять решение.

Допустим теперь, что при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) мы приобрели какое-нибудь решение (скажем,  $x=2,5$ ). Тогда при переходе от уравнения (2) назад к уравнению (1) мы должны потерять это решение, а это невозможно.

**З а м е ч а н и е.** Так как буквы в алгебре обозначают числа, все сказанное об уравнениях с числовыми коэффициентами относится также и к уравнениям с буквенными коэффициентами.

Покажем на примерах, как свойство 1 можно применять к решению уравнений.

**Пример.** Решить уравнение  $x - 7 = 11$ .

**Решение.** Прибавим к каждой части уравнения по 7, получим

$$x = 18.$$

**Пример.** Решить уравнение  $x + 30 = 10$ .

**Решение.** Вычтем из каждой части уравнения по 30 (или прибавим по —30). Получим  $x = -20$ .

**Пример.** Решить уравнение  $x - a = b$ .

**Решение.** Прибавим к каждой части уравнения  $a$ , получим

$$x = b + a.$$



Следствие из свойства 1 уравнений. *Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив при этом его знак на противоположный.*

Это утверждение справедливо для любых уравнений. Чтобы упростить изложение, мы проведем его на частном примере.

Дано уравнение

$$3x + 1 = -2x - 7. \quad (3)$$

Покажем, что  $-2x$  можно перенести с противоположным знаком в левую часть, т. е. покажем, что при переходе от уравнения (3) к уравнению

$$3x + 2x + 1 = -7 \quad (4)$$

ни одно решение не теряется и не приобретает.

К каждой части уравнения (3) прибавим  $2x$ , получим уравнение (4). На основании свойства 1 уравнений переход от уравнения (3) к уравнению (4) происходит без потери и приобретения решений.

Все сказанное относительно  $-2x$  можно повторить относительно любого другого члена уравнения (3).

Этим свойством уравнений широко пользуются при решении уравнений. Именно, решая уравнения, часто переносят члены, содержащие неизвестные, в одну часть, а известные — в другую. Поясним это примером.

Пример. Решить уравнение

$$3x + 1 = -2x - 7.$$

Решение. Перенесем неизвестные члены в левую часть, а известные в правую, получим

$$5x = -8,$$

отсюда

$$x = -\frac{8}{5}.$$

Свойство 2. *Если обе части уравнения умножить или разделить на какое-нибудь число, отличное от нуля, то полученное в результате этого новое уравнение имеет те же и только те же решения, что и исходное уравнение.*

Иными словами: уравнение не приобретает и не теряет решений от того, что обе части его умножены или разделены на одно и то же число, отличное от нуля.

Прежде чем разъяснить свойство 2, заметим, что его достаточно разъяснить для умножения, так как деление можно всегда заменить умножением на обратное число.

Мы и здесь, как и при разъяснении свойства 1, сначала расскажем, почему при умножении (или делении) обеих частей уравнения на одно и то же число, отличное от нуля, ни одно решение не может быть

потеряно. После этого разъяснится и то, что ни одно решение не может быть при этом приобретено.

Возьмем какое-нибудь уравнение. Все, что будет показано на этом уравнении, можно показать и на любом другом уравнении.

Уравнение

$$x + \frac{5x+3}{11} + \frac{x+3}{9} = 2x - 2 \quad (5)$$

имеет решение  $x=6$ . Действительно, при  $x=6$  уравнение превращается в тождество  $10=10$ .

Умножим каждую часть уравнения (5) на 20, получим уравнение

$$20 \left( x + \frac{5x+3}{11} + \frac{x+3}{9} \right) = 20(2x - 2). \quad (6)$$

При  $x=6$  уравнение (6) тоже превращается в тождество

$$20 \cdot 10 = 20 \cdot 10.$$

Если бы мы умножили обе части уравнения на  $\frac{1}{100}$ , мы получили бы уравнение, которое при  $x=6$  превращается в тождество

$$\frac{1}{100} \cdot 10 = \frac{1}{100} \cdot 10.$$

Выходит, что решение  $x=6$  не теряется при умножении или делении каждой части уравнения (5) на одно и то же число.

От уравнения (6) можно перейти обратно к уравнению (5) посредством умножения каждой части его на  $\frac{1}{20}$ .

Ясно поэтому, что при переходе от уравнения (6) к уравнению (5) *не может быть потери решения*.

Отсюда вытекает, что при переходе от уравнения (5) к уравнению (6) не могло быть и приобретения решения. Здесь опять, как и при изучении свойства 1, важно понять, что решения, приобретенные при переходе от уравнения (5) к уравнению (6), должны были бы потеряться при обратном переходе, а потеря решения здесь невозможна.

**З а м е ч а н и е 1.** Рассмотрим уравнение

$$3x - 7 = 11. \quad (7)$$

Оно имеет единственное решение  $x=6$ . Умножим каждую часть его на нуль. Получим уравнение

$$0(3x - 7) = 11 \cdot 0. \quad (8)$$

Уравнению (8) удовлетворяет не только  $x=6$ , но и любое другое значение  $x$ . (Например, положим  $x=1\,000$ , получим тождество  $0 \cdot 2993 = 0 \cdot 11$ .)

Выходит, что при переходе от уравнения (7) к уравнению (8) мы приобрели бесконечное множество решений. Вот почему в формулировке свой-

ства 2 указано, что число, на которое умножаются обе части уравнения, должно быть отлично от нуля.

**З а м е ч а н и е 2.** Так как буквы в алгебре обозначают числа, все сказанное об уравнениях с числовыми коэффициентами относится также и к уравнениям с буквенными коэффициентами. При этом необходимо только следить за тем, чтобы при умножении обеих частей уравнения на буквенное выражение не вкралось умножение на нуль. (Дело в том, что буквенные выражения могут при некоторых значениях входящих в них букв равняться нулю.)

Покажем на примерах, как свойство 2 можно применять к решению уравнений.

**Пример.** Решить уравнение  $2x = -3$ .

**Решение.** Разделим обе части уравнения на 2, получим

$$x = -\frac{3}{2}.$$

**Пример.** Решить уравнение  $15 - x = 20$ .

**Решение.** Перенесем 15 в правую часть, получим

$$-x = 5.$$

Умножим теперь обе части уравнения на  $-1$ , получим

$$x = -5.$$

**Пример.** Решить уравнение  $ax = b$ .

**Решение.** Если  $a \neq 0$ , то, разделив обе части уравнения на  $a$ , получим  $x = \frac{b}{a}$ .

Если же  $a = 0$ , то уравнение имеет вид  $0 \cdot x = b$ , и тогда, если  $b \neq 0$ , уравнение решений не имеет, если же  $b = 0$ , уравнение есть тождество, так как ему удовлетворяет любое значение  $x$ .

**Пример.** Решить уравнение  $\frac{x}{a} = b$ .

**Решение.** Здесь  $a \neq 0$ , так как иначе уравнение не имеет смысла. Умножив обе части уравнения на  $a$ , получим  $x = ab$ .

## § 2. Понятие о равносильности уравнений

**Определение.** Если каждое решение одного из уравнений является решением другого и каждое решение второго уравнения является решением первого, уравнения называются *равносильными*.

**Пример.** Уравнение

$$x + 4 = 15 \quad (1)$$

имеет единственное решение  $x = 11$ . Уравнение

$$2x - 3 = 19 \quad (2)$$

имеет также единственное решение  $x=11$ . Уравнение (1) и (2) равносильны.

Пример. Уравнение

$$(x-2)(x-3)=0 \quad (3)$$

имеет два решения:  $x_1=2$ ;  $x_2=3$ . Уравнение

$$10(x-2)(x-3)=0 \quad (4)$$

имеет также два решения:  $x_1=2$ ;  $x_2=3$ . Уравнение (3) и (4) равносильны.

Пример. Уравнения

$$(x-2)(x-3)=0 \quad (5)$$

и

$$(x-1)(x-2)(x-3)=0 \quad (6)$$

не равносильны. Действительно, уравнение (5) имеет два решения:  $x_1=2$ ;  $x_2=3$ , а уравнение (6) имеет три решения:  $x_1=1$ ;  $x_2=2$ ;  $x_3=3$ . Таким образом, каждое решение уравнения (5) является решением уравнения (6), но не каждое решение уравнения (6) является решением уравнения (5).

Теперь основные свойства уравнений можно сформулировать так:

**Свойство 1.** Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число или один и тот же многочлен относительно неизвестного, то полученное в результате этого новое уравнение равносильно данному.

**Свойство 2.** Если обе части уравнения умножить или разделить на какое-нибудь число, отличное от нуля, то полученное в результате этого новое уравнение равносильно данному.

### § 3. О некоторых преобразованиях уравнения, которые могут привести к потере или приобретению решений

При внимательном рассмотрении свойств 1 и 2 уравнений (§ 1) могут возникнуть два вопроса:

1. В § 1 говорится о прибавлении к обеим частям уравнения многочленов относительно неизвестного. А что произойдет с решениями уравнения, если к обеим частям его прибавить не многочлен относительно неизвестного, а выражение, содержащее неизвестное в знаменателе?

2. В § 1 говорится об умножении и делении обеих частей уравнения на любое число. А что произойдет с решением уравнения, если обе части его умножить или разделить на одно и то же выражение, содержащее неизвестное?

Мы сейчас приведем примеры, которые и помогут нам ответить на эти вопросы.

Пример. Уравнение

$$x - 3 = 5 \quad (1)$$

имеет решение  $x = 8$ . Уравнение

$$x - 3 + \frac{1}{x-8} = 5 + \frac{1}{x-8}, \quad (2)$$

полученное из уравнения (1) прибавлением к каждой части выражения  $\frac{1}{x-8}$ , не имеет решения  $x = 8$ , так как при этом значении равенство (2) не имеет смысла. При переходе от уравнения (1) к уравнению (2) решение  $x = 8$  потеряно, при обратном переходе от уравнения (2) к уравнению (1) решение  $x = 8$  приобретает.

Теперь ясно, почему в § 1 шла речь о прибавлении многочленов от неизвестного.

Пример. Уравнение

$$x - 3 = 0 \quad (3)$$

имеет единственное решение  $x = 3$ . Уравнение

$$(x - 3)(x - 2) = 0, \quad (4)$$

полученное из уравнения (3) умножением обеих частей на  $x - 2$ , имеет два решения:  $x_1 = 3$ ;  $x_2 = 2$ . При переходе от уравнения (3) к уравнению (4) приобретено решение  $x = 2$ . От уравнения (4) мы можем перейти к уравнению (3) делением обеих частей уравнения на  $x - 2$ . При этом решение  $x = 2$  будет потеряно.

Теперь ясно, почему в § 1 говорится об умножении и делении обеих частей уравнения на число, а не на выражения, которые содержат неизвестное.

Дело в том, что, умножая обе части уравнения на  $x - 2$ , мы умножаем их не на определенное число, а на выражение, которое при разных значениях  $x$  имеет разные значения и среди этих значений содержится нуль (при  $x = 2$  выражение  $x - 2$  равно нулю). Мы же знаем, что умножение обеих частей уравнения на нуль приводит к приобретению решений (см. § 1).

При делении на  $x - 2$  мы теряем решение потому, что в выражении  $x - 2$  скрыты разные значения и среди них содержится 0, на который делить нельзя.

Все сказанное здесь приводит к следующим выводам:

1. Прибавление к обеим частям уравнения выражения, содержащего неизвестное в знаменателе, может привести к потере и приобретению решений. При этом потерянными и приобретенными решениями могут быть только те значения неизвестного, при которых знаменатель этого выражения равен нулю.

2. Умножение обеих частей уравнения на многочлен от неизвестного может привести к приобретению решений. При этом

приобретенными решениями могут быть только те значения неизвестного, при которых этот многочлен равен нулю.

3. Деление обеих частей уравнения на многочлен от неизвестного может привести к потере решений. При этом потерянными решениями могут быть только те значения неизвестного, при которых этот многочлен равен нулю.

Задача. Обе части уравнения умножены на  $x - 3$ . Могло ли уравнение при этом приобрести решение  $x = 5$ ?

Ответ. Нет, так как при  $x = 5$  выражение  $x - 3$  отлично от нуля.

Задача. Какие решения может потерять уравнение, когда обе части его делят на  $(x - 2)(x - 7)$ ?

Ответ. Уравнение может потерять решения  $x = 2$  и  $x = 7$ , так как только при этих значениях  $x$  выражение  $(x - 2)(x - 7)$  равно нулю.

#### § 4. Решение уравнений

При решении уравнений можно поступать по следующему правилу:

1. Освободить уравнение от дробей.
2. Раскрыть скобки.
3. Перенести все члены, содержащие неизвестные, в одну часть уравнения (в левую), а известные в другую.
4. Сделать приведение подобных членов. В случае, если неизвестное входит в несколько членов с буквенными коэффициентами, вынести неизвестное за скобки.
5. Если в результате этих преобразований получится уравнение вида  $ax = b$ , то разделить обе части этого уравнения на коэффициент при неизвестном ( $a$ ), не допуская деления на нуль.

Пример. Решить уравнение

$$x(x-1) + \frac{5(2x-1)}{4} + \frac{9(x-1)}{5} = \frac{x(2x-1)}{2} + \frac{15}{4}.$$

Решение. Умножим обе части уравнения на 20 (20 — общее наименьшее кратное знаменателей)

$$20x(x-1) + 25(2x-1) + 36(x-1) = 10x(2x-1) + 75.$$

Раскрыв скобки, имеем

$$20x^2 - 20x + 50x - 25 + 36x - 36 = 20x^2 - 10x + 75.$$

Приведем подобные члены в каждой части уравнения

$$20x^2 + 66x - 61 = 20x^2 - 10x + 75.$$

Перенесем  $20x^2 - 10x$  в левую, а  $-61$  в правую часть. Получим

$$76x = 136, \quad x = 1\frac{15}{19}.$$

Пример. Решить уравнение

$$\frac{x}{a-b} + \frac{b}{a+b} = \frac{x}{a+b} + \frac{a}{a-b}. \quad (1)$$

Решение. Чтобы освободить уравнение от дробей, умножим обе части его на  $(a+b)(a-b)$ . Выражение  $(a+b)(a-b)$  отлично от нуля, так как иначе  $a+b=0$  или  $a-b=0$ , и тогда уравнение (1) не имело бы смысла. Получим

$$x(a+b) + b(a-b) = x(a-b) + a(a+b).$$

Раскроем скобки

$$ax + bx + ab - b^2 = ax - bx + a^2 + ab.$$

Перенесем неизвестные в левую, а известные в правую часть

$$ax + bx - ax + bx = a^2 + ab - ab + b^2.$$

(Можно упростить решение, вычеркнув сразу после раскрытия скобок из каждой части уравнения одинаковые слагаемые  $ax$  и  $ab$ .) Приведем подобные члены

$$2bx = a^2 + b^2.$$

Теперь нам следует делить обе части уравнения на  $2b$ . Это можно делать только в том случае, если  $b \neq 0$ . Предположим, что  $b \neq 0$ . Тогда

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2b}.$$

Если  $b=0$ , уравнение (1) принимает такой вид:

$$\frac{x}{a} = \frac{x}{a} + 1.$$

Это уравнение, очевидно, не имеет решения.

Ответ. Если  $b \neq 0$ ,  $x = \frac{a^2 + b^2}{2b}$ . Если  $b=0$ , уравнение решений не имеет.

Пример. Решить уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = 1.$$

Решение. Умножим обе части уравнения на  $abc$ . Выражение  $abc$  отлично от нуля, так как иначе уравнение не имело бы смысла. Получим

$$bcx + cax + abx = abc.$$

Вынесем  $x$  за скобки, получим

$$x(ab + bc + ca) = abc.$$

Предположим, что

$$ab + bc + ca \neq 0,$$

тогда

$$x = \frac{abc}{ab + bc + ca}.$$

Случай, когда  $ab + bc + ca = 0$ , представляет некоторые трудности для исследования, и потому мы оставим его без рассмотрения.

Ответ. Если  $ab + bc + ca \neq 0$ , то  $x = \frac{abc}{ab + bc + ca}$ .

### § 5. О числе решений уравнения первой степени с одним неизвестным

**Определение.** Уравнением первой степени с одним неизвестным называется такое уравнение, которое после освобождения его от дробей, раскрытия скобок, перенесения всех членов в одну часть и приведения подобных членов принимает вид

$$ax + b = 0,$$

где  $a$  и  $b$  — известные числа,  $a$  — называется *коэффициентом при неизвестном*,  $b$  — *свободным членом*.

Пример. Уравнения, рассмотренные в § 4, — уравнения первой степени с одним неизвестным.

Уравнение первой степени с одним неизвестным либо имеет единственное решение, либо совсем не имеет решения, либо имеет бесконечное множество решений.

1. Если коэффициент при неизвестном в уравнении первой степени с одним неизвестным отличен от нуля, уравнение имеет решение и притом единственное.

Пример. Уравнение  $3x + 2 = 0$  имеет единственное решение  $x = -\frac{2}{3}$ .

Пример. Уравнение  $2x = 0$  имеет единственное решение  $x = 0$ .

2. Если коэффициент при неизвестном в уравнении первой степени с одним неизвестным равен нулю, а свободный член не равен нулю, уравнение не имеет решения.

Пример. Уравнение  $0 \cdot x + 1 = 0$  не имеет решения, так как при любом значении  $x$  произведение  $0 \cdot x$  равно 0 и  $0 + 1 = 1$ .

3. Если коэффициент при неизвестном и свободный член в уравнении первой степени с одним неизвестным равны нулю, уравнение имеет бесконечное множество решений. Всякое число является решением такого уравнения.

В самом деле, уравнению  $0 \cdot x + 0 = 0$  удовлетворяет любое число, так как произведение любого числа и нуля равно нулю и  $0 + 0 = 0$ .



## § 6. Уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе

К уравнениям первой степени с одним неизвестным приводятся и некоторые уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе. Они решаются по тому же правилу, что и уравнения, не содержащие неизвестное в знаменателе.

Нужно только иметь в виду, что при освобождении такого уравнения от дробей приходится обе части его умножать на многочлен от неизвестного, и потому возможно приобретение решений или, как говорят, возможно появление посторонних решений.

**Пример.** Решить уравнение

$$\frac{6}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} + \frac{x^2}{x^2-4} = 0.$$

**Решение.** Умножим обе части уравнения на  $x^2 - 4$ .  
Получим

$$6(x-2) - (x+2)^2 + x^2 = 0.$$

Раскрываем скобки

$$6x - 12 - x^2 - 4x - 4 + x^2 = 0.$$

Отсюда

$$2x = 16, \quad x = 8.$$

Так как при умножении на  $x^2 - 4$  мы могли ввести посторонние решения, мы обязаны проверить полученный ответ. Подставим 8 вместо  $x$  в исходное уравнение. Имеем

$$\frac{6}{10} - \frac{10}{6} + \frac{64}{60} = \frac{3}{5} - \frac{5}{3} + \frac{16}{15} = \frac{9-25+16}{15} = 0.$$

Проверка показала, что  $x=8$  есть решение уравнения. Таким образом, мы посторонних решений не ввели. Впрочем, это можно было установить и проще: при  $x=8$  выражение  $x^2 - 4$  отлично от нуля, и потому  $x=8$  не может быть посторонним решением.

*Ответ.*  $x=8$ .

**Пример.** Решить уравнение

$$\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{4}{(x+2)(x+3)}.$$

**Решение.** Умножим обе части уравнения на  $(x+2)(x+3)$ .  
Получим

$$4(x+3) + 7(x+2) = 4,$$

$$4x + 7x = 4 - 12 - 14, \quad x = -2.$$

При  $x=-2$  уравнение не имеет смысла. Таким образом,  $x=-2$  есть постороннее решение.

*Ответ.* Уравнение решений не имеет.

## § 7. Решение задач при помощи уравнений.

### Понятие об исследовании задачи

Задачи, которые приходится решать при помощи уравнений, весьма разнообразны и весьма разнообразны способы их решения. Поэтому нельзя дать общее правило, руководствуясь которым можно было бы, не задумываясь, решить любую задачу при помощи уравнений. Часто бывает так, что способ, который с успехом применялся в решении одной задачи, непригоден для решения другой. Каждая задача требует для ее решения сообразительности, изобретательности.

Научиться решать задачи можно только на практике. Чем больше мы будем решать задач, чем больше будем думать над их решением, чем больше будем стараться изобретать различные способы их решения, тем больше мы разовьем свою сообразительность, тем лучше будем решать задачи.

Мы сейчас для примера рассмотрим несколько задач и расскажем, как эти задачи решаются.

Рекомендуем внимательно рассмотреть эти решения и на них учиться самостоятельно решать задачи.

**Задача.** Определить расстояние между пунктами  $A$  и  $B$ , если велосипедист, делающий по  $15$  км в час, проезжал это расстояние на  $2$  мин. скорее, чем другой велосипедист, проезжающий по  $12$  км в час?

**Решение.** Обозначим буквой  $x$  расстояние между  $A$  и  $B$  (в километрах). Первый велосипедист проехал это расстояние в  $\frac{x}{15}$  час., второй в  $\frac{x}{12}$  час. По условию,  $\frac{x}{15}$  на  $\frac{1}{30}$  меньше, чем  $\frac{x}{12}$ . Значит,

$$\frac{x}{15} + \frac{1}{30} = \frac{x}{12}.$$

Уравнение составлено. Из него имеем

$$4x + 2 = 5x, \quad x = 2.$$

**Проверка.** Первый велосипедист  $2$  км проезжает в  $\frac{2}{15}$  часа, т. е. в  $8$  мин. Второй велосипедист  $2$  км проезжает в  $\frac{2}{12}$  часа, т. е. в  $10$  мин. Значит, первый велосипедист на  $2$  мин. скорее проходит это расстояние, чем второй. Задача решена правильно.

*Ответ.*  $2$  км.

**Замечание.** Рекомендуем обратить внимание на следующее:

1. Буквой  $x$  в рассмотренной задаче мы обозначили искомую величину. Так можно поступать при решении многих задач. В дальнейшем мы покажем, что иногда лучше поступать иначе и обозначать буквой  $x$  другую величину, которая не является искомой.

2. В рассмотренной задаче мы имели дело с двумя величинами, из которых одна на некоторое количество меньше другой ( $\frac{x}{15}$  на  $\frac{1}{30}$  меньше, чем  $\frac{x}{12}$ ). При составлении уравнения мы к меньшей из величин добавили соответствующее количество и полученную сумму приравнивали большей. Вместо этого мы могли бы из большей величины вычесть соответствующее количество и полученную разность приравнять меньшей.

**Задача.** Самолет летел сначала со скоростью 180 км в час. Когда ему осталось пролететь на 320 км меньше, чем он пролетел, он стал лететь со скоростью 250 км в час. Средняя скорость на всем пути оказалась равной 200 км в час. Сколько всего километров пролетел самолет?

**Решение.** Обозначим буквой  $x$  расстояние (в километрах), которое самолет пролетел со скоростью 180 км в час. Тогда ему осталось после этого пролететь  $(x - 320)$  км. Всего самолет пролетел

$$x + (x - 320) = (2x - 320) \text{ км.}$$

Так как средняя скорость оказалась равной 200 км в час, самолет на весь путь потратил

$$\frac{2x - 320}{200} \text{ час.}$$

На первую часть пути он потратил  $\frac{x}{180}$  час., а на вторую часть пути  $\frac{x - 320}{250}$  час. Значит, на весь путь он потратил

$$\frac{x}{180} + \frac{x - 320}{250} \text{ час.}$$

Мы получили два различных выражения для времени (в часах), которое самолет потратил на весь путь. Выходит, что

$$\frac{2x - 320}{200} = \frac{x}{180} + \frac{x - 320}{250}.$$

Уравнение составлено. Имеем

$$\frac{x - 160}{100} = \frac{x}{180} + \frac{x - 320}{250}.$$

Умножим обе части уравнения на 4500, получим

$$45(x - 160) = 25x + 18(x - 320),$$

$$45x - 7200 = 25x + 18x - 5760.$$

Отсюда

$$2x = 1440; \quad x = 720.$$

Итак, первая часть пути составляет 720 км, вторая 400 км ( $720 - 320 = 400$  км). Значит, весь путь составляет 1120 км.

**Проверка.** На первую часть пути самолет потратил 4 часа ( $\frac{720}{180} = 4$ ). На вторую часть пути он потратил 1,6 часа ( $\frac{400}{250} = 1,6$ ). На весь путь самолет потратил 5,6 часа. Средняя скорость выходит равной  $\frac{1120}{5,6} = 200$  (км в час). Задача решена правильно.

**Ответ.** 1120 км.

**З а м е ч а н и е.** Рекомендуем обратить внимание на следующее: буквой  $x$  мы обозначили здесь не искомую величину (все расстояние, которое пролетел самолет), а другую величину (первую часть этого расстояния). Мы поступили так потому, что при таком обозначении проще составить уравнение и, кроме того, потому, что, зная первую часть расстояния, нетрудно найти и все расстояние.

Впрочем, можно обозначить буквой  $x$  и все расстояние в километрах. Тогда для определения первой и второй части расстояния надо  $x$  разделить на 2 части так, чтобы одна была на 320 больше другой. Делается это так: от  $x$  отнимается 320 и полученная разность делится на 2, получается  $\frac{x - 320}{2}$ , это меньшая из частей. Для отыскания большей части надо к  $x$  сначала прибавить 320, а потом полученную сумму разделить на 2, получим  $\frac{x + 320}{2}$ .

$\frac{x + 320}{2 \cdot 180}$  есть количество часов, потраченных на первую часть пути.

$\frac{x - 320}{2 \cdot 250}$  есть количество часов, потраченных на вторую часть пути.

$\frac{x}{200}$  есть количество часов, потраченных на весь путь, т. е.

$$\frac{x}{200} = \frac{x + 320}{360} + \frac{x - 320}{500}.$$

Решив это уравнение, получим  $x = 1120$ , т. е. тот же ответ, что и раньше.

Из этого примера видно, что простота решения задачи зависит от того, насколько удачно выбрана величина, обозначаемая буквой  $x$ .

**Задача.** Ученики собрали 3 кг 200 г семян белой акации, желтой акации, клена и липы. Сколько семян каждого вида в отдельности собрали ученики, если семян белой акации они собрали в 3 раза больше, чем семян липы; семян клена собрано в 2 раза больше, чем семян белой акации и липы вместе, а семян желтой акации на 1 кг 200 г больше, чем семян клена?

**Решение.** Мы должны определить четыре неизвестных величины: количество семян белой акации, желтой акации, клена и липы. При внимательном рассмотрении условия задачи видно, что, если бы мы узнали количество семян липы, нам нетрудно было бы узнать и остальные неизвестные величины.

Предположим, что семян липы собрано  $x$  г. Тогда семян белой акации собрано  $3x$  г. Семян клена собрано  $2(x + 3x) = 8x$  г. Семян желтой акации собрано  $(8x + 1200)$  г.

Теперь нетрудно подсчитать, сколько собрано всех семян. Для этого достаточно сложить  $[x + 3x + 8x + (8x + 1200)]$  г. Но, по условию, всех семян собрано 3200 г. Значит,

$$x + 3x + 8x + (8x + 1200) = 3200.$$

Или

$$20x + 1200 = 3200,$$

$$20x = 2000,$$

$$x = 100.$$

Теперь нетрудно написать и ответ: семян липы собрано 100 г, семян белой акации — 300 г, семян клена — 800 г, семян желтой акации — 2 кг.

Проверка ответа не представляет труда.

На примере этой задачи видно, что посредством уравнений с одним неизвестным можно решать не только задачи с одной искомой величиной, но и такие задачи, в которых имеется несколько искомых величин.

**Задача.** Периметр треугольника 44 см. Стороны треугольника относятся как 10:7:5. Определить стороны треугольника.

**Решение.** Пусть меньшая сторона треугольника равна  $5x$  см. Тогда средняя сторона этого треугольника равна  $7x$  см, а большая сторона равна  $10x$  см. По условию,

$$5x + 7x + 10x = 44.$$

Значит,

$$x = 2.$$

Выходит, что меньшая сторона треугольника равна 10 см, средняя 14 см, а большая 20 см. Нетрудно проверить, что задача решена правильно.

*Ответ.* 10 см; 14 см; 20 см.

**З а м е ч а н и е.** При решении последней задачи рекомендуем обратить внимание на следующее:

1) В задаче три искомые величины, но мы их выразили через одно неизвестное  $x$ .

2) Буквой  $x$  (в см) мы обозначили  $\frac{1}{5}$  часть меньшей стороны.

Конечно, можно было бы обозначить буквой  $x$  и всю меньшую сторону, но тогда средняя сторона была бы равна  $\frac{7}{5}x$ , большая  $2x$ . Как видно, в уравнении появились бы дроби, и от этого решение стало бы несколько сложнее.

**Задача.** В комнате № 1 общежития живут 9 человек, а в комнате № 2 — 6 человек. Сколько человек надо переселить из комнаты № 1 в комнату № 2, чтобы в каждой комнате проживало по одному и тому же числу людей?

**Решение.** Обозначим буквой  $x$  искомое количество людей. Тогда

$$6 + x = 9 - x; \quad 2x = 3; \quad x = 1,5.$$

Мы не напишем в ответе, что надо переселить 1,5 человека, так как это было бы бессмысленно. Мы должны сказать, что задача не имеет решения.

*Ответ.* Задача не имеет решения.

**Задача.** Числитель дроби составляет  $\frac{2}{3}$  знаменателя. После того как к числителю прибавили 5, а к знаменателю 15, дробь стала равной  $\frac{1}{3}$ . Найти дробь.

**Решение.** Обозначим знаменатель дроби буквой  $x$ . Тогда числитель ее будет  $\frac{2}{3}x$ . По условию,

$$\frac{\frac{2}{3}x + 5}{x + 15} = \frac{1}{3},$$

или

$$2x + 15 = x + 15; \quad x = 0.$$

*Ответ.* Дроби, удовлетворяющей условию задачи, не существует.

**Задача.** Сумма цифр двузначного числа равна 14. Если к этому числу прибавить 72, то в результате получается число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти число.

**Решение.** Обозначим цифру десятков искомого числа буквой  $x$ . Тогда цифра единиц этого числа равна  $14 - x$ . Имеем

$$10x + (14 - x) + 72 = 10(14 - x) + x,$$

или

$$18x = 54, \quad \text{т. е.} \quad x = 3.$$

Выходит, что цифра десятков искомого числа равна 3, а цифра единиц равна 11.

*Ответ.* Так как цифра не может быть больше 9, задача решения не имеет.

**Задача.** Одна машинистка может выполнить некоторую работу за 5 час. Во сколько часов может выполнить эту работу вторая машинистка, если, работая совместно, обе машинистки выполнили ту же работу за 6 час.?

**Решение.** Предположим, что вторая машинистка может выполнить эту работу за  $x$  час. Тогда в 1 час она выполнит  $\frac{1}{x}$  часть работы.

Первая машинистка в час выполняет  $\frac{1}{5}$  часть работы. Обе машинистки, работая совместно, выполняют за час  $\frac{1}{6}$  часть работы или  $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\right)$  часть работы.

Значит,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{5} = \frac{1}{6}; \quad \frac{1}{x} = -\frac{1}{30}, \quad x = -30.$$

*Ответ.* Так как искомое число часов не может быть отрицательно, задача решения не имеет.

Обратим внимание на следующее. Уравнения, к которым приводили последние четыре задачи, имеют решения, а задачи все же не имеют решения. В первой из этих задач оказалось, что искомое число людей должно быть дробным; в следующей задаче оказалось, что знаменатель дроби должен быть равен 0; в предпоследней задаче оказалось, что число единиц двузначного числа больше 9, в последней задаче оказалось, что машинистка выполняет некоторую работу в отрицательное число часов.

Отсюда вытекает, что всякое решение требует еще и проверки его по смыслу. Мало того, крайне важно выяснить: почему данная задача не имеет решения, где в условии задачи кроются причины, в силу которых задача не имеет решения, при каких численных данных подобная задача имеет решение.

Такая работа над задачей называется *исследованием* задачи.

Проведем исследование рассмотренных четырех задач.

**Исследование первой задачи.** Дробное число людей, которых надо переселить из одной комнаты в другую, возникло потому, что в одной комнате проживает четное число людей, а в другой нечетное. Если бы числа проживающих в этих комнатах людей были одной четности, ответ был бы выражен целым числом. При этом, если в комнате № 1 живет больше людей, чем в комнате № 2, в ответе будет целое положительное число. Если в обеих комнатах живет по одинаковому числу людей, в ответе будет 0, и такой ответ означает, что никого переселять из одной комнаты в другую не надо. Если, наконец, в комнате № 1 проживает меньше людей, чем в комнате № 2, в ответе получится целое отрицательное число, и такой ответ означает, что переселять надо не из комнаты № 1 в комнату № 2, а наоборот — из второй в первую.

**Исследование второй задачи.** Знаменатель дроби оказался равным нулю, потому что  $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ .

Если бы отношение чисел, прибавленных к числителю и знаменателю дроби, было не равно  $\frac{1}{3}$ , знаменатель искомой дроби был бы отличен от нуля и задача имела бы решение.

**Исследование третьей задачи.** Двузначных чисел, сумма цифр которых 14, существует всего пять: 59, 68, 77, 86 и 95. Если к любому из них прибавить 72, в результате получится не двузначное, а трехзначное число. Если в условии задачи заменить число 72 числом 36, задача будет иметь решение, так как  $95 - 59 = 36$ . Точно

так же задача будет иметь решение, если в условии ее число 72 заменить числом 18, так как  $86 - 68 = 18$ .

**Исследование четвертой задачи.** Отрицательный ответ получился потому, что по условию две машинистки, работая совместно, тратят на выполнение работы больше времени (6 час.), чем одна машинистка (5 час.). Так могло бы быть, если бы вторая машинистка не помогала первой, а уничтожала бы работу, выполненную первой машинисткой. Для того чтобы задача имела решение, достаточно число 6 в условии заменить каким-нибудь положительным числом, меньшим 5, или число 5 заменить числом, большим 6. Можно, конечно, сразу заменить и оба числа, только при этом нужно, чтобы вдвоем машинистки меньше тратили времени на работу, чем одна.

**Задача.** На трех складах находится 300 куб. м дров. На первом складе 110 куб. м. На втором складе на несколько куб. метров больше, чем на первом, а на третьем складе на столько же куб. метров меньше, чем на первом. Сколько куб. метров дров на каждом складе?

**Решение.** Пусть на втором складе на  $x$  м<sup>3</sup> дров больше, чем на первом. Тогда

на втором складе  $(110 + x)$  м<sup>3</sup>,

на третьем складе  $(110 - x)$  м<sup>3</sup>.

Выходит, что

$$110 + (110 + x) + (110 - x) = 300,$$

т. е.

$$330 + 0 \cdot x = 300.$$

Уравнение не имеет решения.

*Ответ.* Задача не имеет решения.

Последняя задача не имеет решения, и этим она похожа на предыдущие четыре задачи. Однако здесь есть и различие. Это различие заключается в том, что предыдущие задачи приводили к уравнениям, которые имели решения, но эти решения не подходили по смыслу. Последняя же задача привела к уравнению, которое не имеет решения.

**Исследование задачи.** Где в условии кроется причина того, что задача не имеет решения? По смыслу задачи на втором и на третьем складах вместе должно быть дров вдвое больше, чем на первом. Значит, на первом складе должно быть  $\frac{1}{3}$  всех дров. Выходит, что либо надо 300 заменить на 330, либо надо 110 заменить на 100, либо заменить оба числа так, чтобы одно было в 3 раза больше другого. Заменим, например, 300 на 330, тогда получим уравнение

$$110 + (110 + x) + (110 - x) = 330,$$

или

$$0 \cdot x = 0.$$



Этому уравнению удовлетворяет любое число. Выходит, что задача имеет бесконечное число решений. По смыслу задачи  $x$  может быть любым числом, абсолютная величина которого не превосходит 110.

Все сказанное по поводу решения задач при помощи уравнений приводит к следующему выводу.

Решение задачи при помощи уравнений состоит из четырех частей:

- 1) составления уравнения,
- 2) решения уравнения,
- 3) проверки,
- 4) исследования.

Наиболее трудная часть работы заключается в составлении уравнения. При составлении уравнения большое значение имеет удачный или неудачный выбор величины для обозначения ее буквой. Большое внимание требуется и при исследовании решения.

## § 8. Применение уравнений к решению задач в общем виде

Мы рассмотрели ряд задач с числовыми данными. Известно, однако, что особый интерес представляют задачи в общем виде, т. е. задачи с буквенными данными. Так как буквы обозначают у нас числа, решение задач с буквенными данными ведется так же, как и задач с числовыми данными, только всякий раз нужно исследовать решение. Покажем это на примере.

**Задача.** Отцу 40 лет, сыну 10 лет. Через сколько лет отец будет в  $n$  раз старше сына?

**Решение.** Предположим, что через  $x$  лет отец будет в  $n$  раз старше сына. Через  $x$  лет отцу будет  $(40 + x)$  лет, а сыну  $(10 + x)$  лет. Значит,

$$40 + x = n(10 + x).$$

Уравнение составлено. Решая его, имеем:

$$x(n - 1) = 40 - 10n,$$

$$x = \frac{40 - 10n}{n - 1}.$$

По смыслу задачи  $n > 1$ , поэтому знаменатель — всегда положительное число. Что касается числителя, то при  $n < 4$  числитель положителен, при  $n = 4$  числитель равен 0, при  $n > 4$  числитель отрицателен. Исследование показывает, что возможны три случая:

**Случай 1.**  $n < 4$ . Задача имеет положительное решение. Найденное выражение для  $x$  дает искомый ответ. Пусть, например,  $n = 2$ , тогда  $x = 20$ . Действительно, через 20 лет отцу будет 60 лет, а сыну 30 и отец будет вдвое старше сына.

**Случай 2.**  $n = 4$ . В этом случае  $x = 0$ . Такой ответ означает, что отец сейчас в 4 раза старше сына.

*Случай 3.  $n > 4$ .* В этом случае задача имеет отрицательное решение, которое означает, что  $|x|$  лет назад отец был в  $n$  раз старше сына. Пусть, например,  $n = 6$ . Тогда  $x = -4$ ;  $|x| = 4$ . Действительно, 4 года назад отцу было 36 лет, сыну 6 лет, и отец был в 6 раз старше сына.

### § 9. Понятие о неравенстве

При исследовании уравнений с буквенными коэффициентами приходится решать такие задачи:

Даны два алгебраических выражения, зависящие от одной или нескольких букв. Требуется узнать, при каких значениях этих букв одно из данных выражений больше или меньше другого. Например, исследуя задачи из § 8, мы должны были узнать, при каких значениях  $n$  выражение  $40 - 10n$  является положительным числом и при каких значениях  $n$  это выражение является отрицательным числом. Иными словами, нам нужно было узнать, при каких значениях  $n$

$$40 > 10n$$

и при каких значениях  $n$

$$40 < 10n.$$

В таких случаях говорят, что нам нужно было *решить* два неравенства:  $40 > 10n$  и  $40 < 10n$ .

**О п р е д е л е н и е.** *Неравенством* называется выражение, полученное посредством соединения знаком  $>$  или знаком  $<$  двух алгебраических выражений.

Примеры неравенств:

$$4 > 3; \quad -2 < 0; \quad 50 > -60; \quad -50 < -30. \quad (1)$$

Выражение, записанное слева от знака неравенства, называется левой частью неравенства, а выражение, записанное справа от этого знака, называются правой частью неравенства.

При желании части неравенства можно поменять местами, но тогда надо изменить знак неравенства на знак противоположного смысла, т. е. вместо знака  $>$  писать знак  $<$ , а вместо знака  $<$  писать знак  $>$ . Перепишем неравенства (1), переменяя местами правую и левую части. Получим

$$3 < 4; \quad 0 > -2; \quad -60 < 50; \quad -30 > -50. \quad (2)$$

Неравенства (1) и (2) не содержат букв, это так называемые *числовые неравенства*. Неравенства

$$40 > 10n; \quad 40 < 10n; \quad 2x > 3; \quad a^2 + 1 > a^2 \quad (3)$$

содержат буквы.

Неравенства, не содержащие букв, могут быть *верными* (*справедливыми*) или *неверными* (*несправедливыми*). Так, например, все неравенства (1) и (2) верные. Нетрудно указать и несправедливое неравенство. Для этого достаточно в верном неравенстве заменить знак неравенства знаком противоположного смысла.

С неравенствами, содержащими буквы, дело обстоит сложнее. Рассмотрим для примера знакомое нам неравенство

$$40 > 10n. \quad (4)$$

Мы знаем, что это неравенство справедливо при  $n < 4$ . При  $n = 4$  знак  $>$  надо заменить знаком  $=$ , а при  $n > 4$  знак  $>$  надо заменить знаком  $<$ . Таким образом, неравенство, содержащее буквы, может при некоторых значениях этих букв оказаться справедливым, а при других значениях букв оказаться несправедливым.

Впрочем, бывают и такие неравенства, которые справедливы при всех значениях входящих в них букв. Таково, например, неравенство

$$a^2 + 1 > a^2. \quad (5)$$

Действительно, при любом  $a$  левая часть неравенства (5) на 1 больше правой.

С другой стороны, нетрудно указать и такое неравенство, которое при любых значениях входящих в него букв несправедливо. Для этого достаточно в неравенстве, которое справедливо при всех значениях входящих в него букв, заменить знак неравенства знаком противоположного смысла. Так, например, заменим в неравенстве (5) знак  $>$  знаком  $<$ , получим неравенство

$$a^2 + 1 < a^2, \quad (6)$$

которое при всех значениях буквы  $a$  несправедливо.

**Определение.** *Решить неравенство* — это значит узнать, при каких значениях входящих в него букв это неравенство справедливо.

**Пример 1.** Решить неравенство  $40 > 10n$ .

*Ответ.* Неравенство справедливо при всех  $n < 4$  и только при этих значениях.

**Пример 2.** Решить неравенство  $40 < 10n$ .

*Ответ.* Неравенство справедливо при всех  $n > 4$  и только при этих значениях.

**Пример 3.** Решить неравенство  $a^2 + 1 > a^2$ .

*Ответ.* Неравенство справедливо при любом значении  $a$ .

**Пример 4.** Решить неравенство  $a^2 + 1 < a^2$ .

*Ответ.* Неравенство решений не имеет (при любом значении буквы  $a$  оно несправедливо).

### § 10. Свойства неравенств

Для того чтобы научиться решать неравенства, надо изучить их свойства.

Свойство 1. Возьмем какое-нибудь справедливое неравенство, например

$$5 > 3. \quad (1)$$

Прибавим к каждой части этого неравенства одно и то же число, например 10. Получим новое неравенство  $5 + 10 > 3 + 10$  или

$$15 > 13. \quad (2)$$

Неравенство (2) тоже справедливо. В самом деле, мы к большему числу 5 и к меньшему числу 3 прибавили поровну (по 10), понятно, поэтому, что первая сумма больше второй.

Возьмем неравенство (1). Вычтем теперь из каждой части этого неравенства одно и то же число, например 10. Получим новое неравенство

$$5 - 10 > 3 - 10, \text{ или } -5 > -7. \quad (3)$$

Неравенство (3) тоже справедливо.

Возьмем еще раз неравенство (1). Прибавим к каждой его части одно и то же буквенное выражение, например  $a + 2b$ . Получим новое неравенство

$$5 + (a + 2b) > 3 + (a + 2b). \quad (4)$$

Неравенство (4) справедливо при любых значениях  $a$  и  $b$ . В самом деле, при каких угодно значениях  $a$  и  $b$  к правой и левой части неравенства (1) добавляется одно и то же число.

Пусть, например,  $a = 3$ ;  $b = 4$ , тогда

$$a + 2b = 11,$$

и выходит, что при этих значениях  $a$  и  $b$  каждой части неравенства (1) прибавлено по 11. Если  $a$  и  $b$  имеют какие-нибудь другие значения, все равно  $a + 2b$ , добавленное к левой части неравенства (1), имеет то же значение, что и  $a + 2b$ , добавленное к правой части этого неравенства.

Теперь мы можем сформулировать свойство 1 неравенств:

*Если  $a > b$  и  $c$  — произвольное число, то  $a + c > b + c$ ;  $a - c > b - c$ , т. е. к обеим частям неравенства можно прибавить или от обеих частей его вычесть одно и то же число или буквенное выражение.*

Как легко видеть, свойство 1 неравенств очень напоминает соответствующее свойство равенств.

Следствие из свойства 1. *Любой член неравенства можно перенести из одной части в другую, переменяя при этом знак его на противоположный.*

Действительно, рассмотрим неравенство

$$5 + 3 > 4 - 2. \quad (5)$$

Нетрудно проверить, что это неравенство справедливо. Допустим, что мы хотим число  $-2$  перенести из правой части в левую. Прибавим к каждой части неравенства по  $2$ , получим опять справедливое неравенство

$$5 + 3 + 2 > 4. \quad (6)$$

Сравнивая неравенство (6) с неравенством (5), видим, что неравенство (6) получается из неравенства (5) посредством переноса числа  $(-2)$  из правой части в левую, но с противоположным знаком.

Свойство 2. Возьмем какое-нибудь справедливое неравенство, например

$$3 > -2. \quad (1)$$

Умножим обе части этого неравенства на одно и то же положительное число, например на  $5$ . Получим новое неравенство

$$3 \cdot 5 > (-2) \cdot 5 \quad \text{или} \quad 15 > -10. \quad (2)$$

Неравенство (2) тоже справедливо.

Возьмем опять то же неравенство

$$3 > -2.$$

Разделим обе части этого неравенства на одно и то же положительное число, например на  $10$ . Получим новое неравенство

$$0,3 > -0,2. \quad (3)$$

Неравенство (3) тоже справедливо.

Возьмем еще раз неравенство  $3 > -2$ . Умножим обе части этого неравенства на какое-нибудь отрицательное число, например на  $-5$ . В левой части получится  $-15$ , а в правой  $10$ . Ясно, что

$$-15 < 10. \quad (4)$$

Как видно, чтобы получить справедливое неравенство (4), нам пришлось знак  $>$  заменить знаком  $<$ .

То же самое получается и при делении каждой части неравенства на одно и то же отрицательное число.

Возьмем опять неравенство

$$3 > -2.$$

Разделим обе части его на какое-нибудь отрицательное число, например на  $-10$ . В левой части получится  $-0,3$ , а в правой  $0,2$ . Чтобы новое неравенство было справедливым, необходимо знак  $>$  заменить знаком  $<$ . Получим

$$-0,3 < 0,2. \quad (5)$$

Теперь мы можем сформулировать свойство 2 неравенств:

Если  $a > b$  и  $c$  положительно, то  $ac > bc$ ,  $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ , т. е. обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число.

Если  $a > b$  и  $c$  отрицательно, то  $ac < bc$ ;  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ , т. е. при умножении или делении обеих частей неравенства на одно и то же отрицательное число знак неравенства надо заменить знаком противоположного смысла (т. е. вместо знака  $>$  надо писать знак  $<$ , а вместо знака  $<$  надо писать знак  $>$ ).

Если обе части неравенства умножить на нуль, неравенство превращается в равенство.

Пример. Умножим обе части неравенства  $3 > -2$  на нуль. В левой части получится 0, в правой части получится тоже 0, т. е.

$$0 \cdot 3 = 0 \cdot (-2).$$

Вместо знака  $>$  приходится писать знак  $=$ .

При умножении или делении обеих частей неравенства на буквенное выражение нужно быть весьма осторожным, так как при различных значениях букв это выражение может оказаться и положительным, и отрицательным, и нулем.

Так, например, неравенство  $3 > -2$  при умножении на  $x$  дает

$$3x > -2x, \text{ если } x > 0,$$

$$3x < -2x, \text{ если } x < 0,$$

$$3x = 2x, \text{ если } x = 0.$$

## § 11. Решение неравенств первой степени с одним неизвестным

**Определение.** Неравенством первой степени с одним неизвестным называется такое неравенство, которое не содержит неизвестного в знаменателе и после освобождения его от дробей, раскрытия скобок, перенесения всех членов в левую часть и приведения подобных членов имеет вид  $ax + b > 0$  или  $ax + b < 0$ , где  $a$  и  $b$  — известные числа.

Применяя первое и второе свойства неравенств, можно решить любое неравенство первой степени с одним неизвестным. Покажем это на примерах.

**Пример.** Решить неравенство

$$3x - 1 > 2x - 5.$$

**Решение.** Перенесем  $2x$  в левую, а  $-1$  в правую часть неравенства. Получим

$$3x - 2x > -5 + 1, \text{ или } x > -4.$$

Этот ответ означает, что данное неравенство справедливо при любом значении  $x$ , большем чем  $-4$ .

*Ответ.*  $x > -4$ .

**Пример.** Решить неравенство  $5x + 2 < 2x - 11$ .

**Решение.** Перенесем  $2x$  в левую, а  $2$  в правую часть неравенства. Получим

$$3x < -13.$$

Разделим обе части неравенства на  $3$ , получим

$$x < -\frac{13}{3}.$$

*Ответ.*  $x < -\frac{13}{3}$ .

**Пример.** Решить неравенство  $2x + 5 > 7x - 10$ .

**Решение.** Перенесем  $2x$  в правую, а  $-10$  в левую часть неравенства. Получим

$$5 + 10 > 7x - 2x, \text{ или } 5x < 15.$$

Разделим обе части неравенства на  $5$ . Получим

$$x < 3.$$

Это неравенство можно решить и иначе. Например, перенесем  $7x$  в левую, а  $5$  в правую часть. Получим

$$-5x > -15.$$

Разделим обе части неравенства на  $-5$ . Получим опять

$$x < 3.$$

*Ответ.*  $x < 3$ .

**Пример.** Решить неравенство

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{4x-5}{2} > 0.$$

**Решение.** Умножим обе части неравенства на  $6$ . Получим

$$2(2x-1) - 3(4x-5) > 0,$$

или

$$4x - 2 - 12x + 15 > 0;$$

отсюда

$$-8x + 13 > 0.$$

Перенесем  $-8x$  в правую часть. Получим

$$13 > 8x.$$

Значит,

$$x < \frac{13}{8}.$$

*Ответ.*  $x < \frac{13}{8}$ .

**Пример.** Решить неравенство  $ax < b$ .

**Решение.** Если  $a$  положительно (т. е.  $a > 0$ ), то  $x < \frac{b}{a}$ . Если  $a$  отрицательно (т. е.  $a < 0$ ), то  $x > \frac{b}{a}$ . Если  $a = 0$ , то неравенство принимает вид  $0 \cdot x < b$ .

Это неравенство справедливо при любом  $x$ , если  $b$  положительно и не имеет решений (т. е. не может быть справедливым ни при каком значении  $x$ ), если  $b$  отрицательно или равно нулю.

**Задача.** Показать, что из условий: 1)  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ , 2)  $b$  и  $d$  одного знака, вытекает, что  $ad > bc$ .

**Решение.** Так как  $b$  и  $d$  одного знака,  $bd$  положительно. Поэтому, умножив обе части справедливого по условию неравенства  $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$  на  $bd$ , получим опять справедливое неравенство.

---



## ГЛАВА VIII

### СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

#### § 1. Понятие о системе двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

**Задача.** В 7а и 7б классах школы 75 учеников. Сколько учеников в каждом классе, если в 7а на 5 учеников больше, чем в 7б?

**Решение.** Обозначим буквой  $x$  число учеников в 7б классе. Тогда в 7а классе  $(x + 5)$  учеников. В 7а и 7б классах вместе  $[x + (x + 5)]$  учеников. По условию, в 7а и 7б классах 75 учеников. Значит,

$$x + (x + 5) = 75.$$

Уравнение составлено. Решая его, имеем

$$2x + 5 = 75; x = 35.$$

Выходит, что в 7б классе 35 учеников, а в 7а классе 40 учеников.

*Ответ.* 35 и 40 учеников.

В приведенной задаче требовалось найти две величины: число учеников в 7а классе и число учеников в 7б классе. Для решения задачи мы ввели только одну букву  $x$ , через нее выразили обе неизвестные величины и составили уравнение.

Так мы поступали и раньше. Так и надо стараться поступать всегда. Встречаются, однако, такие задачи, где трудно бывает составить уравнение, если ввести только одну букву для обозначения неизвестной величины, и гораздо легче это сделать при помощи введения двух букв для обозначения двух неизвестных величин.

Вот, например, задача.

**Задача.** За 2 м сукна и 3 м ткани заплачено 165 руб. В другой раз за 5 м того же сукна и 2 м той же ткани заплачено 330 руб. Сколько стоит 1 м сукна и сколько стоит 1 м ткани?

**Решение.** Решим эту задачу посредством введения только одной буквы для обозначения неизвестной величины. Обозначим буквой  $x$  стоимость 1 м сукна (в рублях). Тогда 2 м сукна стоят  $2x$  руб., 3 м ткани стоят  $(165 - 2x)$  руб., 1 м ткани стоит  $\frac{165 - 2x}{3}$  руб.

Мы использовали первую часть условия задачи. Используем теперь вторую часть условия. 5 м сукна стоят  $5x$  руб., 2 м ткани стоят  $330 - 5x$  руб., 1 м ткани стоит  $\frac{330 - 5x}{2}$  руб.

Мы получили два различных выражения для стоимости 1 м ткани. Приравняв их, имеем

$$\frac{165 - 2x}{3} = \frac{330 - 5x}{2}. \quad (1)$$

Уравнение составлено. Решая его, имеем

$$330 - 4x = 990 - 15x; \quad x = 60.$$

Значит, метр сукна стоит 60 руб. Для определения стоимости метра ткани подставим 60 вместо  $x$  в выражение  $\frac{165 - 2x}{3}$ . Получим

$$\frac{165 - 120}{3} = 15.$$

Значит, метр ткани стоит 15 руб.

*Проверка.* 2 м сукна стоят 120 руб., 3 м ткани стоят 45 руб. За 2 м сукна и 3 м ткани надо заплатить 165 руб. Далее, 5 м сукна стоят 300 руб., 2 м ткани стоят 30 руб. За 5 м сукна и 2 м ткани надо заплатить 330 руб.; Проверка показала, что задача решена правильно.

*Ответ.* 60 руб. и 15 руб.

Посмотрим теперь, как решается последняя задача, если ввести две буквы для обозначения неизвестных.

Обозначим буквой  $x$  стоимость 1 м сукна (в рублях), а буквой  $y$  стоимость 1 м ткани (в рублях). Тогда

$$2x + 3y = 165, \quad (a)$$

$$5x + 2y = 330. \quad (б)$$

Мы составили два уравнения. Уравнение (a) составлено по первой части условия задачи, уравнение (б) составлено по второй части условия.

Для того чтобы решить задачу, надо найти такие значения  $x$  и  $y$ , которые удовлетворяли бы одновременно и уравнению (a) и уравнению (б).

В таких случаях говорят, что уравнения (a) и (б) надо решить совместно, или говорят, что надо решить систему уравнений (a) и (б). Для того чтобы показать, что уравнения надо решать совместно, ставят скобку }, т. е. систему уравнений записывают так:

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3y &= 165, \\ 5x + 2y &= 330. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Такая система называется *системой двух уравнений первой степени с двумя неизвестными*. Что же оказалось легче составить: одно уравнение с одним неизвестным или систему двух уравнений с двумя неизвестными? Бесспорно, систему (2) легче составить, чем уравнение (1).

Мы пока не умеем решать системы. Однако мы можем проверить решение, которое мы нашли другим приемом.

Сделаем это, чтобы знать, как проверяется решение системы уравнений. Подставим в систему (2) число 60 вместо  $x$  и 15 вместо  $y$ , получим два тождества:

$$2 \cdot 60 + 3 \cdot 15 = 165,$$

$$5 \cdot 60 + 2 \cdot 15 = 330.$$

Эти тождества и показывают, что  $x=60$ ,  $y=15$  — решение системы (2) или, как говорят, значения  $x=60$ ,  $y=15$  удовлетворяют системе (2).

**Определения.** Два или несколько уравнений образуют *систему уравнений*, если одноименные неизвестные в них обозначают одну и ту же величину. *Решить систему уравнений* — это значит найти такие значения неизвестных, при которых каждое из уравнений системы превращается в тождество. *Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными* называется пара таких чисел, которые, будучи подставлены в систему вместо неизвестных, превращают каждое из уравнений системы в тождество.

### Упражнения

**Задача 1.** Обозначив число учеников в 7а классе буквой  $y$ , а число учеников в 7б классе буквой  $x$ , составить систему уравнений по условию первой задачи. Какое решение имеет эта система? Проверить его.

## § 2. Одно уравнение первой степени с двумя неизвестными

Для того чтобы научиться решать системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, ознакомимся сначала с основными свойствами одного уравнения первой степени с двумя неизвестными.

Рассмотрим такую задачу:

**Задача.** За 2 м сукна и 3 м ткани заплатили 165 руб.

Сколько стоит 1 м сукна и 1 м ткани?

(При составлении этой задачи мы взяли известную нам задачу и исключили из ее условия вторую часть.)

**Решение.** Обозначим, как и раньше, буквой  $x$  стоимость 1 м сукна (в рублях), буквой  $y$  — стоимость 1 м ткани (в рублях). Тогда

$$2x + 3y = 165. \quad (1)$$

Мы получили одно уравнение первой степени с двумя неизвестными. Уравнение это имеет бесконечное множество решений. Их можно

находить так. Дадим  $x$  какое-нибудь значение, например 10. Тогда уравнение (1) примет вид

$$20 + 3y = 165,$$

откуда  $y = 48\frac{1}{3}$ . Мы получили решение  $x = 10$ ;  $y = 48\frac{1}{3}$ . Теперь дадим  $x$  какое-нибудь другое значение, например 20. Тогда уравнение (1) примет вид

$$40 + 3y = 165,$$

откуда  $y = 41\frac{2}{3}$ .

Так можно поступать и дальше. Давая  $x$  произвольные значения, мы будем получать все новые и новые решения уравнения (1). Разумеется, мы могли бы давать произвольные значения  $y$  и вычислять соответствующие значения другого неизвестного  $x$ .

Чтобы упростить отыскание решений уравнения (1), поступим так. Решим уравнение (1) относительно какой-нибудь неизвестной, например  $y$ , т. е. выразим  $y$  через  $x$ . Получим

$$y = \frac{165 - 2x}{3}.$$

Теперь удобнее вычислять значения  $y$  при произвольных значениях  $x$ . Вычислим несколько решений уравнения (1) и запишем их в таблицу:

| $x$ | -15 | 0  | 6  | 15 | 27 | 30 | 45 | 60 | 75 | 90 |
|-----|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $y$ | 65  | 55 | 51 | 45 | 37 | 35 | 25 | 15 | 5  | 5  |

По таблице, как известно, можно построить график (рис. 20). Назовем его графиком решений уравнения (1). Каждая точка этого

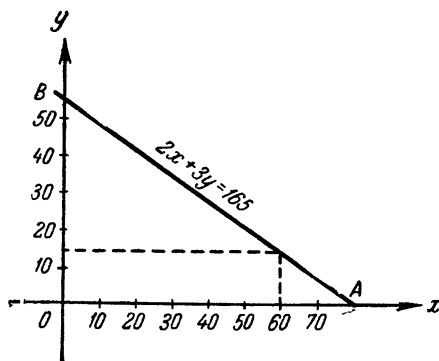


Рис. 20.

графика соответствует столбцу таблицы и служит, таким образом, изображением одного решения уравнения (1). С другой стороны каждое решение уравнения (1) изображается определенной точкой графика.

Так как по смыслу задачи  $x$  и  $y$  положительны, условию задачи удовлетворяют только те решения уравнения (1), которые изображаются точками, лежащими между  $A$  и  $B$  (рис. 20).

*Ответ.* Решение представлено таблицей и графиком (рис. 20).

Из сказанного вытекает, что одно уравнение первой степени с двумя неизвестными имеет бесконечное множество решений\*). Для получения решений такого уравнения достаточно одной из неизвестных давать произвольные значения и вычислять соответствующие значения другой неизвестной. Чтобы удобнее было вычислять эти решения, следует разрешить уравнение относительно какой-нибудь неизвестной. Решения уравнения можно представить таблицей и графиком.

Рассмотрим теперь такую задачу:

**Задача.** За 5 м сукна и 2 м ткани заплатили 330 руб. Сколько стоит 1 м сукна и 1 м ткани?

(При составлении этой задачи мы взяли известную нам задачу и исключили из ее условия первую часть.)

**Решение.** Все, что было сказано по поводу задачи, рассмотренной в начале параграфа, можно повторить здесь по поводу этой задачи.

Обозначим опять буквой  $x$  стоимость 1 м сукна (в рублях), а буквой  $y$  — стоимость 1 м ткани (в рублях).

Наша задача приводит к уравнению

$$5x + 2y = 330.$$

Разрешив это уравнение относительно  $y$ , имеем

$$y = \frac{330 - 5x}{2}.$$

Составим таблицу некоторых решений этого уравнения:

| $x$ | —15   | 0   | 6   | 15    | 27   | 30 | 45   | 60 | 75    | 90  |
|-----|-------|-----|-----|-------|------|----|------|----|-------|-----|
| $y$ | 202,5 | 165 | 150 | 127,5 | 97,5 | 90 | 52,5 | 15 | —22,5 | —60 |

Построим график решений уравнения (рис. 21). Условию задачи удовлетворяют только те решения уравнения, которые изображаются точками, лежащими между  $C$  и  $D$ .

*Ответ.* Решение представлено таблицей и графиком (рис. 21).

Графики, которые мы здесь строили, все оказались прямыми линиями. Это не случайно. Можно доказать, что график решений любого уравнения первой степени с двумя неизвестными — прямая линия.

\*) За исключением уравнения  $0 \cdot x + 0 \cdot y = m$ , где  $m$  отлично от нуля. Такое уравнение не имеет решения.

Для доказательства этого утверждения нужны некоторые сведения по геометрии, которые излагаются в курсе VIII класса. Поэтому

сейчас мы доказать это утверждение не можем и примем его без доказательства.

Для построения прямой линии достаточно определить две точки, через которые она проходит. Поэтому для построения графика решений уравнения первой степени с двумя неизвестными достаточно вычислить какие-нибудь два решения этого уравнения.

### Упражнения

1. Отбросить второе условие первой задачи. Составить уравнение по условию получающейся при этом задачи. Написать таблицу некоторых решений этого уравнения и вычертить график.

2. Выполнить то же, что и в упражнении 1, отбросив первое условие первой задачи.

### § 3. Решение систем уравнений при помощи графиков

Вернемся еще раз к задаче, которую мы рассматривали раньше.

За 2 м сукна и 3 м ткани заплачено 165 руб. В другой раз за 5 м того же сукна и 2 м той же ткани заплачено 330 руб. Сколько стоит 1 м сукна и 1 м ткани?

Мы обозначили буквой  $x$  стоимость 1 м сукна (в рублях), а буквой  $y$  — стоимость 1 м ткани (в рублях). Нами была составлена система уравнений

$$\begin{cases} (a) & 2x + 3y = 165, \\ (б) & 5x + 2y = 330. \end{cases} \quad (1)$$

Каждое из этих уравнений имеет бесконечное множество решений. У нас составлены таблицы этих решений, составлены и их графики. Сравнивая эти две таблицы, можно заметить, что у них имеется одинаковый столбец:

$$x = 60; \quad y = 15.$$

Это решение является общим для обоих уравнений (a) и (б) и вместе с тем, как мы знаем, является решением нашей задачи. Кроме этого

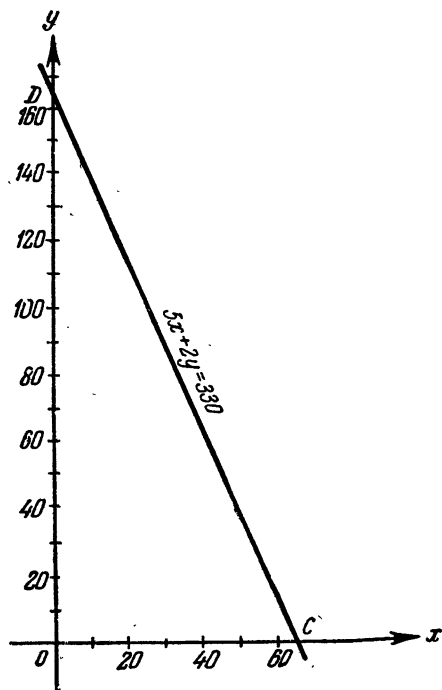


Рис. 21.

общего решения, у каждого уравнения системы имеется сколько угодно решений, которые не удовлетворяют другому уравнению системы. Так, например, уравнение (а) имеет решение  $x=30$ ;  $y=35$ , но это решение не удовлетворяет уравнению (б) и не является решением задачи.

Почему же общее решение уравнений (а) и (б) является решением нашей задачи, а всякая пара чисел, удовлетворяющих только одному уравнению системы, не является решением задачи?

Дело в том, что условие задачи состоит из двух частей:

1) 2 м сукна и 3 м ткани стоят 165 руб.,

2) 5 м сукна и 2 м ткани стоят 330 руб.

Если бы в условии задачи была только первая часть, а второй не было, всякое решение уравнения (а), подходящее по смыслу, было бы и решением задачи. Если бы в условии задачи была только вторая часть, а первой бы не было, всякое решение уравнения (б), подходящее по смыслу, было бы и решением задачи. Но в том то и дело, что в условии задачи две части, два требования, и потому искомые числа должны удовлетворять не только уравнению (а) или уравнению (б), а обоим этим уравнениям или, как говорят, удовлетворять системе этих двух уравнений.

Для того чтобы при помощи графиков решить систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, поступают так: графики уравнений (а) и (б), выполненные в одинаковом масштабе, наносят на один чертеж, как бы накладывая один на другой. Тогда всякая общая точка этих графиков изображает общее решение уравнений (а) и (б) и, таким образом, изображает решение системы этих уравнений.

Построим графики решений уравнений (а) и (б) на одном чертеже (рис. 22).

По чертежу видно, что точка М пересечения прямых имеет координаты  $x=60$ ;  $y=15$ .

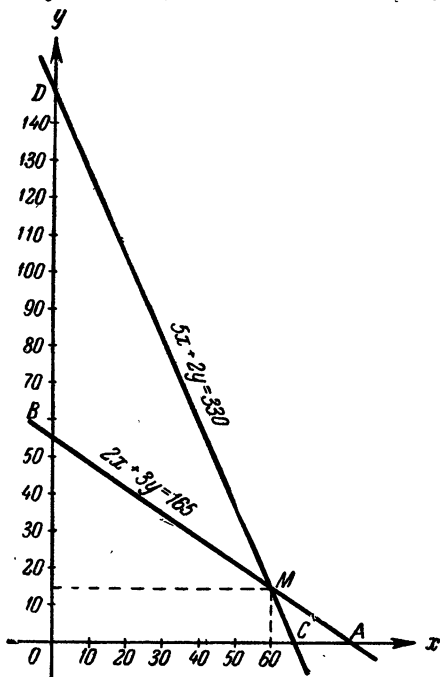


Рис. 22.

Надо сказать, что способ решения систем при помощи графиков имеет тот недостаток, что он не дает точного значения для неизвестных, так как значения эти приходится брать с чертежа. Но решение систем этим способом очень наглядно.

### Упражнения

1. Решить графическим путем систему из первой задачи § 1.

## § 4. О числе решений системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

Из геометрии известно, что две прямые линии или пересекаются (т. е. имеют одну общую точку), или параллельны (т. е. не имеют ни одной общей точки), или совпадают (т. е. у них все точки общие).

Отсюда можно сделать вывод, что *система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными либо имеет одно решение, либо не имеет ни одного решения, либо имеет бесконечное множество решений.*

Системы уравнений, имеющие одно решение, нам встречались. Следующие примеры показывают, что существуют системы, которые совсем не имеют решений, а также такие системы, которые имеют бесконечное множество решений.

Пример. Решить систему

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 5, \\ x + y &= 17. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Решение. Первое уравнение требует от нас, чтобы мы нашли два числа, сумма которых 5, а второе уравнение требует, чтобы сумма этих же чисел равнялась 17. Такие числа найти нельзя (рис. 23), следовательно, система (1) не имеет решения.

Пример. Решить систему

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 10, \\ 2x + 2y &= 20. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Решение. Сразу видно, что второе уравнение системы (2) получается из первого посредством умножения обеих частей на 2. Поэтому каждое решение первого уравнения является также решением второго, а каждое решение второго уравнения является также решением первого. Таким образом, каждое решение любого из уравнений является решением системы (2).

Таблица решений одного из этих уравнений служит также и таблицей решений другого, а графики решений обоих уравнений совпадают всеми своими точками.



Все это означает, что одно из уравнений можно совсем не принимать во внимание, а решить только другое уравнение. Выходит, что

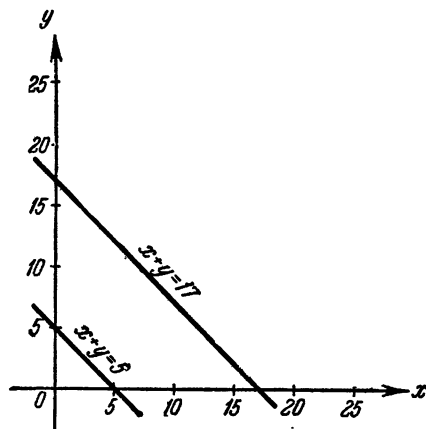


Рис. 23.

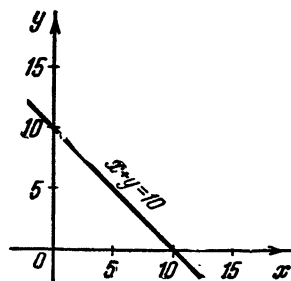


Рис. 24.

система (2) имеет бесконечное множество решений. Эти решения получаются из уравнения  $y = 10 - x$ , где  $x$  — любое (рис. 24).

### Упражнения

Решить при помощи графиков системы:

$$\begin{array}{lll} 1. \quad \left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 1, \\ 3x + y = 7. \end{array} \right\} & 2. \quad \left. \begin{array}{l} x + 3y = 5, \\ 3x + 9y = 15. \end{array} \right\} & 3. \quad \left. \begin{array}{l} 2x - y = 1, \\ 10x - 5y = 3. \end{array} \right\} \end{array}$$

## § 5. Способ сравнения

Кроме графического способа, существуют и другие способы решения систем. Мы рассмотрим три способа: способ сравнения, способ сложения и вычитания, способ подстановки. Каждый из них, в отличие от графического способа, дает точное решение системы.

Способ сравнения основан на следующих соображениях: для того чтобы решить систему, достаточно отыскать в таблицах решений уравнений системы одинаковые решения.

Спрашивается, нельзя ли найти эти одинаковые решения не вычисляя при этом других, ненужных нам решений? Оказывается, можно. Покажем на примере, как это делается, и попутно дадим все необходимые пояснения.

Рассмотрим систему

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 165, \\ 5x + 2y = 330. \end{array} \right\}$$

Подготовим каждое из уравнений системы так, как будто мы собираемся вычислять таблицы решений, т.е. из каждого уравнения выразим  $y$  через  $x$  (можно выразить и  $x$  через  $y$ ). Получим:

$$y = \frac{165 - 2x}{3}, \quad (1)$$

$$y = \frac{330 - 5x}{2}. \quad (2)$$

Предположим теперь, что мы одновременно вычисляем обе таблицы:

| $x$ | $y$ из уравнения (1) | $y$ из уравнения (2) |
|-----|----------------------|----------------------|
| 0   | 55                   | 165                  |
| 1   | $54\frac{1}{3}$      | 162,5                |

Мы вычислили две строчки, которые нам не нужны, так как значения для  $y$  получились разные. Чтобы сразу получить строчки, которые нам нужны, достаточно найти такие значения  $x$ , при которых выражения

$$\frac{165 - 2x}{3} \quad \text{и} \quad \frac{330 - 5x}{2}$$

имеют одинаковые значения. Такие задачи мы решали и знаем, что для этого следует решить уравнение

$$\frac{165 - 2x}{3} = \frac{330 - 5x}{2}.$$

Решая его по известным правилам, находим, что  $x = 60$ . (Сравните это уравнение с уравнением (1) на стр. 170.) Итак, одинаковые решения в таблицах получаются при  $x = 60$  и только при этом значении  $x$ . Вычисляя  $y$  по формулам (1) или (2), находим, что  $y = 15$ .

*Ответ.*  $x = 60$ ;  $y = 15$ . Решение единственное.

Приведем второй прием решения той же системы. Выразим из каждого уравнения  $y$  через  $x$ , приравняем полученные выражения и, решив уравнения с одним неизвестным, найдем, что  $x = 60$ . (Все это точно так же, как и раньше.)

Выразим теперь из каждого уравнения системы  $x$  через  $y$  и приравняем полученные выражения

$$\frac{165 - 3y}{2} = \frac{330 - 2y}{5}.$$

Решая это уравнение, получим  $y = 15$ . Итак,

$$x = 60; \quad y = 15.$$

Этот прием отличается от предыдущего тем, что, найдя значение  $x=60$ , мы не стали подставлять его в условие, а искали  $y$  тем же путем, как и  $x$ .

**Правило.** Для того чтобы решить систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, достаточно:

1) из каждого уравнения системы выразить какую-нибудь из неизвестных через другую (например,  $x$  через  $y$ ),

2) приравнять полученные выражения и решить уравнение с одним неизвестным ( $y$ ),

3) тем же способом или при помощи найденного неизвестного ( $y$ ) определить значение другого неизвестного ( $x$ ).

**Пример.** Решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} y - 3x &= 2, \\ y + 3x &= 8. \end{aligned} \right\}$$

**Решение.** Выразим из каждого уравнения системы  $y$  через  $x$ , получим

$$\left. \begin{aligned} y &= 2 + 3x, \\ y &= 8 - 3x. \end{aligned} \right\}$$

Приравняем правые части, получим

$$2 + 3x = 8 - 3x.$$

Отсюда

$$6x = 6; \quad x = 1.$$

Подставим  $x=1$  в первое уравнение системы, получим

$$y - 3 = 2, \quad \text{т.е.} \quad y = 5.$$

*Проверка.*

$$5 - 3 \cdot 1 = 2,$$

$$5 + 3 \cdot 1 = 8.$$

Каждое из уравнений системы превратилось в тождество.

*Ответ.*  $x=1$ ;  $y=5$ . Других решений нет.

**Пример.** Решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} 3y - 2x &= 10, \\ 5y - 3x &= 12. \end{aligned} \right\}$$

**Решение.** Выразим из каждого уравнения системы  $y$  через  $x$ . Получим

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{10 + 2x}{3}, \\ y &= \frac{12 + 3x}{5}. \end{aligned} \right\}$$

Приравняем правые части, получим

$$\frac{10+2x}{3} = \frac{12+3x}{5}.$$

Отсюда

$$50 + 10x = 36 + 9x; \quad x = -14.$$

Подставим  $x = -14$  в первое уравнение системы, получим  $3y + 28 = 10; y = -6$ .

*Проверка.*

$$3 \cdot (-6) - 2(-14) = 10,$$

$$5 \cdot (-6) - 3(-14) = 12.$$

Каждое из уравнений системы превратилось в тождество.

*Ответ.*  $x = -14; y = -6$ . Других решений нет.

*Пример.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - 7y = 13, \\ 2x - 11y = 14. \end{cases}$$

*Решение.* Выразим  $x$  через  $y$  из каждого уравнения системы и приравняем результаты. Получим

$$\frac{7y+13}{5} = \frac{11y+14}{2}.$$

Отсюда

$$14y + 26 = 55y + 70; \quad 41y = -44; \quad y = -\frac{44}{41}.$$

Выразим теперь  $y$  через  $x$  из каждого уравнения системы и приравняем результаты. Получим

$$\frac{5x-13}{7} = \frac{2x-14}{11}.$$

Отсюда

$$55x - 143 = 14x - 98; \quad 41x = 45; \quad x = \frac{45}{41}.$$

*Проверка.*

$$5 \cdot \frac{45}{41} + \frac{7 \cdot 44}{41} = 13,$$

$$2 \cdot \frac{45}{41} + \frac{11 \cdot 44}{41} = 14.$$

Каждое из уравнений системы превратилось в тождество.

*Ответ.*  $x = \frac{45}{41}; y = -\frac{44}{41}$ . Решение единственное.

Возникает вопрос, является ли проверка решения в таких примерах логически необходимой или она производится только потому, что в процессе решения могли вкрасться ошибки,

Следующий пример показывает, что рассуждения, подобные тем, которые проводятся при решении систем методом сравнения, могут привести к неверным выводам. Вот этот пример.

Даны два уравнения

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad (3)$$

и

$$x^2 + x + 1 = 0. \quad (4)$$

Из первого уравнения

$$x^2 = 5x - 6. \quad (5)$$

Из второго уравнения

$$x^2 = -x - 1. \quad (6)$$

Приравняем правые части, получим

$$5x - 6 = -x - 1. \quad (7)$$

Отсюда

$$x = \frac{5}{6}.$$

Нетрудно, однако, видеть, что  $x = \frac{5}{6}$  не удовлетворяет ни одному из данных уравнений.

Объясняется это тем, что значения  $x$ , при которых  $x^2 = 5x - 6$ , не совпадают со значениями  $x$ , при которых  $x^2 = -x - 1$ . Подробнее, равенство (5) справедливо не при всех, а лишь при некоторых значениях  $x$ , скажем при  $x = a$ . Равенство (6) справедливо тоже лишь при некоторых значениях  $x$ , скажем при  $x = b$ . Тогда

$$a^2 = 5a - 6; \quad b^2 = -b - 1.$$

Приравнивая правые части равенств (3) и (4) и во всем дальнейшем, мы поступаем так, как будто  $a = b$ .

Эти рассуждения надо было излагать так. Допустим, что существует такое значение  $x$ , которое удовлетворяет как уравнению (3), так и уравнению (4). При таком значении  $x$  имеют место равенства (5) и (6). Следовательно, при таком значении  $x$  имеет место равенство (7) и

$$x = \frac{5}{6}.$$

Отсюда следует *условный вывод*: если существует такое значение  $x$ , при котором удовлетворяются оба уравнения (3) и (4), то  $x = \frac{5}{6}$ , и никакому другому числу  $x$  равняться не может. Это, однако, не означает, что  $x = \frac{5}{6}$  *безусловно* удовлетворяет обоим уравнениям. Проверка обнаруживает, что  $x = \frac{5}{6}$  не удовлетворяет ни уравнению (3), ни уравнению (4). Окончательный вывод: уравнения (3) и (4) не имеют общих решений.

Соответственно с этим решение систем методом сравнения следует излагать так:

Допустим, что система

$$\begin{cases} 2x + 3y = 165, \\ 5x + 2y = 330 \end{cases}$$

имеет решение. Тогда

$$y = \frac{165 - 2x}{3}; \quad y = \frac{330 - 5x}{2}, \quad \text{т. е.}$$

$$\frac{165 - 2x}{3} = \frac{330 - 5x}{2},$$

откуда

$$x = 60.$$

Из первого уравнения системы находим, что при  $x = 60$   $y = 15$ .

Вывод: если система имеет решение, то  $x = 60$ ;  $y = 15$ . Никакая другая пара чисел не может удовлетворять этой системе. Остается доказать, что  $x = 60$ ;  $y = 15$  удовлетворяют системе. Это делается подстановкой в систему числа 60 вместо  $x$  и числа 15 вместо  $y$ .

### Упражнения

1. Решить способом сравнения систему

$$\begin{cases} x + y = 75, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

## § 6. Свойство выводных уравнений

Прежде чем приступить к изложению другого способа решения систем уравнений, рассмотрим вопрос о почленном сложении равенств. С этой целью рассмотрим несколько примеров, которые помогут нам установить некоторые новые свойства равенств.

Рассмотрим равенства

$$3 + 5 = 6 + 2, \quad (1)$$

$$5 + 7 = 4 + 8. \quad (2)$$

Нетрудно проверить, что равенства (1) и (2) являются справедливыми (т. е. верными) равенствами. Составим теперь новое равенство (3) так, чтобы левая часть равенства (3) была суммой левых частей равенств (1) и (2), а правая — суммой правых частей, т. е., как говорят, сложим равенства (1) и (2) почленно. Получим

$$(3 + 5) + (5 + 7) = (6 + 2) + (4 + 8). \quad (3)$$

Нетрудно проверить, что равенство (3) тоже справедливо. Объясняется это тем, что суммы, находящиеся в левой и правой частях равенства (3), состоят из двух соответственно равных слагаемых.

*При почленном сложении справедливых равенств в результате получается опять справедливое равенство. В частности, при почленном сложении двух тождеств в результате получается опять тождество.*

Рассмотрим равенства

$$3 + 5 = 6 + 2, \quad (4)$$

$$5 + 7 = 14 + 3. \quad (5)$$

Мы написали справедливое равенство (4) и несправедливое равенство (5). Сложим (4) и (5) почленно, получим

$$(3 + 5) + (5 + 7) = (6 + 2) + (14 + 3). \quad (6)$$

Равенство (6) несправедливо. Первые слагаемые в левой и правой частях его равны, а вторые неравны. Ясно, что и суммы в этом случае неравны.

*При почленном сложении справедливого равенства с несправедливым в результате получается несправедливое равенство.*

Рассмотрим равенства

$$3 + 5 = 10 + 3, \quad (7)$$

$$8 + 7 = 11 + 10. \quad (8)$$

Здесь оба равенства несправедливы. Сложим их почленно, получим

$$(3 + 5) + (8 + 7) = (10 + 3) + (11 + 10). \quad (9)$$

Равенство (9) тоже несправедливо.

Рассмотрим равенства

$$5 + 7 = 6 + 2, \quad (10)$$

$$2 + 3 = 4 + 5. \quad (11)$$

Равенства (10) и (11) несправедливы. Сложим их почленно, получим

$$(5 + 7) + (2 + 3) = (6 + 2) + (4 + 5). \quad (12)$$

Нетрудно проверить, что равенство (12) справедливо.

Последние два примера позволяют сделать такой вывод:

*При почленном сложении двух несправедливых равенств может получиться как справедливое, так и несправедливое равенство.*

Рассмотрим теперь два равенства, содержащие буквы:

$$2x + 3y = 165, \quad (13)$$

$$5x + 2y = 330. \quad (14)$$

Мы взяли два уравнения, которые были хорошо изучены раньше. Нам известны и таблицы решений этих уравнений, и графики этих решений.

Сложим теперь уравнения (13) и (14) почленно. Получим уравнение

$$7x + 5y = 495. \quad (15)$$

Рассмотрим график решений уравнения (15) совместно с графиками решений уравнений (13) и (14) (рис. 25).

Мы видим, что прямая, соответствующая уравнению (15), проходит через точку пересечения прямых, соответствующих уравнениям (13) и (14), т. е.  $x=60$ ;  $y=15$  являются также решением

уравнения (15). В то же время остальные решения уравнения (15) не удовлетворяют ни уравнению (13), ни уравнению (14). Почему общее решение уравнений (13) и (14) является также решением и уравнения (15)? Почему уравнение (15) имеет решения, которые не удовлетворяют ни уравнению (13), ни уравнению (14)?

Все это объясняется тем, что при сложении уравнений мы складываем равенства, которые при одних значениях неизвестных справедливы, а при других несправедливы. В самом деле, при  $x=60$ ;  $y=15$  оба равенства (13) и (14) справедливы. Значит, при этих значениях неизвестных должно быть справедливо и равенство (15).

При всех других значениях  $x$  и  $y$  хоть одно из равенств

(13) или (14) несправедливо. Ясно поэтому, что при этих значениях  $x$  и  $y$  равенство (15) может оказаться и справедливым и несправедливым.

Уравнение (15), полученное сложением уравнений (13) и (14), называется уравнением, *выводным* из системы уравнений (13) и (14) (оно выведено из уравнений (13) и (14)).

Таким образом, мы пришли к следующему результату:

*Всякое решение системы уравнений является решением и уравнения; выводного из этой системы. Однако не всякое решение выводного уравнения является решением системы.*

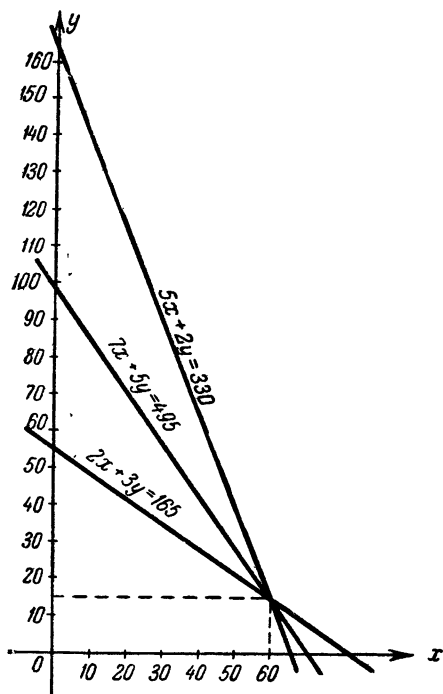


Рис. 25.



Точно так же можно убедиться, что все свойства равенств, выведенных почленным сложением, справедливы и для равенств, выведенных почленным вычитанием.

Приведем теперь два примера, в которых используется свойство выводных уравнений.

**Задача.** Доказать, что уравнения  $x^2 - 5x + 6 = 0$  и  $x^2 - 7x + 6 = 0$  не имеют общих решений.

**Решение.** Допустим, что эти уравнения имеют общее решение. Тогда это решение должно удовлетворять уравнению  $2x = 0$ , полученному почленным вычитанием второго уравнения из первого. Таким образом, если бы рассматриваемые уравнения имели общее решение, то этим решением было бы  $x = 0$ . Однако  $x = 0$  этим уравнениям не удовлетворяет.

**Задача.** Найти общее решение уравнений

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - 3x + 2 = 0.$$

**Решение.** Общее решение этих уравнений должно удовлетворять уравнению  $2x - 4 = 0$ , полученному почленным вычитанием первого уравнения из второго. Следовательно, общим решением рассматриваемых уравнений может быть только  $x = 2$ .

Так как при  $x = 2$  каждое из уравнений превращается в тождество, эти уравнения имеют единственное общее решение  $x = 2$ .

**Ответ.** Единственное общее решение  $x = 2$ .

Задачи, которые мы только что решили, можно решить и не опираясь на свойство выводных уравнений. Для этого достаточно уметь решать уравнения второй степени.

## § 7. Способ сложения и вычитания

Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} y - 3x &= 2, \\ y + 3x &= 8. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Сложим уравнения почленно, получим

$$2y = 10.$$

Это уравнение не содержит  $x$ , значит, его решения имеют такой вид:  $y = 5$ ;  $x$  — любое. Среди полученных решений выводного уравнения надо искать и решение системы. Значит, решение системы должно быть такое:  $x$  пока неизвестно;  $y = 5$ .

Чтобы узнать, какое значение может иметь  $x$ , подставим в какое-нибудь уравнение системы вместо  $y$  число 5. Первое уравнение дает  $5 - 3x = 2$ ;  $x = 1$ . Теперь ясно, что решением системы только и может быть  $x = 1$ ;  $y = 5$ .

Подставим в систему вместо  $x$  и  $y$  найденные значения, получим тождества

$$\begin{aligned} 5 - 3 \cdot 1 &= 2, \\ 5 + 3 \cdot 1 &= 8. \end{aligned}$$

Теперь *доказано*, что  $x=1$ ;  $y=5$  — решение системы. Других решений система не имеет.

*Ответ.*  $x=1$ ;  $y=5$  — единственное решение.

**З а м е ч а н и е.** Подстановка в систему вместо неизвестных их значений нужна была для *доказательства*, что  $x=1$ ;  $y=5$  — действительно решение системы. Из рассуждений, которые мы провели, вытекает только, что если решение существует, то  $x=1$ ;  $y=5$ . Другого решения не может быть. Однако это еще не означает, что  $x=1$ ;  $y=5$  есть решение системы.

Приведем второй прием решения той же системы.

Предположим, что система (1) имеет решение. Складывая уравнения почленно, имеем  $2y=10$ ;  $y=5$ . Вычитая из второго уравнения первое почленно, имеем

$$6x=6; x=1.$$

Получили тот же ответ:  $x=1$ ;  $y=5$ .

Заметим, что при отыскании  $x$  мы здесь не пользовались тем, что  $y=5$ . Мы искали  $x$  так же, как раньше искали  $y$ , т. е. *исключением*  $y$  из системы посредством вычитания.

Проверка решения и в этом случае необходима, так как из свойства выводных уравнений вытекает только, что система не может иметь других решений, кроме  $x=1$ ;  $y=5$ , но не вытекает, что  $x=1$ ;  $y=5$  есть на самом деле решение системы.

Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} 3y - 2x &= 10, \\ 5y - 3x &= 12. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если бы мы сложили уравнения почленно, мы получили бы  $8y - 5x = 22$  — уравнение с двумя неизвестными, которое несколько не помогает найти какое-нибудь из неизвестных.

Почленное вычитание тоже приведет к уравнению с двумя неизвестными.

Выходит, что способ сложения и вычитания здесь не помогает. Почему же систему (1) удалось решить этим способом, а систему (2) решить не удастся? Дело в том, что при сложении уравнений системы (1)  $x$  исчезал и получалось уравнение с одним неизвестным  $y$ . При вычитании уравнений системы (1) исчезал  $y$  и получалось уравнение с одним неизвестным  $x$ . В системе (1) коэффициенты при  $x$  равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, поэтому  $x$  и исчезал при сложении уравнений. В системе (1) коэффициенты при  $y$  равны, поэтому  $y$  и исчезал при вычитании.

Отсюда видно, что систему (2) надо раньше подготовить к сложению или вычитанию с таким расчетом, чтобы коэффициенты при каком-нибудь неизвестном стали равными по абсолютной величине.

Делается это так: умножим обе части первого из уравнений системы на 3, а обе части второго из уравнений системы на 2; получим новую систему

$$\begin{cases} 9y - 6x = 30, \\ 10y - 6x = 24. \end{cases} \quad (3)$$

Ни одно решение системы при этом не потеряется и ни одно не будет приобретено, т. е. система (3) равносильна системе (2). Это вытекает из общих свойств уравнений, которые нам известны (см. § 1 и 2 гл. VII).

Вычитая из второго уравнения системы (3) первое, получим

$$y = -6.$$

Подставляя в первое уравнение системы (2)  $y = -6$ , получим

$$x = -14.$$

Таким образом, если система (2) имеет решение, то  $x = -14$ ;  $y = -6$ , и никаких других решений быть не может. Остается показать, что  $x = -14$ ,  $y = -6$  удовлетворяет системе. Это было сделано раньше.

*Правило. Для того чтобы решить систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, достаточно*

1) *умножить обе части уравнений системы на такие числа, чтобы коэффициенты при одном из неизвестных стали равными по абсолютной величине,*

2) *почленно сложить или вычесть уравнения системы, чтобы получить уравнение с одним неизвестным,*

3) *решить это уравнение с одним неизвестным,*

4) *тем же способом или при помощи найденного неизвестного определить значение другого неизвестного.*

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} 11x - 15y = 12, \\ 2x + 9y = 7. \end{cases} \quad (4)$$

Решение. Умножим почленно первое уравнение системы на 3, второе на 5, получим

$$\begin{cases} 33x - 45y = 36, \\ 10x + 45y = 35. \end{cases} \quad (5)$$

Сложим почленно уравнения системы (5), получим

$$43x = 71,$$

откуда

$$x = \frac{71}{43}.$$

Умножим теперь первое уравнение системы (4) на 2, а второе на 11, получим

$$\left. \begin{aligned} 22x - 30y &= 24, \\ 22x + 99y &= 77. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Вычитая из второго уравнения системы (6) почленно первое, имеем

$$129y = 53; \quad y = \frac{53}{129}.$$

Итак, если система (4) имеет решение, то  $x = \frac{71}{43}$ ;  $y = \frac{53}{129}$ , и никаких других решений быть не может.

**Замечание.** При отыскании  $y$  мы не стали пользоваться тем, что  $x = \frac{71}{43}$ , а подготовили систему к исключению  $x$  и тогда нашли значение  $y$ .

*Проверка. Равенства*

$$11 \cdot \frac{71}{43} - 15 \cdot \frac{53}{129} = 12,$$

$$2 \cdot \frac{71}{43} + 9 \cdot \frac{53}{129} = 7$$

являются тождествами.

Значит,  $x = \frac{71}{43}$ ;  $y = \frac{53}{129}$  — решение системы.

$$\text{Ответ. } x = \frac{71}{43}; \quad y = \frac{53}{129}.$$

### Упражнения

Решить способом сложения или вычитания системы:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad x + y &= 75, \\ x - y &= 5. \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} 2. \quad 5x - 2y &= 3, \\ x + 6y &= 11. \end{aligned} \right\}$$

## § 8. Способ подстановки

Рассмотрим опять систему

$$\left. \begin{aligned} y - 3x &= 2, \\ y + 3x &= 8. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Предположим, что мы ее решили, нашли значения  $x$  и  $y$  и подставили их в (1). Тогда равенства (1) должны быть тождествами. Из первого тождества выразим  $y$  через  $x$ , получим новое тождество

$$y = 2 + 3x.$$

Полученное выражение для  $y$  подставим вместо  $y$  во второе тождество, получим новое тождество

$$(2 + 3x) + 3x = 8,$$

или

$$2 + 6x = 8; \quad 6x = 6; \quad x = 1.$$

Зная, что  $x = 1$ , подставим 1 вместо  $x$  в какое-либо из тождеств (1), например в первое. Получим

$$y - 3 = 2, \quad \text{т. е. } y = 5.$$

Таким образом, если предположить, что система (1) имеет решение, то выходит, что  $x = 1$ ;  $y = 5$ , и никаких других решений нет. Остается *доказать*, что  $x = 1$ ;  $y = 5$  есть решение системы (1). Это решение получалось и другими способами и было в свое время показано, что оно удовлетворяет системе.

Приведем второй прием решения той же системы. Допустим, что система

$$\left. \begin{aligned} y - 3x &= 2, \\ y + 3x &= 8 \end{aligned} \right\}$$

имеет решение.

Из первого уравнения имеем  $y = 2 + 3x$ . Подставим  $2 + 3x$  вместо  $y$  во второе уравнение, находим

$$(2 + 3x) + 3x = 8; \quad x = 1.$$

Теперь из первого уравнения выразим  $x$  через  $y$ . Получим

$$x = \frac{y - 2}{3}.$$

Подставим  $\frac{y - 2}{3}$  вместо  $x$  во второе уравнение, получим

$$y + 3 \cdot \frac{y - 2}{3} = 8; \quad y + y - 2 = 8; \quad y = 5.$$

Заметим, что при отыскании  $y$  мы не стали пользоваться тем, что  $x$  нам известен, а искали  $y$  тем же путем, как раньше искали  $x$ .

*Правило. Для того чтобы решить систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, достаточно*

1) из одного уравнения системы выразить одно неизвестное через другое (например,  $y$  через  $x$ ),

2) полученное выражение подставить вместо этого неизвестного ( $y$ ) в другое уравнение системы и решить получающееся при этом уравнение с одним неизвестным ( $x$ ),

3) тем же способом или при помощи найденного неизвестного ( $x$ ) найти значение другого неизвестного ( $y$ ).

Рассмотрим систему

$$\left. \begin{aligned} 3y - 2x &= 10, \\ 5y - 3x &= 12. \end{aligned} \right\}$$

Допустим, что она имеет решение. Тогда из первого уравнения имеем

$$y = \frac{2x + 10}{3}.$$

Подставим полученное для  $y$  выражение во второе уравнение системы. Получим

$$\frac{5(2x + 10)}{3} - 3x = 12,$$

или  $10x + 50 - 9x = 36$ ;  $x = -14$ . Зная  $x$ , как всегда, находим  $y = -6$ . Таким образом, если допустить, что система имеет решение, то  $x = -14$ ;  $y = -6$ . Других решений нет.

Остается доказать, что  $x = -14$ ;  $y = -6$  — решение системы. Для этого достаточно подставить это решение в систему и убедиться, что каждое из уравнений системы превращается в тождество. Это было уже сделано.

Рассмотрим более сложный пример

$$\left. \begin{aligned} (2x + y - 1)(3x - 2y + 5) &= 0, \\ (x - 2y + 5)(x + y - 3) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Предложенная система является системой двух уравнений второй степени с двумя неизвестными. В этом легко убедиться, раскрыв скобки.

Однако скобки здесь раскрывать невыгодно. Рассуждаем так. Левая часть каждого из уравнений представляет собой произведение двух сомножителей. Для того чтобы произведение равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы хоть один из сомножителей равнялся нулю.

Поэтому система разбивается на четыре системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными:

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - 1 &= 0, \\ x - 2y + 5 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} 2x + y - 1 &= 0, \\ x + y - 3 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} 3x - 2y + 5 &= 0, \\ x - 2y + 5 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} 3x - 2y + 5 &= 0, \\ x + y - 3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Система (3) имеет решение:  $x = -\frac{3}{5}$ ;  $y = \frac{11}{5}$ .

Система (4) имеет решение:  $x = -2$ ;  $y = 5$ .

Система (5) имеет решение:  $x = 0$ ;  $y = \frac{5}{2}$ .

Система (6) имеет решение:  $x = \frac{1}{5}$ ;  $y = \frac{14}{5}$ .

*Ответ.* Система (1) имеет четыре решения:

$$x = -\frac{3}{5}, y = \frac{11}{5}; x = -2, y = 5; x = 0, \\ y = \frac{5}{2}; x = \frac{1}{5}, y = \frac{14}{5}.$$

### Упражнения

1. Решить способом подстановки систему

$$\begin{cases} x + y = 75, \\ x - y = 15. \end{cases}$$

## § 9. Решение систем уравнений первой степени с двумя неизвестными с буквенными коэффициентами

Так как буквы означают у нас числа, все сказанное о решении систем уравнений с числовыми коэффициентами относится также и к системам уравнений с буквенными коэффициентами. Нужно лишь, как всегда в таких случаях, следить за тем, чтобы незаметно для себя не допустить деления на нуль.

*Пример.* Решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax + y = 1, \\ 2x + y = 2. \end{cases} \quad (1)$$

*Решение.* Вычитая из второго уравнения первое, имеем

$$(2 - a)x = 1.$$

Сейчас нам предстоит делить обе части уравнения на  $2 - a$ . Но выражение  $2 - a$  при  $a = 2$  равно нулю, при всех других значениях  $a$  оно отлично от нуля. Итак, возможны два случая.

*Случай 1.*  $a \neq 2$ , тогда  $x = \frac{1}{2-a}$ ; отсюда  $y = 1 - a \frac{1}{2-a}$ ;  
 $y = \frac{2-2a}{2-a}.$

*Случай 2.*  $a = 2$ . Система имеет вид

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 2x + y = 2. \end{cases} \quad (2)$$

Система (2) решений не имеет.

*Ответ.* Если  $a \neq 2$ , то  $x = \frac{1}{2-a}$ ;  $y = \frac{2(1-a)}{2-a}.$

Если  $a = 2$ , система решений не имеет.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} ax + y = a, \\ 2x + y = 2. \end{cases} \quad (3)$$

Решение. Вычитая из второго уравнения первое, имеем

$$(2 - a)x = 2 - a.$$

Если  $a \neq 2$ , то  $x = 1$ ;  $y = 0$ . Если  $a = 2$ , система примет такой вид:

$$\begin{cases} 2x + y = 2, \\ 2x + y = 2. \end{cases} \quad (4)$$

Эта система имеет бесконечное множество решений. Именно,  $y = 2 - 2x$ , где  $x$  — любое число.

Ответ. Если  $a \neq 2$ , то  $x = 1$ ;  $y = 0$ . Если  $a = 2$ , то  $y = 2 - 2x$ ,  $x$  — любое число.

#### § 10. Решение задач при помощи системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

Задача. Отправлены два груза. Известно, что  $\frac{2}{5}$  веса первого груза на 96 кг меньше, чем  $\frac{3}{4}$  веса второго, а  $\frac{5}{8}$  веса второго груза содержат столько же килограмм, сколько  $\frac{4}{9}$  веса первого. Найти вес того и другого груза.

Решение. Обозначим буквой  $x$  вес первого груза (в килограммах), буквой  $y$  — вес второго груза (в килограммах). Тогда

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x = \frac{3}{4}y - 96, \\ \frac{4}{9}x = \frac{5}{8}y. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем

$$x = \frac{45}{32}y. \quad (1)$$

Подставляя в первое уравнение вместо  $x$  его выражение через  $y$ , получим

$$\frac{9}{16}y = \frac{3}{4}y - 96; \quad 9y = 12y - 96 \cdot 16;$$

$$3y = 96 \cdot 16; \quad y = 32 \cdot 16; \quad y = 512.$$

Пользуясь равенством (1), находим, что  $x = 720$ .

Проверка.  $\frac{2}{5}$  веса первого груза составляют 288 кг;  $\frac{3}{4}$  веса второго груза составляют 384 кг; 288 кг на 96 кг меньше, чем 384 кг;



$\frac{5}{8}$  веса второго груза составляют 320 кг;  $\frac{4}{9}$  веса первого составляют тоже 320 кг. Задача решена правильно.

*Ответ.* 720 кг и 512 кг.

**Задача.** Двое рабочих могли выполнить некоторую работу за 8 часов. Случилось так, что первый рабочий работал 6 час, а второй 9 час, и в результате они выполнили  $\frac{51}{56}$  всей работы. Во сколько часов мог бы выполнить эту работу каждый рабочий в отдельности?

**Решение.** Обозначим буквой  $x$  число часов, в течение которых первый рабочий, работая один, мог бы выполнить всю работу. Буквой  $y$  обозначим число часов, в течение которых эту работу мог бы выполнить второй рабочий, если бы работал один. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{1}{8}, \\ \frac{6}{x} + \frac{9}{y} &= \frac{51}{56}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Разделим обе части второго уравнения на 3, умножив одновременно обе части первого уравнения на 2. Получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{2}{y} &= \frac{1}{4}, \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{y} &= \frac{17}{56}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Вычитая из второго уравнения первое, имеем

$$\frac{1}{y} = \frac{3}{56}; \quad y = \frac{56}{3}.$$

Подставим найденное значение  $y$  в первое из уравнений системы (2), получим

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{56} = \frac{1}{8}; \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{14}; \quad x = 14.$$

*Проверка.*  $\frac{1}{14} + \frac{3}{56} = \frac{1}{8}; \quad \frac{6}{14} + \frac{27}{56} = \frac{51}{56}$ . Задача решена верно.

*Ответ.* 14 час и  $18\frac{2}{3}$  час.

## § 11. Системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными

**Задача.** Периметр треугольника  $ABC$  равен 43 см,  $AB$  больше  $AC$  на 8 см,  $AC$  больше  $BC$  на 1 см. Определить стороны этого треугольника.

**Решение.** Обозначим длину  $BC$  буквой  $x$  (в см). Тогда длина  $AC$  составляет  $(x+1)$  см, длина  $AB$  составляет  $(x+9)$  см. По условию,

периметр треугольника равен 43 см. Значит,

$$x + (x + 1) + (x + 9) = 43; \quad 3x = 33; \quad x = 11.$$

Ответ:  $BC = 11$  см;  $AC = 12$  см;  $AB = 20$  см.

В этой задаче требовалось найти три величины. Мы решили задачу при помощи уравнения с одним неизвестным. Так мы поступали и раньше, так и следует поступать всегда, если это возможно.

Эту же задачу можно решить и при помощи системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

Обозначим буквой  $x$  длину стороны  $BC$  (в см), буквой  $y$  длину стороны  $AC$  (в см). Тогда длина стороны  $AB$  составляет  $(y + 8)$  см. По условию,

$$y - x = 1,$$

$$x + y + (y + 8) = 43$$

или

$$\left. \begin{array}{l} y - x = 1; \\ 2y + x = 35. \end{array} \right\}$$

Значит,

$$y = 12; \quad x = 11.$$

Ответ.  $BC = 11$  см;  $AC = 12$  см;  $AB = 20$  см.

Если бы мы пожелали ввести три буквы для обозначения неизвестных, условие задачи позволило бы составить три уравнения первой степени с тремя неизвестными.

Действительно, обозначим буквой  $x$  длину стороны  $BC$  (в см), буквой  $y$  длину стороны  $AC$  (в см), буквой  $z$  длину стороны  $AB$  (в см). Тогда

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 43, \\ z - y = 8, \\ y - x = 1. \end{array} \right\} \quad (1)$$

Нам нужно найти такие значения  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , которые удовлетворяли бы всем трем уравнениям, а не одному или двум из них, т. е. нам нужно решить систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными. Мы еще не знаем, как решаются такие системы, однако решение системы (1) нам известно, эту задачу мы решили другим способом. Именно,

$$x = 11; \quad y = 12; \quad z = 20.$$

Подставив в систему (1) вместо неизвестных эти значения, убедимся, что в результате каждое из уравнений системы превращается

в тождество. Действительно,

$$11 + 12 + 20 = 43,$$

$$20 - 12 = 8,$$

$$12 - 11 = 1.$$

Эта задача легко решается и при помощи уравнения с одним неизвестным, и при помощи системы двух уравнений с двумя неизвестными.

Встречаются, однако, такие задачи, которые легче привести к системе трех уравнений с тремя неизвестными, чем к уравнению с одним неизвестным или к системе уравнений с двумя неизвестными. Вот, например, такая задача.

**Задача.** За 5 открытых писем, 3 одинаковые почтовые марки и 3 конверта надо заплатить 2 руб. 60 коп. За 2 открытых письма и 6 таких же марок надо уплатить на 2 руб. 75 коп. больше, чем за 3 конверта. За 8 открытых писем и 2 конверта надо заплатить на 90 коп. больше, чем за 3 марки. Сколько стоит открытое письмо, марка и конверт (в отдельности)?

**Решение.** Обозначим стоимость открытого письма буквой  $x$  (в коп.), стоимость марки буквой  $y$  (в коп.), стоимость конверта буквой  $z$  (в коп.). Тогда

$$\left. \begin{aligned} 5x + 3y + 3z &= 260, \\ 2x + 6y - 3z &= 275, \\ 8x - 3y + 2z &= 90. \end{aligned} \right\}$$

Задача без особого труда привела к системе трех уравнений первой степени с тремя неизвестными. Всякое другое ее решение было бы гораздо сложнее.

## § 12. Решение системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными

Решение системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными основано на тех же соображениях, что и решение системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

Основные свойства уравнений, которые мы установили для уравнений с одним неизвестным, уравнений с двумя неизвестными и систем уравнений с двумя неизвестными, полностью справедливы и для уравнения с тремя неизвестными и для систем таких уравнений (см. гл. VII, § 1, 2, 3, 4 и гл. VIII, § 6).

Изложим основные способы решения систем трех уравнений первой степени с тремя неизвестными: способ сравнения, способ сложения и вычитания, способ подстановки.

Способ сравнения. Разъясним этот способ на системе

$$\left. \begin{aligned} 5x + 3y + 3z &= 260, \\ 2x + 6y - 3z &= 275, \\ 8x - 3y + 2z &= 90. \end{aligned} \right\}$$

Выразим из каждого уравнения  $x$  через  $y$  и  $z$ . Получим

$$x = \frac{260 - 3y - 3z}{5}, \quad (1)$$

$$x = \frac{275 - 6y + 3z}{2}, \quad (2)$$

$$x = \frac{90 + 3y - 2z}{8}. \quad (3)$$

Приравнявая друг другу три различных выражения для  $x$ , получаем систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{260 - 3y - 3z}{5} &= \frac{275 - 6y + 3z}{2}, \\ \frac{260 - 3y - 3z}{5} &= \frac{90 + 3y - 2z}{8}. \end{aligned} \right\}$$

Решая эту систему по известным правилам, найдем, что  $y = 40$ ;  $z = 5$ . Пользуясь любым из уравнений (1), (2) или (3), найдем  $x = 25$ . Итак,

$$x = 25; \quad y = 40; \quad z = 5.$$

Других решений система не может иметь. Проверка решения и здесь логически необходима. Из сказанного можно вывести такое правило:

*Для того чтобы решить систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными, достаточно:*

- 1) из каждого уравнения системы выразить какое-нибудь неизвестное (например,  $x$ ) через другие неизвестные ( $y$  и  $z$ ),
- 2) одно из этих выражений приравнять двум другим и решить полученную систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными ( $y$  и  $z$ ),
- 3) из любого уравнения системы найти значение третьего неизвестного ( $x$ ).

Пример. Решить систему

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z &= 2, \\ 2x + y + z &= 7, \\ x + y + z &= 6. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Решение. Выразим  $z$  через  $x$  и  $y$ . Получим

$$z = x + 2y - 2, \quad (5)$$

$$z = -2x - y + 7, \quad (6)$$

$$z = -x - y + 6. \quad (7)$$

Сравнивая (5) и (6), затем (5) и (7), получим систему

$$x + 2y - 2 = -2x - y + 7,$$

$$x + 2y - 2 = -x - y + 6$$

или

$$\begin{cases} 3x + 3y = 9, \\ 2x + 3y = 8, \end{cases} \quad x = 1, \quad y = 2.$$

Из уравнения (5) находим, что  $z = 3$ . Других решений система не может иметь.

Для проверки подставим в систему (4) вместо  $x$ ,  $y$ ,  $z$  числа 1, 2 и 3 соответственно. Получим тождества

$$1 + 4 - 3 = 2,$$

$$2 + 2 + 3 = 7,$$

$$1 + 2 + 3 = 6.$$

Ответ.  $x = 1$ ;  $y = 2$ ;  $z = 3$ .

Способ сложения и вычитания. Разъясним этот способ решения на примере

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2, \\ 2x + y + z = 7, \\ x + y + z = 6. \end{cases} \quad (8)$$

Сложим почленно первые два уравнения. Получим первое выводное уравнение

$$3x + 3y = 9. \quad (9)$$

Сложим теперь почленно первое уравнение с третьим. Получим второе выводное уравнение

$$2x + 3y = 8. \quad (10)$$

Всякое решение системы (8) должно быть и решением каждого из выводных уравнений (9) и (10), следовательно, должно удовлетворять системе

$$\begin{cases} 3x + 3y = 9, \\ 2x + 3y = 8. \end{cases} \quad (11)$$

Система (11) имеет единственное решение  $x = 1$ ;  $y = 2$ . Значит, решение системы (8) имеет такой вид:  $x = 1$ ;  $y = 2$ ;  $z$  пока неиз-

вестно. Из первого уравнения системы (8) находим, что при  $x=1$ ;  $y=2$  неизвестное  $z$  имеет единственное значение  $z=3$ . Выходит, что системе (8) могут удовлетворять только  $x=1$ ;  $y=2$ ;  $z=3$ ; других решений система (8) иметь не может.

Остается убедиться, что  $x=1$ ;  $y=2$ ;  $z=3$  — решение системы (8). Это сделано выше. Заметим, что проверка здесь необходима, так как не всякое решение выводного уравнения является решением исходной системы.

*Ответ.*  $x=1$ ;  $y=2$ ;  $z=3$ .

Пример. Решить систему

$$\left. \begin{aligned} 5x + 3y + 3z &= 260, \\ 2x + 6y - 3z &= 275, \\ 8x - 3y + 2z &= 90. \end{aligned} \right\}$$

Решение. Сложив первое уравнение почленно со вторым, имеем

$$7x + 9y = 535.$$

Чтобы уравнивать (по абсолютной величине) коэффициенты при  $z$ , умножим теперь обе части второго уравнения на 2, а обе части третьего уравнения на 3; получим

$$\begin{aligned} 4x + 12y - 6z &= 550, \\ 24x - 9y + 6z &= 270. \end{aligned}$$

Сложив последние два уравнения почленно, получим

$$28x + 3y = 820.$$

Теперь имеем систему

$$\left. \begin{aligned} 7x + 9y &= 535, \\ 28x + 3y &= 820 \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} 7x + 9y &= 535, \\ 84x + 9y &= 2460. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда

$$77x = 1925; \quad x = 25.$$

Далее

$$175 + 9y = 535; \quad 9y = 360; \quad y = 40.$$

Из последнего уравнения системы имеем

$$2z = 90 + 120 - 200; \quad z = 5.$$

Проверка этого решения производилась ранее.

*Ответ.*  $x=25$ ;  $y=40$ ;  $z=5$ .

Способ подстановки. Поясним этот способ на примере. Решить систему

$$\left. \begin{aligned} x + 2y - z &= 2, \\ 2x + y + z &= 7, \\ x + y + z &= 6. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Предположим, что система решена и каждое из уравнений (12) есть тождество. Из первого уравнения имеем

$$x = 2 + z - 2y.$$

Подставим во второе и третье уравнения системы вместо  $x$  полученное для него выражение. Имеем

$$\left. \begin{aligned} 2(2 + z - 2y) + y + z &= 7, \\ (2 + z - 2y) + y + z &= 6. \end{aligned} \right\}$$

Откуда

$$\left. \begin{aligned} 3z - 3y &= 3, \\ 2z - y &= 4. \end{aligned} \right\}$$

Значит,

$$y = 2; \quad z = 3.$$

Теперь из уравнения (12) найдем, что  $x = 1$ .

Проверка и здесь необходима, так как в основе решения лежит предположение, что система имеет решение; иначе мы не могли бы с уравнениями системы обращаться как с тождествами. Проверку производить не станем, так как мы ее производили раньше.

*Ответ.*  $x = 1; y = 2; z = 3$ .

Иногда для упрощения вычислений следует отступить от общего правила и строить выводные уравнения, удобные для данного частного случая.

Пример. Решить систему

$$\left. \begin{aligned} 3x + y + z &= 6, \\ x + 3y + z &= 4, \\ x + y + 3z &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Решение. Сложив почленно все три уравнения системы, имеем

$$x + y + z = 2. \quad (13)$$

Вычитая уравнение (13) почленно из каждого уравнения системы, найдем

$$x = 2; \quad y = 1; \quad z = -1.$$

Других решений система не может иметь.

Подставив в условие найденные значения вместо неизвестных, имеем

$$3 \cdot 2 + 1 - 1 = 6,$$

$$2 + 3 - 1 = 4,$$

$$2 + 1 - 3 = 0.$$

*Ответ.*  $x=2$ ;  $y=1$ ;  $z=-1$ .

Обычно уравнения надо приводить к целому виду. Вот пример, когда от этого общего правила следует отступить.

Пример. Решить систему

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{1}{z} &= 9, \\ \frac{3}{x} - \frac{2}{y} + \frac{2}{z} &= 14, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z} &= -1. \end{aligned} \right\}$$

Решение. Положим  $\frac{1}{x}=a$ ;  $\frac{1}{y}=b$ ;  $\frac{1}{z}=c$ . Тогда система примет такой вид:

$$\left. \begin{aligned} 2a + 3b - c &= 9, \\ 3a - 2b + 2c &= 14, \\ a + b - 3c &= -1. \end{aligned} \right\}$$

Исключим  $b$  сначала из первого и третьего, а затем из второго и третьего уравнений системы. Получим

$$\left. \begin{aligned} a - 8c &= -12, \\ 5a - 4c &= 12 \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} a - 8c &= -12, \\ 10a - 8c &= 24, \end{aligned} \right\} \quad 9a = 36; \quad a = 4.$$

Далее:  $c=2$ ;  $b=1$ . Наконец,  $x=\frac{1}{4}$ ;  $y=1$ ;  $z=\frac{1}{2}$ .

*Проверка.*

$$8 + 3 - 2 = 9,$$

$$12 - 2 + 4 = 14,$$

$$4 + 1 - 6 = -1.$$

*Ответ.*  $x=\frac{1}{4}$ ;  $y=1$ ;  $z=\frac{1}{2}$ .



### § 13. О числе решений системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными

Мы встречались с системами, которые имели единственное решение. Сейчас мы приведем пример системы, имеющей бесконечное множество решений, а также системы, совсем не имеющей решений.

Пример. Система

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ 2x + 2y + 2z &= 2, \\ 3x - 3y + 3z &= 3 \end{aligned} \right\}$$

имеет бесконечное множество решений, так как всякое решение первого уравнения системы удовлетворяет второму и третьему уравнениям.

Пример. Система

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ 2x + 2y + 2z &= 3, \\ 5x - y + z &= 7 \end{aligned} \right\}$$

не имеет решения.

Действительно, первое уравнение требует, чтобы мы отыскивали такие  $x, y, z$ , сумма которых равна единице, а второе уравнение требует, чтобы сумма тех же чисел равнялась  $\frac{3}{2}$ . Такие числа найти нельзя.

**З а м е ч а н и е.** Рассуждения, которые мы применяли для решения системы трех уравнений с тремя неизвестными, могут быть применены и для решения системы четырех уравнений с четырьмя неизвестными и т. д.

---

## ГЛАВА IX

### ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

#### § 1. Определение действия извлечения корня

Корнем  $n$ -й степени из числа  $a$  называется число  $x$ ,  $n$ -я степень которого равна  $a$ . Например, число 2 есть корень пятой степени из 32, ибо  $2^5 = 32$ . Корень второй степени иначе называется *квадратным корнем*, корень третьей степени — *кубическим корнем*.

Действие, посредством которого по данному числу  $a$  и показателю  $n$  находится корень  $n$ -й степени из  $a$ , называется *извлечением корня*. Показатель  $n$  называется *показателем корня*. Извлечение корня есть действие, обратное действию возведения в степень. Корень  $n$ -й степени из числа  $a$  обозначается следующим образом:

$$\sqrt[n]{a}.$$

В случае квадратного корня показатель не указывается, так что квадратный корень из числа  $a$  обозначается  $\sqrt{a}$ .

Из определения корня следует, что  $(\sqrt[n]{a})^n = a$ , в частности

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

#### Упражнения

Вычислить значения корней:

$$1. \sqrt{4}. \quad 2. \sqrt[3]{27}. \quad 3. \sqrt[3]{-\frac{1}{8}}. \quad 4. \sqrt{0,25}. \quad 5. \sqrt[5]{0,00001}.$$

Решить уравнения:

$$6. x^2 = 4. \quad 7. x^2 = -8. \quad 8. x^2 = 0,001. \quad 9. x^2 = \frac{27}{125}.$$

#### § 2. Арифметическое значение квадратного корня

Допустим, что нам дано положительное число  $a$  такое, что для него существует квадратный корень, например  $a = 4$ . Мы видим, что не одно, а целых два числа удовлетворяют определению квадратного корня из 4, именно числа 2 и  $-2$ . Действительно,  $2^2 = 4$  и  $(-2)^2 = 4$ . Таким же образом обстоит дело и для всякого другого положитель-

ного числа  $a$ : если  $x$  удовлетворяет условию  $x^2 = a$ , то и число  $-x$  удовлетворяет этому условию, именно  $(-x)^2 = a$ . Поэтому каждое из двух противоположных чисел  $x$  и  $-x$  с одинаковым основанием может быть названо квадратным корнем из числа  $a$ . Из этих двух чисел одно положительно, другое отрицательно. Однако положительное значение квадратного корня из положительного числа может существовать только одно.

Действительно, допустим, что

$$x^2 = a \quad \text{и} \quad y^2 = a,$$

причем  $x$  и  $y$  оба положительны. Тогда

$$x^2 - y^2 = 0.$$

Разлагая на множители левую часть, мы приходим к равенству

$$(x - y)(x + y) = 0.$$

Произведение двух чисел  $x - y$  и  $x + y$  равно нулю. Следовательно, равен нулю один из сомножителей. Однако  $x + y$  есть положительное число, как сумма двух положительных чисел.

Следовательно,

$$x - y = 0, \quad x = y.$$

Положительное значение квадратного корня из положительного числа называется *арифметическим значением квадратного корня*.

Условимся знаком  $\sqrt{a}$  обозначать именно *арифметическое значение квадратного корня*. Это условие вносит определенность при пользовании знаком корня. Так, согласно этому условию,  $\sqrt{4} = 2$ ;  $\sqrt{36} = 6$  и т. п.

Однако приняв это условие, о нем необходимо помнить, чтобы не делать ошибок при пользовании знаком квадратного корня.

Так,  $\sqrt{(-2)^2} = 2$ , а не  $-2$ , что, казалось бы, более естественно. Равенство  $\sqrt{a^2} = a$  есть верное равенство только при  $a \geq 0$ .

При  $a < 0$  мы должны считать  $\sqrt{a^2} = -a$ . В то же время равенство  $\sqrt{a^2} = |a|$  будет верно всегда.

### Упражнения

1. Вычислить значения  $\sqrt{3+a}$  при  $a = -2$ ;  $a = -\frac{3}{4}$ ;  $a = 1$ ;  $a = \frac{13}{4}$ .
2. Вычислить ряд значений выражения

$$y = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2}$$

и построить график зависимости  $y$  от  $x$  (взять  $x = -5$ ;  $-4$ ;  $-3$ ;  $-2$ ;  $-1$ ;  $-\frac{1}{2}$ ;  $0$ ;  $\frac{1}{2}$ ;  $1$ ;  $2$ ;  $3$ ;  $4$ ;  $5$ ).

### § 3. Постановка вопроса о приближенном вычислении корня

Извлечение квадратного корня из данного числа выполнимо далеко не всегда, если ограничиться рассмотрением рациональных чисел. Так, извлечение квадратного корня из отрицательного числа есть действие невыполнимое, ибо квадрат любого рационального числа не может быть отрицательным.

Более того, далеко не из каждого рационального положительного числа можно извлечь рациональный квадратный корень. Действительно, рассмотрим таблицу квадратов целых чисел:

| $a$   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9  | 10...  |
|-------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|--------|
| $a^2$ | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100... |

Мы видим, что квадраты целых чисел очень быстро возрастают, так что промежутки между квадратами соседних целых чисел тоже довольно быстро растут. Целые числа, находящиеся внутри таких промежутков, не являются квадратами целых чисел. Докажем, что они не являются и квадратами дробных чисел.

Для этого достаточно установить, что *квадрат дробного числа не может быть числом целым.*

Действительно, каждое дробное число  $a$  может быть представлено в виде несократимой дроби  $\frac{p}{q}$ , т. е. в виде частного от деления двух целых чисел  $p$  и  $q$ , не имеющих общих простых множителей, причем  $q > 1$ .

Если  $a = \frac{p}{q}$ , то  $a^2 = \frac{p^2}{q^2}$ . Очевидно, что  $\frac{p^2}{q^2}$  тоже есть несократимая дробь, ибо  $p^2$  содержит только те простые множители, которые входят в  $p$ , а  $q^2$  — только те простые множители, которые входят в  $q$ , а  $p$  и  $q$  общих множителей не имеют. Таким образом,  $a^2$  не может быть целым числом.

Итак, числа 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12... не являются ни квадратами целых чисел, ни квадратами чисел дробных. Следовательно, извлечение квадратного корня из этих чисел есть действие невыполнимое, если оставаться в области рациональных чисел.

Рассмотрим теперь более подробную таблицу квадратов, придавая числу  $a$  значения через  $\frac{1}{10}$ . Ограничимся при этом рассмотрением промежутка от  $a=1$  до  $a=2$ :

| $a$   | 1 | 1,1  | 1,2  | 1,3  | 1,4  | 1,5  | 1,6  | 1,7  | 1,8  | 1,9  | 2 |
|-------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|---|
| $a^2$ | 1 | 1,21 | 1,44 | 1,69 | 1,96 | 2,25 | 2,56 | 2,89 | 3,24 | 3,61 | 4 |

Промежуток между двумя соседними квадратами в этой таблице в среднем в 10 раз меньше, чем промежуток между соседними квадратами 1 и 4 в предшествующей таблице.

Рассмотрим теперь таблицу квадратов, придавая числу  $a$  значения через  $\frac{1}{100}$ , ограничившись промежутком от  $a=1,4$  до  $a=1,5$ :

|       |      |        |        |        |        |        |        |        |        |        |      |
|-------|------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|------|
| $a$   | 1,4  | 1,41   | 1,42   | 1,43   | 1,44   | 1,45   | 1,46   | 1,47   | 1,48   | 1,49   | 1,5  |
| $a^2$ | 1,96 | 1,9881 | 2,0164 | 2,0449 | 2,0736 | 2,1025 | 2,1316 | 2,1609 | 2,1904 | 2,2201 | 2,25 |

По сравнению с предыдущей таблицей, промежутки между соседними квадратами еще уменьшились, в среднем в 10 раз.

Таким образом, если брать значения  $a$  все более «густо», т. е. делая промежутки между соседними значениями для  $a$  все меньше и меньше, то и промежутки между соседними значениями  $a^2$  будут становиться все меньше и меньше. Поэтому, если взять промежутки между соседними значениями для  $a$  достаточно малыми, мы можем приблизиться посредством значений  $a^2$  к любому положительному числу  $b$  с любой степенью точности.

Проследим, например, за приближениями к числу 2 посредством квадратов на протяжении составленных таблиц. Из первой таблицы мы находим, что наиболее близкие к числу 2 квадраты имеют числа 1 и 2;  $1^2 = 1 < 2$ ;  $2^2 = 4 > 2$ . Во второй таблице числами, дающими наиболее близкие к числу 2 квадраты, являются 1,4 и 1,5, причем  $1,4^2 = 1,96 < 2$ ;  $1,5^2 = 2,25 > 2$ . Третья таблица дает еще лучшие приближения:

$$1,41^2 = 1,9881 < 2; \quad 1,42^2 = 2,0164 > 2.$$

Если мы пожелаем еще улучшить приближения, мы можем рассмотреть квадраты чисел между 1,41 и 1,42, взяв их через 0,001. Это рассмотрение нам даст

$$1,414^2 = 1,999396 < 2; \quad 1,415^2 = 2,002225 > 2.$$

Таким образом, среди рациональных чисел не существует числа, квадрат которого равен 2, но существуют числа, квадраты которых сколь угодно близко подходят к 2.

То же самое можно сказать о любом другом положительном числе, для которого точное извлечение корня в области рациональных чисел невозможно. Поэтому имеет смысл ставить вопрос о *приближенном вычислении* квадратного корня с некоторой наперед заданной точностью. Так, числа 1 и 2 являются приближенными значениями для  $\sqrt{2}$  с точностью до 1; числа 1,4 и 1,5 являются приближенными значениями для  $\sqrt{2}$  с точностью до 0,1; 1,41 и 1,42 — приближенные

значения  $\sqrt{2}$  с точностью до 0,01; 1,414 и 1,415 — приближенные значения  $\sqrt{2}$  с точностью до 0,001 и т. д.

Дадим теперь строгое определение приближенных значений квадратного корня из данного положительного числа.

*Приближенным значением с недостатком для квадратного корня из данного положительного числа  $b$  с точностью до  $a$  называется такое положительное число  $a$ , что  $a^2 < b$ , но  $(a + a)^2 > b$ .*

В свою очередь число  $a + a$  называется *приближенным значением с избытком* для  $\sqrt{b}$  с точностью до  $a$ .

Для практических целей в качестве меры точности  $a$  принимаются числа 0,1, 0,01, 0,001 и т. д. В этих случаях за приближенное значение корня принимаются десятичные дроби с соответствующим числом цифр после запятой.

Приближенные значения корня можно находить посредством испытаний, постепенно увеличивая точность до той, которая требуется в задаче. Рассмотрим еще один пример.

**Пример.** Вычислить  $\sqrt{3}$  с точностью до 0,01.

**Решение.** Приближения с точностью до 0,1 мы находим из приведенной выше таблицы. Приближение с недостатком есть 1,7 ибо  $1,7^2 = 2,89 < 3$ , а  $1,8^2 = 3,24 > 3$ . Для вычисления приближения с точностью до 0,01 испытываем  $1,71^2 = 2,9231$ ;  $1,72^2 = 2,9574$ ;  $1,73^2 = 2,9919$ ;  $1,74^2 = 3,0266$ . Таким образом, с точностью до 0,01 (с недостатком)

$$\sqrt{3} \approx 1,73$$

Способом испытаний мы можем приближенно вычислять корень из любого положительного числа с любой степенью точности. Однако этот способ требует хотя и простых, но утомительных вычислений. В следующих параграфах мы познакомимся с более удобными способами вычисления квадратного корня.

Отметим, что ставить вопрос о приближенном вычислении квадратного корня из *отрицательного* числа бессмысленно, так как приближаться к данному отрицательному числу посредством квадратов рациональных чисел невозможно.

### Упражнения

1. Посредством испытаний вычислить  $\sqrt{7,2}$  с точностью до 0,01.

## § 4. Извлечение квадратного корня при помощи графика

Выведенные в предшествующих параграфах свойства и особенности действия извлечения квадратного корня становятся особенно наглядными, если перейти от рассмотрения таблицы квадратов к графику зависимости  $y = x^2$ . Этот график нами уже рассматривался в § 17 гл. IV.

Приводим снова этот график (рис. 26). Он имеет вид кривой линии, состоящей из двух бесконечных ветвей, симметричных относительно оси ординат. Эти ветви сходятся в начале координат, плавно переходя одна в другую. Как уже было сказано, эта кривая называется параболой.

Задача извлечения квадратного корня заключается в определении числа  $x$  из зависимости  $x^2 = y$  при данном  $y$ . Для решения этой задачи при помощи графика нужно на параболе найти точки, имеющие данную ординату  $y$ , и определить абсциссы этих точек.

Очевидно, что при  $y < 0$  таких точек нет, ибо весь график расположен выше оси абсцисс, касаясь ее лишь в начале координат. При  $y = 0$  такая точка единственна, это начало координат. Абсцисса ее равна тоже нулю. При  $y > 0$  таких точек оказывается две, расположенных симметрично относительно оси ординат. Это соответствует тому, что квадратный корень из положительного числа имеет два значе-

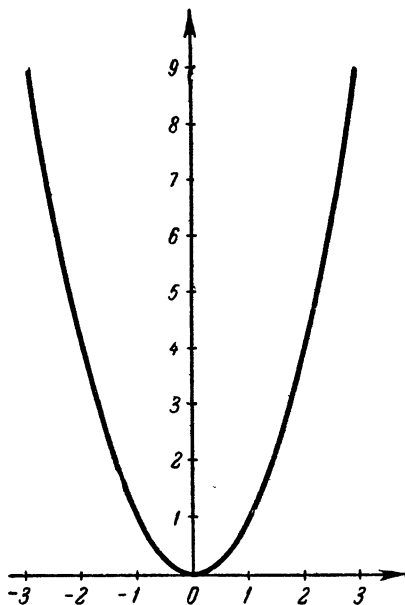


Рис. 26.

ния, имеющие одинаковую абсолютную величину, но отличающиеся знаками. Выбор арифметического значения квадратного корня соответствует тому, что из двух ветвей параболы мы рассматриваем только одну, именно правую ветвь. На этой ветви точка с заданной ординатой оказывается уже единственной. Измерив абсциссу этой точки, мы получим приближенное значение  $\sqrt{y}$  с той точностью, которую допускает график.

Таким образом, из графика зависимости  $y = x^2$  мы видим, что корень из отрицательного числа не существует и что корень из любого положительного числа существует и имеет два значения.

Увеличивая масштаб, мы можем построить график с любой заданной степенью точности. Следовательно, и само извлечение корня из данного положительного числа можно осуществить с любой точностью.

График зависимости  $y = x^2$  может служить для фактического вычисления квадратных корней с небольшой точностью.

С этой целью следует тщательно построить график на миллиметровой бумаге, приняв за единицу масштаба 10 см и придавая перемен-

ной  $x$  значения от 0 до 1 через каждые 0,1 (рис. 27). Тогда непосредственно по графику находятся квадратные корни чисел, заключенных между 0 и 1.

При помощи этого графика можно также находить значения корня из любого положительного числа  $b$ . Для этого нужно найти какое-

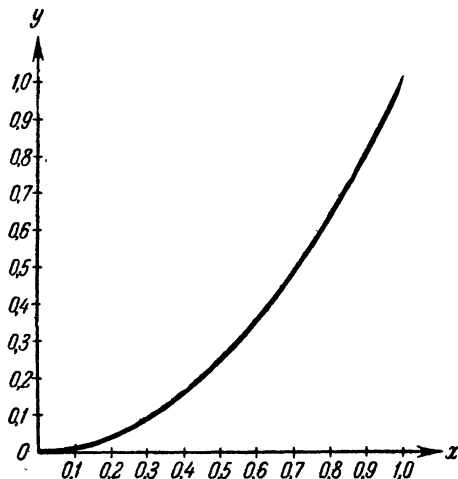


Рис. 27.

либо число  $a$ , удовлетворяющее условию  $a^2 > b$ . Затем, найдя частное  $\frac{b}{a^2}$ , которое будет меньше единицы, извлечь из него корень при помощи графика и умножить этот корень на  $a$ . Результат даст  $\sqrt{b}$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \left(a \sqrt{\frac{b}{a^2}}\right)^2 &= \\ &= a^2 \left(\sqrt{\frac{b}{a^2}}\right)^2 = a^2 \cdot \frac{b}{a^2} = b. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a \sqrt{\frac{b}{a^2}} = \sqrt{b}.$$

Если подобрать  $a$  так, что  $\frac{b}{a^2} > \frac{1}{2}$ , то точность

при применении этого способа достигает 1—2% величины искомого корня.

Пусть, например, требуется найти  $\sqrt{6}$ . Возьмем  $a = 3$ ;  $\frac{6}{3^2} = \frac{2}{3} \approx 0,67$ . По графику,  $\sqrt{0,67} \approx 0,82$ , и следовательно,  $\sqrt{6} = 3 \cdot 0,82 = 2,46$ . Ручаться за точность второго знака после запятой здесь нельзя, возможна ошибка на 0,02—0,03 в ту или другую сторону. В действительности с точностью до 0,001  $\sqrt{6} \approx 2,449$ .

## § 5. Извлечение квадратного корня из числа, заключенного между 1 и 100, с точностью до 0,1

Приступим к объяснению одной удобной арифметической схемы для приближенного извлечения квадратного корня с заданной точностью.

Допустим, что нам уже известно, что число 7,236 есть приближенное значение квадратного корня из числа  $A = 52,365$ , взятое с недостатком, с точностью до 0,001. Тогда числа 7; 7,2; 7,23 и 7,236 представляют собой приближенные значения  $\sqrt{A}$  с недостатком, и



каждое последующее из этих приближений является более точным, чем предыдущее. Мы можем считать, что каждое последующее получается из предыдущего прибавлением некоторой поправки. Именно,  $7,2 = 7 + 0,2$ ;  $7,23 = 7,2 + 0,03$ ;  $7,236 = 7,23 + 0,006$ .

Мы сможем вычислять квадратные корни с любой степенью точности, если нам удастся указать способ вычисления поправки к уже известному приближению с недостатком так, чтобы после прибавления этой поправки получалось бы снова приближение с недостатком, но значительно более точное.

Для вывода удобного способа вычисления таких поправок рассмотрим задачу в общем виде.

Пусть  $a$  есть приближенное значение с недостатком для квадратного корня из положительного числа  $A$ , и пусть  $b$  есть поправка, которую нужно добавить к числу  $a$ , чтобы получить более точное приближение к корню, тоже с недостатком. Предположим, что эта поправка мала по сравнению с самим числом  $a$ .

Примем сначала, что  $a + b$  есть точное значение  $\sqrt{A}$ . Тогда имеет место равенство  $(a + b)^2 = A$ . Раскрывая скобки, получим

$$a^2 + 2ab + b^2 = A,$$

откуда

$$b(2a + b) = A - a^2, \quad b = \frac{A - a^2}{2a + b}.$$

Вспомним теперь, что поправку  $b$  мы ищем только приближенно. Ввиду сделанного предположения, что искомая поправка мала по сравнению с числом  $a$ , мы можем отбросить в знаменателе слагаемое  $b$ , и тогда получим для  $b$  приближенное равенство

$$b \approx \frac{A - a^2}{2a}.$$

В знаменателе мы отбросили положительное слагаемое, тем самым мы уменьшили знаменатель, а всю дробь увеличили. Следовательно, число  $\frac{A - a^2}{2a}$  больше истинной поправки. Поэтому если мы хотим получить значение корня снова с недостатком, то мы должны взять в качестве поправки число, несколько меньшее, чем  $\frac{A - a^2}{2a}$ , например округлить это частное, приняв во внимание только первую значащую цифру.

Для того чтобы проверить, что вычисленная таким способом поправка дает после прибавления к  $a$  снова приближение с недостатком, надо проверить, что разность  $A - (a + b)^2$  положительна. Эту разность удобно представить в виде  $(A - a^2) - (2a + b)b$ .

Действительно, число  $A - a^2$  уже вычислялось при вычислении поправки, а вычисление произведения  $(2a + b)b$  выполняется без

труда. Если исследуемая разность все же окажется отрицательной, то это обозначает, что вычисленная поправка велика и ее следует еще уменьшить.

Рассмотрим пример на применение этих соображений.

**Пример.** Вычислить  $\sqrt{92,43}$  с точностью до 0,1.

**Решение.** В качестве первого приближения возьмем  $a=9$ . В качестве поправки следует взять число, немного меньшее, чем

$$\frac{A-a^2}{2a} = \frac{92,43-81}{2 \cdot 9} = \frac{11,43}{18} = 0,63\dots$$

Берем поправку  $b=0,6$ . Эта поправка дает значение с недостатком, ибо

$$\begin{aligned} A-(a+b)^2 &= (A-a^2) - (2a+b)b = 11,43 - 18,6 \cdot 0,6 = \\ &= 11,43 - 11,16 = 0,27 > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, число  $a+b=9,6$  есть приближение к  $\sqrt{92,43}$  с недостатком. Число 9,7 является приближением с избытком, ибо поправка  $\frac{A-a^2}{2a} = 0,63$ , в силу сказанного выше, уже больше истинной, а поправка 0,7 и подавно. Итак, с точностью до 0,1,  $\sqrt{92,43} \approx 9,6$  (с недостатком).

Все вычисления очень удобно производить по следующей схеме:

$$\begin{array}{r} \sqrt{92,43} = 9,6 \\ \quad 81 \\ \hline 18,6 \quad | \quad 11,43 \\ \quad 0,6 \quad | \quad 11,16 \\ \hline \quad \quad \quad 0,27 \end{array}$$

Порядок действий следующий:

- 1) пишем данное число под знаком корня;
- 2) определяем целую часть корня 9, возводим ее в квадрат и вычитаем из подкоренного выражения;
- 3) слева от полученной разности проводим вертикальную черту и слева от нее запишем  $2 \cdot 9 = 18$ ;
- 4) приблизительно делим разность 11,43 на 18 с точностью до 0,1 с недостатком. Получаем 0,6;
- 5) к числу 18 добавляем 0,6 и сумму умножаем на 0,6. Произведение записываем под ранее вычисленной разностью 11,43 и вычитаем из нее. Так как последняя разность 0,27 оказалась положительной, то вычисление заканчивается. Число 0,6 присоединяется к числу 9 в качестве поправки. Напоминаем, что последняя разность 0,27 есть разность чисел 92,43 и  $9,6^2$ .

Пример. Вычислить  $\sqrt{14}$  с точностью до 0,1.

Решение. Решаем этот пример, пользуясь той же схемой:

$$\begin{array}{r} \sqrt{14} = 3 \\ 9 \\ \hline 6 \overline{) 5} \end{array}$$

При делении числа 5 на 6 мы получим, после округления, 0,8. Однако такая поправка слишком велика, так как  $6,8 \cdot 0,8 = 5,44 > 5$ . Примем в качестве поправки 0,7.

$$\begin{array}{r} \sqrt{14} = 3,7 \\ 9 \\ \hline 6,7 \overline{) 5,00} \\ 0,7 \overline{) 4,69} \\ \hline 0,31 \end{array}$$

Поправка 0,7 оказалась подходящей.

Последняя разность 0,31 есть  $14 - 3,7^2$ . К числу 5 мы приписали нули после запятой, чтобы было удобнее производить вычитание.

Пример. Вычислить  $\sqrt{3,41}$  с точностью до 0,1.

Решение.

$$\begin{array}{r} \sqrt{3,41} = 1 \\ 1 \\ \hline 2 \overline{) 2,41} \end{array}$$

При делении числа 2,41 на 2 получается с точностью до 0,1 число 1,2, которое явно велико в качестве поправки. Такой плохой результат получается потому, что здесь поправка совсем немала по сравнению с первым приближением, и поэтому приближенное равенство  $b \approx \frac{A - a^2}{2a}$  оказывается очень грубым.

Даже 0,9 велико в качестве поправки, ибо  $2,9 \cdot 0,9 = 2,61 > 2,41$ . Берем 0,8.

$$\begin{array}{r} \sqrt{3,41} = 1,8 \\ 1 \\ \hline 2,8 \overline{) 2,41} \\ 0,8 \overline{) 2,24} \\ \hline 0,17 \end{array}$$

## Упражнения

Вычислить квадратные корни с точностью до 0,1:

1.  $\sqrt{67,13}$ .    2.  $\sqrt{41}$ .    3.  $\sqrt{46,24}$ .    4.  $\sqrt{5}$ .

### § 6. Извлечение квадратного корня из числа, заключенного между 1 и 100, с точностью до 0,01

Пример. Извлечь квадратный корень из числа 92,4317 с точностью до 0,01.

Решение. Сначала извлекаем корень с точностью до 0,1, пользуясь уже рассмотренным способом:

$$\begin{array}{r} \sqrt{92,4317} = 9,6 \\ 81 \\ \hline 18,6 \quad | \quad 11,4317 \\ 0,6 \quad | \quad 11,16 \\ \hline 0,2717 \end{array}$$

Легко сообразить, что следует делать дальше. Примем  $a = 9,6$  за исходное приближение и ищем для него поправку по прежнему правилу. Вычислять снова разность  $A - a^2 = 92,4317 - 9,6^2$  нам не нужно, ибо эта разность уже вычислена. Она равна последней разности 0,2717. Мы должны поделить эту разность на  $2 \cdot 9,6 = 19,2$  с точностью до 0,01. Получившуюся поправку  $b = 0,01$  добавить к  $2a = 19,2$ , полученное число  $2a + b = 19,21$  умножить на  $b = 0,01$  и сравнить с разностью 0,2717. Все эти действия удобно провести по прежней схеме. Полная запись будет выглядеть так:

$$\begin{array}{r} \sqrt{92,4317} = 9,61 \\ 81 \\ \hline 18,6 \quad | \quad 11,4317 \\ 0,6 \quad | \quad 11,16 \\ \hline 19,21 \quad | \quad 0,2717 \\ 0,01 \quad | \quad 0,1921 \\ \hline 0,0796 \end{array}$$

Последняя разность 0,0796 есть  $92,4317 - 9,61^2$ .

Заметим, что мы могли бы не записывать в третьей строчке две последние цифры, так как их роль сказывается только в пятой строчке. Далее, для упрощения записи можно было бы не писать запятых и нулей перед значащими цифрами, имея при этом в виду, что тогда

при делении  $\frac{A-a^2}{2a}$  последнюю цифру делимого нужно отбрасывать, выполняя деление с точностью до целого.

Принимая все это во внимание, запись можно провести так:

$$\sqrt{92,4317} = 9,61$$

|      |      |
|------|------|
| 81   |      |
| 186  | 1143 |
| 6    | 1116 |
| 1921 | 2717 |
| 1    | 1921 |
| 796  |      |

Продолжая вычисления, мы можем извлечь корень с точностью до 0,001; 0,0001 и т. д.

### Упражнения

Извлечь квадратные корни с точностью до 0,01:

1.  $\sqrt{72,6115}$ .    2.  $\sqrt{14,17}$ .    3.  $\sqrt{10}$ .

### § 7. Извлечение квадратного корня из любого данного числа с любым заданным числом десятичных знаков

Способ извлечения квадратного корня, изложенный в § 5 и 6, применялся там только к числам, заключенным между 1 и 100, т. е. к числам с однозначной или двузначной целой частью. Однако этот способ легко распространяется на любые положительные числа, целые или заданные десятичной дробью. Это следует из того, что при умножении подкоренного числа на 100 корень увеличивается в 10 раз, а при делении подкоренного числа на 100 корень уменьшается в 10 раз.

Действительно, если  $\sqrt{y} = x$ , то  $\sqrt{100y} = 10x$ , так как  $(10x)^2 = 100x^2 = 100y$ , а

$$\sqrt{\frac{y}{100}} = \frac{x}{10},$$

ибо  $\left(\frac{x}{10}\right)^2 = \frac{x^2}{100} = \frac{y}{100}$ .

Умножение или деление на 100 равносильно перенесению запятой на два разряда вправо или влево. Умножение или деление на 10 равносильно перенесению запятой на один разряд. Повторное умножение или деление на 100 равносильно перенесению запятой на четное число разрядов. Очевидно, что за счет такого перенесения запятой в под-

коренном числе можно добиться того, чтобы целая часть нового подкоренного числа оказалась однозначным или двузначным числом.

К этому числу можно применить указанный прием для извлечения квадратного корня. Чтобы получить корень из исходного числа, нужно в полученном корне перенести запятую в обратном направлении на вдвое меньшее число разрядов.

Например, чтобы извлечь корень  $\sqrt{0,924317}$ , мы сначала перенесем запятую на два разряда вправо.  $\sqrt{92,4317}$  мы вычислили; он равен 9,61 (с точностью до 0,01). Следовательно,  $\sqrt{0,924317} = 0,961$  (с точностью до 0,001).

Сформулируем теперь общее правило для извлечения корня из данного числа с данным числом десятичных знаков, обобщив в этом правиле все высказанные выше соображения.

*Правило. Чтобы извлечь квадратный корень из данного положительного целого или записанного в виде десятичной дроби числа с данной точностью, нужно:*

1. *Записать это число под знаком квадратного корня и разбить его цифры на «границы» по две цифры в каждой, начиная от запятой, вправо и влево. Если требуется вычислить корень с точностью до 1, то границы, расположенные направо от запятой, можно отбросить. Если требуется вычислить корень с точностью до 0,1, следует справа от запятой сохранить одну грань, при вычислении с точностью до 0,01 оставить две границы и т. д. Если при этом окажется, что цифр для заполнения нужного числа граней не хватает, приписать надлежащее количество нулей.*

2. *Извлечь корень из старшей грани с точностью до 1, с недостатком (или точно, если это возможно). Полученное число принять за первую цифру искомого корня.*

3. *Из старшей грани вычесть квадрат первой цифры и к полученной разности приписать вторую грань. Слева от полученного результата провести вертикальную черту.*

4. *Слева от черты записать удвоенную первую цифру.*

5. *Найти целую часть частного от деления числа десятков первой разности на число, записанное слева. Если полученное число окажется больше 10, заменить числом 9.*

6. *Полученное однозначное число подвергнуть следующему испытанию: приписать его в качестве цифры к числу, записанному слева, получившееся число умножить на испытываемое однозначное число и сравнить произведение с разностью, записанной справа от черты. Если это произведение больше указанной разности, уменьшить испытываемое число на одну единицу и вновь подвергнуть испытанию.*

7. *Если после испытания произведение окажется меньше указанной разности, подписать его под ней и вычесть. Испытанное однозначное число принять за вторую цифру корня.*

8. К вновь полученной разности приписать следующую грань и определить третью цифру тем же приемом, каким была определена вторая цифра.

9. Продолжать аналогичные вычисления до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность.

10. Запятую в результате нужно поставить после того, как будут исчерпаны грани, предшествующие запятой в подкоренном числе.

Целая часть, вычисляемая в п. 5 правила, может оказаться больше 9 только на первом шагу вычислений, т. е. при вычислении второй цифры.

Отрицательный результат испытания в п. 6 правила довольно часто имеет место на первом шагу вычислений, когда поправка еще не очень мала, по сравнению с первым приближением. На дальнейших шагах вычислений отрицательный результат испытания получается крайне редко.

Если подкоренное число имеет 0 целых и вслед затем следует нуль, корень имеет тоже 0 целых и затем столько нулей, сколько граней из нулей следует за запятой в подкоренном числе. Первая значащая цифра корня есть целая часть корня из первой значащей грани подкоренного числа.

### § 8. Применение графиков для приближенного решения уравнений и систем двух уравнений с двумя неизвестными

Мы уже не раз пользовались графиками для приближенных вычислений. Графический способ решения задач является очень полезным для приложений вследствие большой простоты и наглядности. Конечно, им следует пользоваться только в тех случаях, когда не требуется очень большой точности результата. Достоинством графического способа является также его большая общность. В частности, с помощью графиков можно решать приближенно даже довольно сложные уравнения и системы уравнений. Не вдаваясь в общую теорию построения графиков и их применений, ограничимся рассмотрением двух примеров.

Пример 1. Решить приближенно уравнение

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Решение. Построим сначала график зависимости

$$y = x^3 - 3x + 1,$$

а затем найдем на этом графике точки, для которых  $y = 0$ . Абсциссы этих точек и дадут решения уравнения.

Прежде всего вычислим таблицу значений:

|     |       |      |                 |      |                |     |                |      |                |      |      |
|-----|-------|------|-----------------|------|----------------|-----|----------------|------|----------------|------|------|
| $x$ | $-3$  | $-2$ | $-1\frac{1}{2}$ | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$  | $1$  | $1\frac{1}{2}$ | $2$  | $3$  |
| $y$ | $-17$ | $-1$ | $+2\frac{1}{8}$ | $3$  | $2\frac{3}{8}$ | $1$ | $-\frac{3}{8}$ | $-1$ | $-\frac{1}{8}$ | $+3$ | $19$ |

По этой таблице строим график (рис. 28), соединяя точки возможно более плавной линией. Из этого графика мы видим, что интересующих нас точек имеется три. Их абсциссы приблизительно равны  $-1,8$ ;  $0,3$  и  $1,5$ . Следовательно, уравнение

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

имеет три решения

$$x_1 \approx -1,8; \quad x_2 \approx 0,3; \quad x_3 \approx 1,5.$$

Чтобы найти более точные значения для корней уравнения, нужно построить с большей точностью и в большем масштабе участки графика, примыкающие к интересующим нас точкам.

Пример 2. Решить приблизительно систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2 - 3, \\ x = y^2 - 4. \end{cases}$$

Решение. Для решения задачи строим на одном чертеже графики зависимостей  $y = x^2 - 3$  и  $x = y^2 - 4$ . Нас интересуют точки, координаты которых связаны обеими зависимостями, т. е. точки, принадлежащие обоим

графикам. Такими точками являются точки пересечения графиков. Вычислим таблицы значений.

1.  $y = x^2 - 3$ :

|     |    |                 |    |                 |    |                 |    |                |    |                |    |                |   |
|-----|----|-----------------|----|-----------------|----|-----------------|----|----------------|----|----------------|----|----------------|---|
| $x$ | -3 | $-2\frac{1}{2}$ | -2 | $-1\frac{1}{2}$ | -1 | $-\frac{1}{2}$  | 0  | $\frac{1}{2}$  | 1  | $1\frac{1}{2}$ | 2  | $2\frac{1}{2}$ | 3 |
| $y$ | 6  | $3\frac{1}{4}$  | 1  | $-\frac{3}{4}$  | -2 | $-2\frac{3}{4}$ | -3 | $2\frac{3}{4}$ | -2 | $-\frac{3}{4}$ | +1 | $3\frac{1}{4}$ | 6 |

2.  $x = y^2 - 4$ :

|     |    |                 |    |                 |    |                 |    |                 |    |                 |   |                |   |
|-----|----|-----------------|----|-----------------|----|-----------------|----|-----------------|----|-----------------|---|----------------|---|
| $y$ | -3 | $-2\frac{1}{2}$ | -2 | $-1\frac{1}{2}$ | -1 | $-\frac{1}{2}$  | 0  | $\frac{1}{2}$   | 1  | $1\frac{1}{2}$  | 2 | $2\frac{1}{2}$ | 3 |
| $x$ | 5  | $2\frac{1}{4}$  | 0  | $-1\frac{3}{4}$ | -3 | $-3\frac{3}{4}$ | -4 | $-3\frac{3}{4}$ | -3 | $-1\frac{3}{4}$ | 0 | $2\frac{1}{4}$ | 5 |

При вычислении второй таблицы мы придавали конкретные значения величине  $y$  и вычисляли соответствующие значения для  $x$ . Здесь это удобно, так как уравнение, определяющее зависимость, решено относительно  $x$ .



Графики по этим таблицам изображены на рис. 29. Мы видим, что графики пересекаются в четырех точках. Следовательно, система имеет четыре решения.

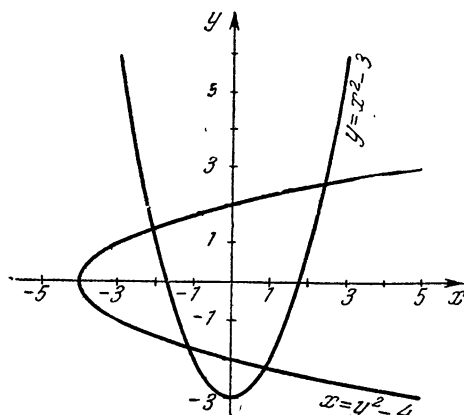


Рис. 29.

Приближенные решения системы даются следующими значениями для  $x$  и  $y$ :

$$\left. \begin{array}{l} x_1 \approx -2,1, \\ y_1 \approx +1,4; \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x_2 \approx -1,2, \\ y_2 \approx -1,7; \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x_3 \approx 0,9, \\ y_3 \approx -2,2; \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} x_4 \approx 2,3, \\ y_4 \approx 2,5. \end{array} \right\}$$

### Упражнения

При помощи графика решить приближенно уравнения:

1.  $x^3 - x - 1 = 0$ .      2.  $x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$ .

При помощи графиков решить приближенно системы уравнений:

3.  $\left. \begin{array}{l} x + y = 3, \\ x^2 - y = 3. \end{array} \right\}$       4.  $\left. \begin{array}{l} x^2 - 2y = 2, \\ x = y^2 - y. \end{array} \right\}$

ГЛАВА I

СТЕПЕНЬ, КОРНИ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Свойства степени с целым показателем

Как мы уже знаем, *степенью*  $a^n$  данного числа  $a$  с целым положительным показателем  $n$  называется произведение  $n$  множителей, каждый из которых равен  $a$ . Так,

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8,$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{32}.$$

Само число  $a$  называется *основанием степени*. Степень с показателем 2 называется *квадратом*, с показателем 3 — *кубом*.

При действиях над степенями нужно руководствоваться следующими правилами, которые формулируем в виде теорем.

**Теорема 1.** *Произведение двух степеней с одинаковым основанием равно степени того же основания с показателем, равным сумме показателей перемножаемых степеней.*

Короче: при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складываются. Например,

$$a^{13} \cdot a^{28} = a^{41}.$$

Эта теорема записывается в виде следующей формулы:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

**Доказательство.**  $a^m$  есть произведение  $m$  сомножителей, равных  $a$ ;  $a^n$  есть произведение  $n$  сомножителей, равных  $a$ . Следовательно,  $a^m a^n$  есть произведение  $m+n$  сомножителей, равных  $a$ , т. е. равно  $a^{m+n}$ . В буквенной записи

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \dots a}_m; \quad a^n = \underbrace{a \cdot a \dots a}_n.$$

Следовательно,

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \dots a}_m \cdot \underbrace{a \cdot a \dots a}_n = \underbrace{a \cdot a \dots a}_{m+n} = a^{m+n}.$$

Правило сложения показателей при умножении степеней с одинаковыми основаниями остается верным при любом числе множителей. Именно, верна следующая теорема.

**Теорема 2.** *Произведение степеней с одинаковыми основаниями равно степени того же основания с показателем, равным сумме показателей перемножаемых степеней, при любом числе сомножителей.*

Доказательство.

$$\begin{aligned} a^{n_1} \cdot a^{n_2} \dots a^{n_k} &= \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n_1} \cdot \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n_2} \dots \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n_k} = \\ &= \underbrace{a \cdot a \dots a}_{n_1 + n_2 + \dots + n_k} = a^{n_1 + n_2 + \dots + n_k}. \end{aligned}$$

Например,

$$a^3 \cdot a^5 \cdot a^7 \cdot a = a^{3+5+7+1} = a^{16}.$$

**Теорема 3.** *Результат возведения степени в степень равен степени того же основания с показателем, равным произведению показателей, участвующих в действии, т. е.*

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Короче: при возведении степени в степень показатели перемножаются. Например,

$$(a^5)^3 = a^{15}.$$

Доказательство.

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \dots a^m}_n = \overbrace{a^{m+\dots+m}}^n = a^{mn}.$$

**Теорема 4.** *Степень произведения нескольких чисел равна произведению степеней множителей с тем же показателем, т. е.*

$$(ab)^n = a^n b^n; \quad (abc)^n = a^n b^n c^n \text{ и т. п.}$$

Доказательство. Проведем доказательство для произведения трех множителей.

$$(abc)^n = \underbrace{abc \cdot abc \dots abc}_n = \underbrace{a \cdot a \dots a}_n \cdot \underbrace{b \cdot b \dots b}_n \cdot \underbrace{c \cdot c \dots c}_n = a^n b^n c^n.$$

**Теорема 5.** *Степень дроби равна дроби, числитель и знаменатель которой равны соответственно степени числителя и знаменателя исходной дроби, с тем же показателем, т. е.*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Доказательство.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_n = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdots a}^n}{\underbrace{b \cdot b \cdots b}_n} = \frac{a^n}{b^n}.$$

### Упражнения

Упростить алгебраические выражения:

$$1. \left(\frac{a^3}{b}\right)^3 \cdot \left(\frac{b^3}{a}\right)^4 \quad 2. \left(a^{m-n}\right)^{m+n} \text{ при } m > n. \quad 3. a \cdot (a^2)^3 \cdot (a^3)^3.$$

## § 2. Квадрат суммы нескольких слагаемых

Правила возведения в степень произведения, частного и степени очень просты. Иначе дело обстоит со степенью суммы. Формула для степени суммы нескольких слагаемых сложна и становится все сложнее с возрастанием показателя степени и числа слагаемых.

Действительно,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Непосредственным умножением легко проверить, что

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc,$$

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$$

и т. д. Мы ограничимся рассмотрением формулы для квадрата суммы любого числа слагаемых.

**Теорема.** *Квадрат суммы любого числа слагаемых есть сумма их квадратов плюс сумма всевозможных удвоенных попарных произведений слагаемых.*

Доказательство.

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

По правилу умножения многочлена на многочлен мы должны каждый член первого множителя умножить на каждый член второго множителя и сложить полученные произведения. При умножении слагаемых первого множителя на такие же слагаемые, взятые из второго множителя, мы получим квадраты всех слагаемых. При умножении же двух различных слагаемых каждое произведение будет получаться два раза. Например,  $a_1 a_2$  будет получено при умножении  $a_1$ , взятого из первого множителя, на  $a_2$ , взятое из второго и при умножении  $a_2$ , взятого из первого множителя, на  $a_1$ , взятое

из второго. То же самое будет и для любой другой пары слагаемых. Итак,

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = \\ = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots + 2a_2a_3 + \dots + 2a_{n-1}a_n.$$

При пользовании этой формулой следует сначала написать квадраты всех слагаемых, затем приписать всевозможные удвоенные произведения. Чтобы не пропустить какое-либо из них, следует их записать в таком порядке: сначала всевозможные, удвоенные произведения первого слагаемого на остальные, затем — удвоенные произведения второго слагаемого на остальные, кроме первого, затем — удвоенные произведения третьего слагаемого на остальные, кроме первых двух, и так далее.

Пример.

$$(x^3 - x^2 + 2x + 3)^2 = \\ = x^6 + x^4 + 4x^2 + 9 - 2x^5 + 4x^4 + 6x^3 - 4x^3 - 6x^2 + 12x = \\ = x^6 - 2x^5 + 5x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 12x + 9.$$

### Упражнения

Выполнить возведение в квадрат:

$$1. (x^3 + 2x^2 - 3x - 4)^2. \quad 2. \left(a^m + 1 + \frac{1}{a^m}\right)^2. \quad 3. \left(\frac{a^2}{b^2} - 1 - \frac{b}{a}\right)^2.$$

## § 3. Некоторые свойства степени

Очевидно, что любая степень числа 0 равна нулю, любая степень положительного числа положительна.

Правило возведения в степень отрицательного числа дается следующей теоремой.

**Теорема 1.** *Степень с четным показателем отрицательного числа равна такой же степени его абсолютной величины, взятой со знаком плюс. Степень же с нечетным показателем отрицательного числа равна такой же степени его абсолютной величины, взятой со знаком минус.*

Например,

$$(-3)^4 = 81; \quad (-3)^5 = -27.$$

**Доказательство.** Пусть  $-a$  есть отрицательное число, тогда  $a$  есть его абсолютная величина и

$$(-a)^n = [(-1) \cdot a]^n = (-1)^n \cdot a^n,$$

но  $(-1)^2 = 1$ ;  $(-1)^3 = -1$ ;  $(-1)^4 = 1$ ;  $(-1)^5 = -1$  и т. д., т. е.  $(-1)^n = 1$  при четном показателе  $n$  и  $(-1)^n = -1$  при  $n$  нечетном. Следовательно,  $(-a)^n = a^n$  при четном  $n$ ,  $(-a)^n = -a^n$  при нечетном  $n$ , что и требовалось доказать.

Важно отметить, что четная степень любого рационального числа не может быть отрицательным числом, ибо четная степень положительного числа положительна, четная степень отрицательного числа тоже положительна, а степень нуля равна нулю.

Докажем еще две теоремы, в которых устанавливаются важные свойства степени.

*Теорема 2. Из двух степеней положительных чисел с одинаковым показателем больше та, основание которой больше.*

Иными словами, степень положительного числа с данным показателем возрастает с возрастанием основания. Сначала докажем следующие две леммы\*), касающиеся умножения положительных чисел.

*Лемма 1. Если  $a > b$  и  $c$  — положительное число, то  $ac > bc$ .*

Иными словами, обе части неравенства  $a > b$  можно умножить на любое положительное число  $c$ .

**Доказательство.** В самом деле, если  $a > b$ , то  $a - b$  есть положительное число; следовательно,  $(a - b)c$  тоже есть положительное число как произведение двух положительных чисел. Но

$$(a - b)c = ac - bc.$$

Из установленной положительности разности  $ac - bc$  заключаем, что  $ac > bc$ .

*Лемма 2. Если  $a, b, c, d$  — четыре положительных числа и  $a > b, c > d$ , то  $ac > bd$ .*

**Доказательство.** Действительно, в силу первой леммы,  $ac > bc$ . В силу той же леммы  $bc > bd$ , ибо  $c > d$  и  $b$  положительно. Следовательно,  $ac > bd$ .

Теперь обратимся к доказательству теоремы.

**Доказательство теоремы 2.** Пусть  $a$  и  $b$  — положительные числа и  $a > b$ . Положим  $c = a$ ;  $d = b$ . Тогда  $c > d$  и, в силу второй леммы,  $ac > bd$ ; но

$$ac = a^2; \quad bd = b^2.$$

Следовательно,  $a^2 > b^2$ .

Положим теперь  $c = a^2$ ;  $d = b^2$ . Мы уже установили, что  $c > d$ . В силу второй леммы  $ac > bd$ ; но

$$ac = a \cdot a^2 = a^3; \quad bd = b \cdot b^2 = b^3,$$

следовательно,  $a^3 > b^3$ .

Положим теперь  $c = a^3$ ;  $d = b^3$ . Мы уже установили, что  $c > d$ . В силу второй леммы  $ac > bd$ ; но

$$ac = a \cdot a^3 = a^4; \quad bd = b \cdot b^3 = b^4.$$

Следовательно,  $a^4 > b^4$ .

---

\*) Леммой называется вспомогательная теорема, содержание которой используется в других доказательствах.

Положив  $c = a^4$ ,  $d = b^4$  и применив лемму 2, получим тем же рассуждением, что  $a^5 > b^5$ .

Применив то же рассуждение еще раз, получим, что  $a^6 > b^6$  и т. д. Таким рассуждением мы можем дойти до любого значения показателя  $n$ .

Теорема доказана.

В математике принято заменять цепочку единообразных рассуждений, подобных приведенным выше, одним рассуждением «от  $n-1$  к  $n$ ». Это рассуждение для интересующей нас теоремы выглядит так:

Допустим, что теорема верна для показателя  $n-1$ , и в этом предположении докажем ее для показателя  $n$ . Положим  $c = a^{n-1}$ ,  $d = b^{n-1}$ . В силу сделанного предположения о том, что для показателя  $n-1$  теорема доказана, мы заключаем, что  $c > d$ , в силу второй леммы  $ac > bd$ ; но

$$ac = a \cdot a^{n-1} = a^n; \quad bd = b \cdot b^{n-1} = b^n.$$

Следовательно,  $a^n > b^n$ .

Итак, мы доказали следующее: если теорема верна для показателя  $n-1$ , то она верна и для показателя  $n$ . Но мы знаем, что для показателя 2 теорема верна, мы ее доказали. Следовательно, она верна и для показателя 3. Раз она верна для показателя 3, то она верна и для показателя 4 и т. д. Таким рассуждением мы дойдем до любого показателя.

Доказательство «от  $n-1$  к  $n$ » называется иначе доказательством *методом математической индукции*. Этот метод нам придется в дальнейшем неоднократно применять.

**Теорема 3.** *При безграничном увеличении положительного основания степени сама степень тоже безгранично растет.*

Например,  $a^2$  становится больше 100, как только  $a > 10$ ;  $a^3$  становится больше 1 000 000, как только  $a > 1 000$ , и вообще  $a^2$  становится больше любого заданного числа, если только взять  $a$  достаточно большим.

**Доказательство.** Положим, что  $a > 1$ . Тогда  $a^n > a$  при любом  $n$ , и следовательно, при безграничном увеличении  $a$  число  $a^n$  тоже растет безгранично и даже быстрее, чем  $a$ .

Теорема доказана.

### Упражнения

1. Вычислить  $(-2)^6$ ;  $(-3)^5$ .

2. Вычислить ряды чисел

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2$$

и

$$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3.$$

У какого из этих двух рядов быстрее растут числа?

3. При каких  $x$  будет справедливо неравенство  $x^3 > 1 000$ ?  $x^3 > 1 000 000 000$ ?

### § 4. Корень любой степени из числа

Корнем  $n$ -й степени из числа  $a$  называется такое число,  $n$ -я степень которого равна  $a$ . Например, корень третьей степени из 27 есть 3, так как  $3^3=27$ , корень четвертой степени из 16 есть 2, так как  $2^4=16$  и т. д.

Корень  $n$ -й степени из числа  $a$  обозначается  $\sqrt[n]{a}$ . Корень второй степени иначе называется *квадратным корнем*, корень третьей степени — *кубическим*. Квадратный корень из числа  $a$  обозначается через  $\sqrt{a}$ , без указания показателя.

Знак  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  часто называют радикалом, иногда с указанием степени. То же название «радикал» часто относят и к алгебраическим выражениям, в которых последнее действие есть действие извлечения корня.

Так, выражение  $\sqrt{5+a}$  может быть названо квадратным радикалом,  $\frac{2}{3-\sqrt[3]{5}}$  содержит кубический радикал  $\sqrt[3]{5}$  в знаменателе и т. д.

Заметим, что числа 2 и  $-2$  одинаково могут считаться квадратными корнями из числа 4, так что квадратный корень из числа 4 имеет два значения 2 и  $-2$ .

Сколько значений может иметь корень любой степени из данного числа? Ответ на этот вопрос дают следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Корень любой степени из положительного числа имеет не более одного положительного значения.*

Так,  $\sqrt[3]{8}=2$  и не существует другого положительного числа, куб которого равнялся бы 8. Действительно, пусть  $x^3=8$ . Если  $x<2$ , то  $x^3<8$  в силу теоремы 1 § 3. Если  $x>2$ , то  $x^3>8$  в силу той же теоремы. Остается только одна возможность  $x=2$ .

Таким же образом теорема доказывается и в общей формулировке.

Пусть корень  $n$ -й степени из положительного числа  $a$  имеет два положительных значения  $x$  и  $y$ . Тогда  $x^n=a$ ;  $y^n=a$ . Докажем, что  $x=y$ . С этой целью допустим противное, что  $x$  и  $y$  не равны. Тогда  $x>y$  или  $y>x$ . Если  $x>y$ , то, в силу теоремы 1 § 3,  $x^n>y^n$ , что противоречит тому, что  $x^n=y^n=a$ . Если  $y>x$ , то  $y^n>x^n$ , что также противоречит равенству  $x^n=y^n=a$ . Следовательно,  $x=y$ , что и требовалось доказать.

**Теорема 2.** *Корень любой степени из 0 имеет единственное значение, равное 0.*

**Доказательство.**  $0^n=0$ . Всякое же число, отличное от нуля, при возведении в любую степень даст результат, отличный от 0. Следовательно, единственным значением  $\sqrt[n]{0}$  является 0.

**Теорема 3.** *Корень нечетной степени из положительного числа имеет не более одного значения, и это значение может быть только положительным.*



**Доказательство.** Корень нечетной степени из положительного числа не может быть отрицательным, ибо всякое отрицательное число при возведении в нечетную степень дает отрицательный результат. Нуль также не может быть значением корня из положительного числа. Положительных же значений корня не может быть более одного в силу теоремы 1.

**Теорема 4.** *Корень нечетной степени из отрицательного числа имеет не более одного значения, и это значение может быть только отрицательным.*

Так,  $\sqrt[3]{-27} = -3$ , и не существует другого числа, куб которого равнялся бы  $-27$ . Действительно, если  $x^3 = -27$ , то  $(-x)^3 = 27$ ; откуда, в силу теоремы 3, для  $-x$  имеется единственное возможное значение  $-x = 3$ . Следовательно,  $x = -3$ , и других значений для  $\sqrt[3]{-27}$  не существует.

Совершенно таким же образом теорема доказывается и в общей формуловке.

Пусть  $n$  — нечетное число,  $a = -a_1$  — отрицательное число и  $x$  есть  $\sqrt[n]{a}$ . Тогда  $x^n = -a_1$ , и следовательно,  $(-x)^n = a_1$ , т. е.  $-x$  есть значение корня  $n$ -й степени из положительного числа. В силу теоремы 3 этот корень имеет не более одного значения, и это значение положительно. Следовательно,  $x$  имеет не более одного значения, и это значение отрицательное.

**Теорема 5.** *Корень четной степени из отрицательного числа не существует.*

**Доказательство.** Никакое число при возведении в четную степень не дает отрицательного результата.

**Теорема 6.** *Если существует одно значение корня четной степени из положительного числа, то существует еще одно и только одно значение, отличающееся от первого значения знаком.*

Так,  $\sqrt[4]{16}$  имеет два значения: 2 и  $-2$ , ибо  $2^4 = 16$  и  $(-2)^4 = 16$ . Если бы нашлось третье значение  $x$ , то существовало бы и четвертое  $-x$ . Из четырех значений 2,  $-2$ ,  $x$  и  $-x$  два положительных и два отрицательных. Но, в силу теоремы 1,  $\sqrt[4]{16}$  имеет не более одного положительного значения, так что предположение о существовании отличного от  $\pm 2$  значения для  $\sqrt[4]{16}$  привело нас к противоречию.

Таким же образом можно рассуждать при доказательстве теоремы в общей формулировке. Именно, если  $x$  есть корень четной степени из положительного числа  $a$ , то  $-x$  тоже есть корень той же степени из  $a$ , ибо при возведении в четную степень числа  $x$  и  $-x$  дают одинаковые результаты. Если бы, кроме этих двух значений, нашлось бы третье  $u$ , отличное от них, то нашлось бы и четвертое  $-u$ , и оказалось бы, что корень имеет по крайней мере два положительных значения, что противоречит теореме 1.

Положительное значение корня четной степени называется его *арифметическим значением*. Под обозначением  $\sqrt[n]{a}$  при четном  $n$

и  $a > 0$  всегда подразумевается арифметическое значение корня. Отрицательное же значение корня  $n$ -й степени из положительного числа  $a$  при четном  $n$  обозначается через  $-\sqrt[n]{a}$ . Так,  $\sqrt[4]{16} = 2$ ;  $\sqrt[4]{(-3)^2} = 3$  (а не  $-3$ ) и т. д.

### Упражнения

Вычислить:

$$1. \sqrt{4} + \sqrt[3]{27}. \quad 2. \sqrt[3]{27} + \sqrt{(-2)^6}. \quad 3. \sqrt{(a-2)^2}.$$

### § 5. Недостаточность совокупности рациональных чисел для извлечения корня из любого рационального положительного числа

Как было выяснено в гл. IX, § 3, далеко не из каждого рационального положительного числа можно извлечь квадратный корень. Именно, было установлено, что если целое положительное число  $a$  не является квадратом другого целого положительного числа, то не существует и дробного рационального числа, квадрат которого равняется  $a$ . Следовательно, извлечение квадратного корня из такого целого числа невыполнимо, если оставаться в области рациональных чисел. Аналогичное обстоятельство имеет место для корней любой степени.

Приведем в дополнение к изложенному в первой части книги строгое и простое доказательство следующей теоремы, являющейся лишь частным случаем сказанного выше.

**Теорема.** *Не существует рационального числа, квадрат которого равен двум.*

Иными словами, не существует рационального значения для  $\sqrt{2}$ .

**Доказательство.** Допустим, что найдется несократимая дробь  $\frac{m}{n}$ , где  $m$  и  $n$  — натуральные числа, такая, что

$$\frac{m^2}{n^2} = 2.$$

Тогда  $m^2 = 2n^2$ . Из последнего равенства следует, что  $m$  есть четное число, и, следовательно,  $m = 2m_1$ ,  $m_1$  целое. После подстановки в  $m^2 = 2n^2$  и деления обеих частей равенства на 2 получим, что  $2m_1^2 = n^2$ , откуда следует, что и  $n$  есть четное число.

Итак,  $m$  и  $n$  оба четные, что противоречит несократимости дроби  $\frac{m}{n}$ . Таким образом, предположение о том, что существует рациональное число  $\frac{m}{n}$ , квадрат которого равен 2, привело нас к противоречию. Следовательно, такой дроби не существует, что и требовалось доказать.

### § 6. Приближенное извлечение корня

Ввиду невозможности точного извлечения корня данной степени из данного положительного числа, целесообразно поставить задачу о приближенном извлечении корня. В применении к квадратным корням этот вопрос был разобран в первой части книги (гл. IX, § 3).

Напомним относящиеся сюда определения и теоремы, обобщив их на корень любой степени  $n$ .

*Приближенным значением с недостатком* для корня  $n$ -й степени из данного положительного числа  $a$ , например с точностью до  $\frac{1}{1000}$ , называется такое положительное число  $b$ , что  $b^n \leq a$ , но  $(b + \frac{1}{1000})^n > a$ . В свою очередь  $b + \frac{1}{1000}$  называется *приближенным значением с избытком* для  $\sqrt[n]{a}$ .

Вообще *приближенным значением с недостатком* для корня  $n$ -й степени из данного положительного числа  $a$  с точностью до  $a$  называется такое положительное число  $b$ , что  $b^n < a$ , но  $(b + a)^n > a$ . В свою очередь число  $b + a$  называется *приближенным значением с избытком* для  $\sqrt[n]{a}$  с точностью до  $a$ , а число  $a$  — мерой точности.

При практических вычислениях чаще всего принимается за меру точности  $\frac{1}{10^m}$ , где  $m$  — некоторое натуральное число, а за приближенное значение с недостатком принимается десятичная дробь с  $m$  цифрами после запятой. Тогда приближенным значением с избытком явится большая смежная с ней десятичная дробь, т. е. такая, последняя цифра которой увеличена на одну единицу. Например, 1,259 и 1,260 являются приближениями с недостатком и с избытком к  $\sqrt[3]{2}$  с точностью до 0,001, ибо

$$(1,259)^3 = 1,9956... < 2, \text{ а } (1,260)^3 = 2,0003... > 2.$$

Такие приближения называются *десятичными* с точностью до единицы  $m$ -го знака после запятой. Так, 1,259 и 1,260 суть десятичные приближения к  $\sqrt[3]{2}$  с недостатком и с избытком с точностью до единицы третьего знака после запятой.

**Теорема 1.** Для каждого положительного числа  $a$ , не являющегося  $n$ -й степенью целого числа, существует целое число  $b$ , являющееся приближенным значением с недостатком для  $\sqrt[n]{a}$  с точностью до единицы.

Например, для  $\sqrt[3]{30}$  приближенным значением с недостатком с точностью до единицы есть 3, ибо

$$3^3 = 27 < 30; \quad 4^3 = 64 > 30.$$

**Доказательство.** Нам нужно доказать, что для данного положительного  $a$  найдется такое целое неотрицательное число  $b$ ,

что  $b^n < a$  и  $(b+1)^n > a$  согласно определению приближенного значения с недостатком для  $a$ . Если  $a < 1$ , то утверждение теоремы очевидно. Именно, в качестве числа  $b$  можно взять нуль, ибо  $0^n = 0 < a$ ,  $1^n = 1 > a$ .

Допустим теперь, что  $a > 1$ . Выберем целое число  $m \geq a$  и рассмотрим ряд чисел

$$1^n = 1, 2^n, 3^n, 4^n, 5^n, \dots, m^n.$$

Согласно теореме 1 § 2 это возрастающий ряд чисел, т. е. каждое последующее число больше предыдущего. Первое число 1 этого ряда меньше  $a$ , последнее  $m^n$  больше  $a$ , так как  $m^n > m \geq a$ . Само число  $a$  не находится среди чисел этого ряда, так как  $a$  не является  $n$ -й степенью целого числа. Следовательно,  $a$  попадает в какой-то промежуток между двумя соседними числами рассматриваемого ряда, т. е. найдутся два таких смежных целых числа  $b$  и  $b+1$ , что  $b^n < a < (b+1)^n$ .

Число  $b$  и есть искомое приближение.

**Теорема 2.** Для каждого положительного числа  $a$ , не являющегося  $n$ -й степенью десятичной дроби с  $m$  цифрами после запятой, существует десятичное приближение к  $\sqrt[n]{a}$  с точностью до единицы  $m$ -го знака после запятой.

Раньше чем привести доказательство в общем виде, рассмотрим численный пример. Пусть, например, требуется найти приближенное значение с точностью до 0,01 для  $\sqrt[3]{3}$ . Обозначим это значение через  $x$ . Тогда

$$x^3 < 3; (x + 0,01)^3 > 3,$$

Умножим обе части каждого из этих неравенств на  $100^3 = 1\,000\,000$ , получим

$$(100x)^3 < 3\,000\,000 \text{ и } (100x + 1)^3 > 3\,000\,000$$

(лемма 1 § 3). Следовательно,  $100x$  есть приближенное значение с точностью до 1 для  $\sqrt[3]{3\,000\,000}$ . В силу теоремы 1 такое приближенное значение существует. Посредством испытаний убеждаемся, что

$$144^3 = 2\,985\,984 < 3\,000\,000; \quad 145^3 = 3\,048\,625 > 3\,000\,000.$$

Следовательно,  $100x = 144$ ;  $x = 1,44$ . Действительно,

$$1,44^3 = 2,985\,984 < 3; \quad 1,45^3 = 3,048\,625 > 3.$$

**Доказательство.** Обратимся теперь к доказательству в общем случае. Пусть нам требуется найти десятичное приближение с недостатком к положительному числу  $a$  с точностью до единицы  $m$ -го знака после запятой. Рассмотрим число  $a_1 = a \cdot 10^{mn}$ . Число  $a_1$  не является  $n$ -й степенью целого числа, ибо если  $a_1 = x^n$  при целом  $x$ , то

$$a = \frac{a_1}{10^{mn}} = \frac{x^n}{10^{mn}} = \left(\frac{x}{10^m}\right)^n,$$

а  $\frac{x}{10^m}$  есть десятичная дробь с  $m$  цифрами после запятой, что противоречит условию теоремы. Поэтому, согласно теореме 1, для  $a_1$  найдется целое приближение с недостатком  $b_1$  с точностью до единицы, т. е. такое число, что

$$b_1^n < a_1; \quad (b_1 + 1)^n > a_1.$$

Тогда

$$\frac{b_1^n}{10^{mn}} < \frac{a_1}{10^{mn}} = a; \quad \frac{(b_1 + 1)^n}{10^{mn}} > \frac{a_1}{10^{mn}} = a,$$

но

$$\frac{b_1^n}{10^{mn}} = \left(\frac{b_1}{10^m}\right)^n; \quad \frac{(b_1 + 1)^n}{10^{mn}} = \left(\frac{b_1}{10^m} + \frac{1}{10^m}\right)^n.$$

Таким образом, мы нашли две десятичные дроби  $\frac{b_1}{10^m}$  и  $\frac{b_1}{10^m} + \frac{1}{10^m}$  с  $m$  цифрами после запятой, отличающихся на  $\frac{1}{10^m}$ , т. е. на одну единицу последнего знака, и такие, что  $n$ -я степень меньшей дроби меньше  $a$ ,  $n$ -я степень большей дроби больше  $a$ . Следовательно,  $\frac{b_1}{10^m}$  и есть искомое приближение.

Теорема 2 решает вопрос о существовании приближенных значений для корня любой степени из любого положительного числа, но способ нахождения приближений к корню, использованный для доказательства теоремы, практически мало пригоден. Трудность заключается в отыскании приближенного значения с точностью до 1 из числа  $a_1 = a \cdot 10^{mn}$ , которое может быть огромным по величине. Для приближенного извлечения квадратного корня существует удобная схема вычислений, разобранный в гл. IX первой части книги.

**З а м е ч а н и е.** Для корней степени выше второй приближенное извлечение корня производится косвенными средствами: или с привлечением логарифмов (что будет изложено в гл. VII), или посредством применения общих методов приближенного решения уравнений высших степеней (некоторые из них разобраны в гл. IV). Эти методы можно применить, так как извлечение корня  $n$ -й степени из числа  $a$  равносильно решению алгебраического уравнения  $x^n - a = 0$ .

## § 7. Связь задачи об извлечении корня с задачей об измерении отрезков

Рассмотрим задачу об извлечении корня с геометрической точки зрения. Это поможет нам глубже понять, почему точное извлечение корня из положительного числа часто является неосуществимой задачей, если оставаться в области рациональных чисел.

Пусть, например, требуется найти  $\sqrt[3]{2}$ . Представим себе, что мы идеально точно построили график зависимости  $y = x^3$ , соединив непрерывной линией все точки, ординаты которых равны кубам абсцисс (рис. 30). Найдем на этом графике точку  $M$  с ординатой, равной 2. С этой целью проведем через точку  $P$ , взятую на оси ординат на расстоянии 2 от начала прямую  $PP'$ , параллельную оси абсцисс. Эта прямая пересечется с графиком в искомой точке  $M$ . Тогда абсцисса

точки  $M$  должна равняться  $\sqrt[3]{2}$ , так как ее куб, согласно зависимости  $y = x^3$ , должен равняться 2.

Итак,  $\sqrt[3]{2}$  есть абсцисса точки  $M$ , т. е. длина отрезка  $ON$ . Но, с другой стороны, среди рациональных чисел  $\sqrt[3]{2}$  не существует. Как же разрешить создавшееся противоречие?

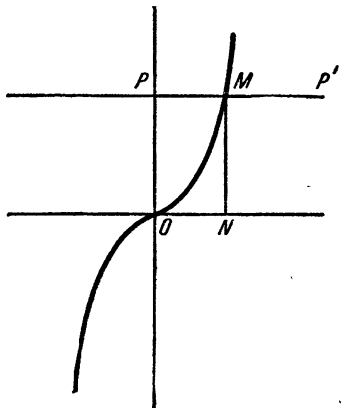


Рис. 30.

С одной стороны, мы видим на чертеже  $\sqrt[3]{2}$ , это есть абсцисса точки  $M$ , т. е. длина отрезка  $ON$ . Результат точного измерения этого отрезка в выбранном масштабе даст нам точное значение для  $\sqrt[3]{2}$ . С другой же стороны,  $\sqrt[3]{2}$  среди рациональных чисел не существует.

Противоречие разрешается так. Не всякий отрезок имеет длину, измеряемую (в данном масштабе) рациональным числом, так что совокупность рациональных чисел оказывается недостаточной для измерения длин любых отрезков.

Если же мы так обобщим и расширим понятие числа, что окажемся возможным каждому отрезку сопоставить число (из расширенной совокупности чисел) в качестве длины этого отрезка, то в этой расширенной совокупности чисел задача о точном извлечении корня любой степени из любого положительного числа окажется разрешимой. Действительно, естественно считать, что  $\sqrt[n]{a}$  есть абсцисса точки графика зависимости  $y = x^n$ , ордината которой равна  $a$ , т. е.  $\sqrt[n]{a}$  есть длина некоторого вполне определенного отрезка.

### § 8. Измерение отрезков. Определение иррационального и действительного числа

Измерение отрезка осуществляется посредством сравнения его с некоторым отрезком, принятым за единицу масштаба. Именно, если длина отрезка  $AB$  равна, например,  $\frac{45}{23}$ , причем за единицу масштаба принят отрезок  $CD$ , то это значит, что  $\frac{1}{23}$  часть отрезка  $CD$  укладывается на отрезке  $AB$  ровно 45 раз. Таким образом, в рассматриваемом случае найдется отрезок  $MN$  ( $\frac{1}{23}$  часть отрезка  $CD$ ) такой, что он укладывается на обоих сравниваемых отрезках целое число раз — 23 раза на отрезке  $CD$  и 45 раз на отрезке  $AB$ .

Вообще длина отрезка  $AB$  при сравнении с единицей масштаба  $CD$  выражается рациональным числом в том и только в том случае,

если найдется отрезок  $MN$ , который укладывается на обоих отрезках целое число раз. Именно, если  $MN$  укладывается на единице масштаба  $CD$   $n$  раз, а на отрезке  $AB$   $m$  раз, то длина  $AB$  равна  $\frac{m}{n}$

(рис. 31). Обратно, если длина  $AB$  равна  $\frac{m}{n}$  (при единице масштаба  $CD$ ), то  $\frac{1}{n}$  часть  $CD$  укладывается на  $CD$   $n$  раз, на  $AB$  —  $m$  раз.

Отрезок  $MN$ , укладывающийся целое число раз на отрезках  $CD$  и  $AB$ , называется их *общей мерой*. Сами отрезки  $CD$  и  $AB$ , если они имеют общую меру, называются *соизмеримыми*.

Итак, длина отрезка  $AB$  выражается рациональным числом в том и только в том случае, если отрезок  $AB$  соизмерим с отрезком  $CD$ , принятым за единицу масштаба.

Если бы оказалось, что любые два отрезка соизмеримы, то совокупность рациональных чисел оказалась бы достаточной для измерения любого отрезка. Однако это не так. Именно, существуют *несоизмеримые отрезки*. В геометрии устанавливается, например, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной. Мы дадим почти чисто арифметическое доказательство этой замечательной теоремы.

Из арифметики известно, что площадь прямоугольника (измеренная в квадратных единицах масштаба) равна произведению длин его сторон (измеренных в соответствующих линейных единицах). Конечно, это устанавливалось в арифметике в предположении, что стороны прямоугольника выражаются рациональными числами.

Примем за единицу масштаба сторону квадрата  $OABC$  (рис. 32). Отложим на продолжении сторон  $OA$  и  $OC$ , от вершины  $O$ , отрезки  $OD$  и  $OF$ , равные  $OA$ . Тогда четырехугольник  $ACDF$  будет квадратом. Действительно, все четыре треугольника  $\triangle OAC$ ,  $\triangle OCD$ ,  $\triangle ODF$  и  $\triangle OFA$ , очевидно, равны между собой и каждый из них есть равнобедренный прямоугольный треугольник. Поэтому, все 8 острых углов этих треугольников, при вершинах  $A, C, D, F$  равны  $45^\circ$ , и следовательно, все углы при вершинах четырехугольника  $ACDF$  прямые. Кроме того, из того же равенства треугольников следует, что  $AC = CD = DF = FA$ .

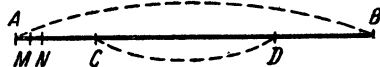


Рис. 31.

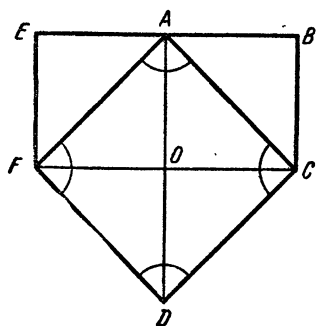


Рис. 32.

довательно, все углы при вершинах четырехугольника  $ACDF$  прямые. Кроме того, из того же равенства треугольников следует, что  $AC = CD = DF = FA$ .

Итак,  $ACDF$  есть квадрат. Допустим, что его сторона  $AC$  (являющаяся диагональю квадрата  $OABC$ ) соизмерима с единицей масштаба  $OA$ , и пусть длина  $AC$  равна рациональному числу  $a$ . Тогда площадь квадрата  $ACDF$  равна  $a^2$ .

С другой стороны,

$$\text{пл. } ACDF = 4 \text{ пл. } OAC,$$

ибо квадрат  $ACDF$  составлен из четырех треугольников, каждый из которых равен  $\triangle OAC$ . Но точно из таких же треугольников,  $\triangle OAC$ ,  $\triangle ABC$ ,  $\triangle OFA$  и  $\triangle FEA$ , составлен прямоугольник  $FEBC$ . Следовательно,  $\text{пл. } FEBC = 4 \text{ пл. } OAC = \text{пл. } ACDF$ . Вычисляя, получим

$$\text{пл. } FEBC = FC \cdot CB = 2 \cdot 1 = 2.$$

Итак, если длина  $AC$  равна  $a$ , то  $a^2 = 2$ . Но, согласно теореме § 5, рационального числа, квадрат которого равен 2, *не существует*.

Таким образом, допустив, что диагональ квадрата соизмерима с его стороной, мы пришли к противоречию, тем самым мы убедились в существовании несоизмеримых отрезков.

Следовательно, рациональных чисел недостаточно для целей измерения отрезков. Именно, при любом выборе единицы масштаба найдутся отрезки несоизмеримые с этой единицей, и потому длины их не могут быть выражены в рациональных числах.

Однако наглядное представление о длине отрезка имеет смысл, независимо от того, соизмерим отрезок с выбранной единицей измерения или нет. По своим свойствам длины отрезков совершенно аналогичны числам. Так же, как и числа, их можно *сравнивать по величине*. Далее, мы понимаем, что представляет собой сумма длин двух данных отрезков — это есть длина отрезка, который может быть разбит на два отрезка, равных данным. Таким образом, длины отрезков, подобно числам, можно *складывать*.

Если отрезок соизмерим с единицей масштаба, то его длина есть рациональное число. Будем считать, что длина отрезка, несоизмеримого с единицей масштаба, тоже есть число, но только это число является числом новой природы — «иррациональным», выходящим за пределы совокупности рациональных чисел.

Совершенно такое же положение, как с измерением длин отрезков, имеет место при измерении других величин, когда оно осуществляется посредством сравнения с некоторой величиной, принятой за единицу.

Так можно представить себе, например, кусок железа, вес которого несоизмерим с единицей веса — граммом. Действительно, примем, для простоты рассуждения, что удельный вес железа точно равен 7,8. Тогда железный брусок, сечение которого равно точно  $1 \text{ см}^2$ , а длина равна длине диагонали квадрата со стороной  $1 \text{ см}$ , не может иметь



вес, выраженный в целых долях грамма. Действительно, вес такого бруска должен равняться  $p = 7,8 d$  г, где  $d$  — длина бруска, и если бы  $p$  выражалось рациональным числом граммов, то  $d = \frac{p}{7,8}$  выражалось бы рациональным числом сантиметров, что, как мы видели, не имеет места \*).

Таким образом, для измерения веса тел рациональных чисел оказалось тоже недостаточно. То же самое имеет место при измерении любой величины, могущей изменяться непрерывно. Для измерения таких величин тоже необходимо привлечение иррациональных чисел.

Итак, иррациональные числа суть числа, служащие для измерения величин, несоизмеримых с выбранной единицей измерения.

Такое определение вполне согласуется с представлением о понятии числа как результата измерения величины. Ведь числа и должны являться средством для описания результата измерений каких-либо величин — длины отрезков, площадей, объемов, промежутков времени, температуры, силы и т. д.

Введение иррациональных чисел совершенно аналогично введению дробных чисел в дополнение к ранее изученным целым. Ведь и в арифметике дробные числа появляются из потребности измерения величин, допускающих дробление на равные части.

В дальнейшем при описании свойств иррациональных чисел, в частности при описании способа их записи при помощи цифр (§ 10) и свойств действий (§ 12 — 14), мы будем исходить из более узкого, геометрического, определения иррационального числа. Именно, иррациональные числа суть числа, служащие для измерения длин отрезков, несоизмеримых с единицей масштаба.

Такое сужение задачи измерения (вместо любых величин мы рассматриваем отрезки) не является существенным, так как процесс измерения, посредством сравнения с единицей измерения, для любых величин ничем не отличается от процесса измерения отрезков. Поэтому, ограничиваясь геометрическим представлением об иррациональном числе как о длине отрезка, мы не проигрываем в общности в смысле широты возможных приложений, но выигрываем в простоте и наглядности.

С геометрической точки зрения иррациональное число ничем не «хуже» рационального. Например, нет никакого качественного отличия между длиной диагонали квадрата, стороной которого является единица масштаба, и диагональю прямоугольника, с длинами сторон 3 и 4, несмотря на то, что первая длина, как мы установили, есть иррациональное число, а вторая равна рациональному числу 5.

---

\*) Конечно, наше рассуждение идеализировано — мы отвлеклись от атомного строения материи, представляя себе материю непрерывной, только при этом отвлечении приведенное выше рассуждение имеет силу.

Действительно, рассмотрим квадрат  $ABCD$ , длина стороны которого равна 7, и впишем в него другой квадрат так, как показано на рис. 33. Площадь  $ABCD$  равна 49, треугольники  $aDd$  и  $bcB$ , будучи сложены по гипотенузе, образуют прямоугольник с длинами сторон 3 и 4, площадь которого равна 12. Треугольники  $aAb$  и  $dcC$  вместе имеют площадь тоже 12.

Следовательно, площадь  $abcd$  равна  $49 - 12 - 12 = 25$  и потому  $ab = 5$ .

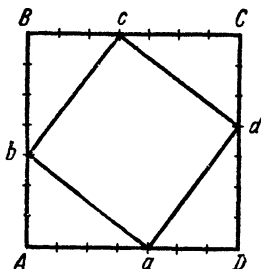


Рис. 33.

Мы дали выше определение только положительным иррациональным числам. Отрицательные иррациональные числа определяются подобно отрицательным рациональным числам. Именно, каждому положительному иррациональному числу сопоставляется противоположное ему отрицательное. Так же, как для рациональных чисел, отрицательные иррациональные числа можно связать с величинами направленных отрезков.

Все рациональные и иррациональные числа, положительные, отрицательные и нуль, вместе называются действительными или вещественными числами.

Присоединение к рациональным числам чисел иррациональных, т. е. переход от совокупности рациональных чисел к совокупности всех действительных чисел, является очередным и предпоследним шагом в расширении понятия числа. Так же, как и предшествующие расширения понятия числа (переход от натуральных чисел к любым рациональным положительным числам целым и дробным; введение отрицательных чисел), введение иррациональных чисел расширяет возможности приложений математики. Следует отметить, что могущественные методы так называемой высшей математики, изучающей прежде всего переменные величины, изменяющиеся непрерывно, не могут быть обоснованы без пользования всеми действительными числами.

Вместе с тем и в пределах самой алгебры введение иррациональных чисел вносит общность и простоту. В частности, действие извлечения корня из положительного числа, не всегда осуществимое в области рациональных чисел, становится осуществимым всегда при переходе в область чисел действительных, как мы увидим далее в § 14.

## § 9. Изображение действительных чисел на числовой оси. Неравенства

Мы видели раньше, что каждое рациональное число — целое или дробное, положительное или отрицательное — может быть изображено точкой на прямой линии, так называемой *числовой осью*.

*Числовая ось* есть направленная прямая с выбранной точкой отсчета  $O$  и с выбранной единицей масштаба (рис. 34). Изображением рационального числа  $a$  является точка  $A$ , расстояние которой от точки

отсчета равно абсолютной величине  $a$ , и отрезок  $OA$  направлен по направлению прямой или в противоположном направлении в соответствии со знаком числа  $a$ .

Совершенно так же мы можем изобразить в виде точки и любое иррациональное число. Именно, чтобы построить изображение иррационального числа, нужно от точки отсчета  $O$  отложить в сторону

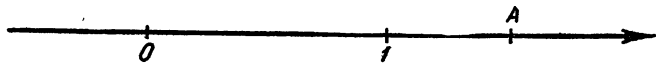


Рис. 34.

направления прямой или в противоположную, в зависимости от знака  $a$ , отрезок, длина которого в данном масштабе равна числу  $|a|$ . Точка, являющаяся концом этого отрезка, и будет изображением числа  $a$ .

Принято для сокращения речи говорить вместо «точка, изображающая число  $a$ » просто «точка  $a$ », т.е. как бы отождествлять число с точкой, являющейся его изображением.

Таким образом, каждое действительное число, рациональное или иррациональное, изображается в виде точки на числовой оси.

Обратим внимание на то, что если ограничиться рациональными числами, то мы получим, что не все точки числовой оси являются изображением чисел. Так, если мы отложим от точки отсчета отрезок, равный диагонали квадрата со стороной, равной единице, то построенная точка не будет изображением рационального числа. Таким образом, если представить себе изображенными на числовой оси все рациональные числа, то не вся числовая ось будет покрыта их изображениями. Найдутся точки числовой оси, не являющиеся изображениями рациональных чисел, так что числовая ось будет как бы «просвечивать» сквозь совокупность изображений рациональных чисел.

Но изображения всех действительных чисел, рациональных и иррациональных, заполняют уже всю числовую ось.

В самом деле, любая точка  $A$  числовой оси является изображением некоторого действительного числа, положительного или отрицательного, в зависимости от того, с какой стороны от начальной точки  $O$  точка  $A$  находится. Абсолютная величина этого числа равна длине отрезка  $OA$ . Такое число существует, ибо в области всех действительных чисел каждый отрезок имеет длину, выражаемую числом.

Для действительных чисел естественным образом определяются понятия «больше» и «меньше». Если заданы два неравных отрезка, то из них большим считается тот отрезок, на который целиком укладывается другой меньший отрезок. Соответственно, из двух положительных действительных чисел считается большим то, которое является длиной большего отрезка.

Далее, каждое положительное число, по определению, больше нуля и больше каждого отрицательного числа, а из двух отрицательных чисел больше то, абсолютная величина которого меньше. Так

же, как для рациональных чисел (см. гл. II первой части книги), легко установить, что при изображении действительных чисел точками на числовой оси, направленной слева направо, большее из двух чисел изображается точкой, лежащей правее.

Такое изображение действительных чисел вносит наглядность в понятие «больше» и «меньше» в применении к любым действительным числам.

## § 10. Приближения к действительным числам

К любым действительным числам можно приблизиться посредством рациональных чисел. Приближением с недостатком к действительному числу  $a$  с точностью, например, до  $\frac{1}{1000}$  называется такое рациональное число  $r$ , что  $r \leq a$ , но  $r + \frac{1}{1000}$  уже больше  $a$ .

Особенно удобно рассматривать десятичные приближения. *Десятичным приближением с недостатком* к действительному числу  $a$  с точностью до  $\frac{1}{10^m}$  (или, как говорят тоже, с точностью до единицы  $m$ -го знака после запятой) называется десятичная дробь  $r$  с  $m$  цифрами после запятой и такая, что  $r \leq a$ , но  $r + \frac{1}{10^m} > a$ .

Очевидно, что число  $r + \frac{1}{10^m}$  получается из числа  $r$  посредством увеличения последней цифры на одну единицу.

Число  $r' = r + \frac{1}{10^m}$  называется *десятичным приближением к числу  $r$  с избытком* с точностью до  $\frac{1}{10^m}$ .

Например, десятичными приближениями к числу  $\frac{1}{3}$  с недостатком являются 0,3 (с точностью до 0,1); 0,33 (с точностью до 0,01); 0,333 (с точностью до 0,001) и т. д. Соответственно приближениями с избытком являются 0,4; 0,34; 0,334 и т. д.

К числу  $2\frac{1}{4}$  приближениями с недостатком будут: 2,2 (с точностью до 0,1); 2,25 (с точностью до 0,01); 2,250 (с точностью до 0,001); 2,2500 (с точностью до 0,0001) и т. д. Здесь все приближения, начиная с 2,25, равны между собой и равны числу  $2\frac{1}{4}$ .

Мы рассмотрели примеры приближений к рациональным числам. Подобным образом можно строить приближения и к числам иррациональным. Например, десятичные приближения к иррациональному числу  $\sqrt{2}$  (которым измеряется длина диагонали квадрата со стороной, равной единице) суть: 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ..., т. е. «приближенные значения»  $\sqrt{2}$  с соответствующей точностью.

Легко видеть, что последующее десятичное приближение с недостатком к данному действительному числу  $a$  получается из предшествующего посредством приписывания одной цифры без изменения предыдущих.

Чтобы установить это в общем виде, обратимся к геометрическому изображению чисел. Пусть  $r_m$  есть десятичное приближение (с недостатком) к числу  $a$  с точностью до единицы  $m$ -го знака после запятой. Тогда  $r'_m = r_m + \frac{1}{10^m}$  есть соответствующее приближение с избытком. Изображение числа  $a$  находится внутри (или на левом конце) промежутка от  $r_m$  до  $r'_m$ .

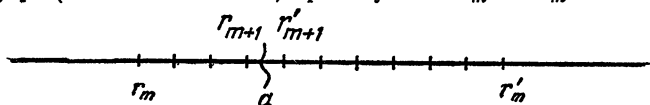


Рис. 35.

Разобьем этот промежуток на 10 равных частей (рис. 35). Длина каждой части будет равна, очевидно,  $\frac{1}{10^{m+1}}$ , т.е. одной единице  $m+1$  знака. Следовательно, точки деления будут представлять собой десятичные дроби с  $m+1$  знаками после запятой, целая часть и первые  $m$  знаков которых образуют десятичную дробь  $r_m$ . Точка, изображающая число  $a$ , попадет внутрь или на левый конец одного из десяти промежутков. Тогда числа, изображенными которых являются левый и правый концы этого промежутка, будут представлять собой соответственно десятичные приближения  $r_{m+1}$  и  $r'_{m+1}$  к числу  $a$  с  $m+1$  знаком после запятой. Таким образом, при записи приближения  $r_{m+1}$  в виде десятичной дроби все цифры в десятичной записи  $r_m$  действительно сохраняются, и только добавляется одна новая цифра.

Представим теперь себе, что мы смогли найти все десятичные приближения к числу  $a$ , т.е. мы знаем, какая цифра на каком месте в этих приближениях находится. Представим себе все эти цифры записанными подряд, одну за другой, в том порядке, как они входят в десятичные приближения (с недостатком), мы получим так называемую бесконечную десятичную дробь. (Конечную десятичную дробь можно рассматривать как частный случай бесконечной, считая, что все цифры, начиная с некоторой, равны нулю.) Отрезки бесконечной десятичной дроби, т.е. дроби, составленной из конечных последовательностей ее цифр, являются десятичными приближениями (с недостатком) к действительному числу  $a$ .

Естественно считать, что эта бесконечная дробь является записью положительного действительного (рационального или иррационального) числа с помощью цифр. Каждое действительное число вполне определяет такую запись, и неравные действительные числа определяют различные бесконечные десятичные дроби, так как если два действительных числа неравны, т.е. изображаются различными точками на числовой оси, то их приближения с недостатком должны различаться при достаточно большой точности, т.е. при достаточно большом числе цифр после запятой.

Приближение с недостатком  $r_{m+1}$  может совпадать с предыдущим приближением  $r_m$ , только если  $m+1$ -я цифра после запятой есть 0.

Приближение с избытком  $r'_{m+1}$  может совпадать с предыдущим приближением  $r'_m$ , только если  $m+1$ -я цифра (в приближении с недостатком) есть 9.

Заметим, что по определению приближения с избытком оно не может совпадать ни при каком  $n$  с приближаемым действительным числом.

Отсюда нетрудно установить (но мы не будем на этом останавливаться), что десятичные приближения с избытком не могут оставаться неизменными, начиная с некоторого места. Поэтому записью положительного действительного числа не может быть бесконечная десятичная дробь с девяткой в периоде.

Мы рассмотрели десятичную запись для положительных действительных чисел. Для записи отрицательного числа достаточно записать в виде бесконечной десятичной дроби его абсолютную величину и поставить знак минус.

Итак, каждое действительное число может быть записано в виде бесконечной десятичной дроби (без девятки в периоде). Справедливо и обратное утверждение, что каждая бесконечная десятичная дробь (без девятки в периоде) является записью некоторого действительного числа. Доказательство последнего утверждения тесно связано с так называемым свойством непрерывности прямой линии, изложению сущности которого посвящен следующий § 11.

Отметим один важный случай, в котором бесконечные десятичные дроби появляются естественным образом. В § 6 мы доказали, что из любого положительного числа можно приближенно извлечь корень любой степени с любой точностью\*). Составляя последовательные десятичные приближения (с недостатком) к  $\sqrt[n]{a}$ , мы получим ряд конечных десятичных дробей, из которых каждая последующая получается посредством приписывания одной цифры к предыдущей. Например, для  $\sqrt{2}$  мы получим 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; 1,414213 и т. д.

Представив себе этот процесс продолжающимся безгранично, мы получим бесконечную десятичную дробь. Естественно предполагать, что эта бесконечная десятичная дробь есть запись действительного числа, являющегося точным значением  $\sqrt[n]{a}$ . Например,  $\sqrt{2} = 1,414213...$  (Строгое доказательство этого мы проведем в § 14.)

Замечание. Можно доказать, что бесконечная десятичная дробь является записью рационального числа в том и только в том случае, если она периодическая.

В гл. VI будет доказана одна сторона этого утверждения, именно, что всякая периодическая десятичная дробь действительно является записью некоторого рационального числа.

---

\*) При доказательстве рассматривались, конечно, только рациональные подкоренные числа, однако все рассуждения легко перенести на любые действительные числа.

## § 11. Свойство непрерывности совокупности действительных чисел

В § 10 мы установили, что всякое действительное число может быть задано в виде бесконечной десятичной дроби. Значительно сложнее доказывается, что всякая бесконечная десятичная дробь (без девятки в периоде) может служить записью некоторого действительного числа. Доказательство этого утверждения тесно связано с так называемым свойством непрерывности прямой линии.

Наглядная сущность свойства непрерывности прямой линии состоит в том, что между отдельными точками на прямой нет никаких пустот. Строго это свойство описывается одной из аксиом геометрии, так называемой аксиомой непрерывности.

Раньше, чем сформулировать эту аксиому, введем некоторые вспомогательные понятия.

Пусть на прямой даны два отрезка  $AB$  и  $CD$  такие, что оба конца  $C$  и  $D$  отрезка  $CD$  лежат на отрезке  $AB$  (т. е. внутри или на концах его). Будем говорить, что отрезок  $CD$  *вложен* в отрезок  $AB$ .

Теперь представим себе, что нам дана бесконечная совокупность отрезков  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, \dots$ , из которых каждый последующий вложен в предыдущий. Предположим, кроме того, что длины отрезков  $A_1B_1, A_2B_2, \dots$  становятся все меньше и меньше, неограниченно близко подходя к нулю (например, длина  $A_1B_1$  равна  $\frac{1}{2}$ , длина  $A_2B_2$

равна  $\frac{1}{4}$ , длина  $A_3B_3$  равна  $\frac{1}{8}$

и т. д. — см. рис. 36).

Такая последовательность промежутков называется *стягивающейся*.

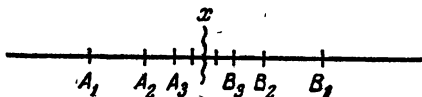


Рис. 36.

Теперь мы можем сформулировать аксиому непрерывности.

**Аксиома.** Для всякой стягивающейся последовательности промежутков на прямой существует точка, принадлежащая всем промежуткам последовательности.

Как было сказано выше, сущность аксиомы непрерывности состоит в том, что между точками, лежащими на прямой линии, нет никаких пустот. Действительно, в аксиоме непрерывности как раз и утверждается, что всякая стягивающаяся последовательность промежутков «стягивается» к точке, а не к «пустому месту».

Легко видеть, что точка  $x$ , к которой «стягивается» стягивающаяся последовательность промежутков, может быть только одна (рис. 7). В самом деле, если бы таких точек оказалось две,  $M$  и  $N$ , то длина каждого из промежутков последовательности была бы не меньше длины промежутка  $MN$  и, следовательно, эти длины не могли бы неограниченно приближаться к нулю.

Теперь легко доказать, что бесконечная десятичная дробь является записью некоторого действительного числа.

Пусть дана бесконечная десятичная дробь, например,

$$2,121121112111121111...$$

(мы взяли дробь с такой закономерностью следования цифр: первая цифра есть двойка, вторая единица, затем двойка и две единицы, затем двойка и три единицы, затем двойка и четыре единицы и т. д. Ясно, что эта дробь не является периодической и, следовательно, не может являться записью рационального числа).

Рассмотрим на числовой оси отрезки  $A_0B_0$ ,  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$ ,  $A_4B_4$  и т. д., левые концы которых изображают числа 2; 2,1; 2,12; 2,121; 2,1211 и т. д., а правые концы изображают числа 3; 2,2; 2,13; 2,122; 2,1212 и т. д.

Таким образом, за левые концы промежутков мы принимаем точки  $A_0, A_1, A_2, \dots$ , изображающие последовательные «отрезки» данной бесконечной десятичной дроби, а за правые концы — точки  $B_0, B_1, B_2, \dots$ , изображающие числа, полученные из «отрезков» данной дроби посредством увеличения последней цифры на одну единицу.

Ясно, что каждый последующий отрезок вложен в предыдущий.

Далее, длины построенных отрезков равны соответственно  $1; \frac{1}{10};$

$\frac{1}{100}; \frac{1}{1000}, \dots$ , т. е. эти длины неограниченно приближаются к нулю. Следовательно, нами построена стягивающаяся последовательность отрезков.

Обозначим через  $C$  точку, принадлежащую всем промежуткам этой последовательности, а через  $x$  действительное число, соответствующее точке  $C$ .

Тогда

$$\begin{array}{llll} 2 & < x < 3, & \text{ибо } C \text{ лежит внутри отрезка } A_0B_0, \\ 2,1 & < x < 2,2, & > C > > > A_1B_1, \\ 2,12 & < x < 2,13, & > C > > > A_2B_2, \\ 2,121 & < x < 2,122, & > C > > > A_3B_3 \end{array}$$

и т. д.

Из этих неравенств мы заключаем, что «отрезки» 2; 2,1; 2,12; 2,121; ... являются десятичными приближениями с недостатком к числу  $x$ , и следовательно, бесконечная десятичная дробь, соответствующая числу  $x$ , совпадает с данной дробью 2,1211211121111...

Таким же образом можно рассуждать для любой другой бесконечной десятичной дроби.

Действительно, пусть дана бесконечная десятичная дробь (без девятки в периоде)  $a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$ . Здесь  $a_0$  обозначает целую часть дроби,  $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$  последовательные цифры после запятой. Пусть  $a_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$  есть «отрезок» этой дроби,  $b_n = a_n + \frac{1}{10^n}$  есть дробь, получающаяся из  $a_n$



увеличением последней цифры на одну единицу. Очевидно, что

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots; \quad b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n \geq \dots;$$

$$b_n - a_n = \frac{1}{10^n}.$$

Обозначим через  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  точки на числовой оси, изображающие числа  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ , а через  $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$  точки, изображающие числа  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ . Так как  $a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$  при любом  $n$ , отрезок  $A_{n+1} B_{n+1}$  вложен в отрезок  $A_n B_n$ , т. е. в последовательности отрезков  $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_n B_n, \dots$  каждый последующий отрезок вложен в предыдущий.

Далее, длина  $A_1 B_1$  равна  $b_1 - a_1 = \frac{1}{10}$ , длина  $A_2 B_2$  равна  $\frac{1}{100}$  и т. д., т. е. длины построенных промежутков неограниченно приближаются к нулю. В силу аксиомы непрерывности найдется точка  $C$ , принадлежащая всем построенным отрезкам. Обозначим через  $x$  действительное число, соответствующее точке  $C$ . Тогда, в силу того, что  $C$  принадлежит отрезку  $A_n B_n$ , заключаем, что  $a_n \leq x \leq b_n$  при всех  $n$ . Из этих неравенств непосредственно следует, что число  $x$  записывается данной десятичной дробью  $a_0, a_1 \dots a_n \dots$ .

Из аксиомы непрерывности непосредственно вытекает следующая теорема, которая, по сути дела, является алгебраической формулировкой аксиомы непрерывности. Теорема эта выражает свойство непрерывности совокупности всех действительных чисел.

**Теорема.** Пусть даны две бесконечные последовательности чисел  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  и  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$  такие, что  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$ ,  $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n \geq \dots$ ,  $b_n > a_n$  при всех  $n$  и разности  $b_n - a_n$  неограниченно приближаются к нулю при безграничном увеличении  $n$ . Тогда существует одно и только одно число  $x$  такое, что  $a_n \leq x \leq b_n$  при всех  $n$ .

Для доказательства этой теоремы достаточно представить себе ее условие геометрически.

Рассмотрим на числовой оси отрезки  $(a_n, b_n)$ . Так мы обозначаем отрезок, концами которого являются точки, изображающие числа  $a_1$  и  $b_1$ ,  $a_2$  и  $b_2$ ,  $a_3$  и  $b_3$ , ... и т. д. Условие  $b_n > a_n$  означает, что для отрезка  $(a_n, b_n)$  точка  $a_n$  является левым концом, точка  $b_n$  — правым. Условия  $a_1 \leq a_2$  и  $b_1 \geq b_2$  означают, что при переходе от отрезка  $(a_1, b_1)$  к отрезку  $(a_2, b_2)$  левый конец может сдвинуться только вправо, а правый — только влево, т. е. отрезок  $(a_2, b_2)$  вложен в отрезок  $(a_1, b_1)$ . Из неравенств  $a_2 \leq a_3$  и  $b_2 \geq b_3$  заключаем, что отрезок  $(a_3, b_3)$  вложен в отрезок  $(a_2, b_2)$  и т. д., каждый отрезок совокупности  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \dots$  вложен в предыдущий.

Наконец, неограниченное уменьшение разностей  $b_n - a_n$  означает, что длины отрезков  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n)$  неограниченно уменьшаются. Таким образом, эти отрезки образуют стягивающуюся последовательность.

Согласно аксиоме непрерывности найдется одна и только одна точка  $x$  (т. е. точка, изображающая некоторое действительное число  $x$ ), принадлежащая всем отрезкам последовательности. Но то, что  $x$  принадлежит отрезку  $(a_n, b_n)$ , как раз и означает, что  $a_n \leq x \leq b_n$ . Это неравенство выполняется при любом значении  $n$ , так как точка  $x$  принадлежит всем отрезкам рассматриваемой стягивающейся последовательности.

## § 12. Сложение и вычитание действительных чисел

Совокупность действительных чисел шире совокупности рациональных чисел — к рациональным числам присоединяются еще новые, иррациональные числа. Основные арифметические действия же определены пока только в применении к рациональным числам. Теперь

необходимо распространить действия на все действительные числа. Этот вопрос требует специального рассмотрения, потому что при расширении совокупности чисел мы должны и действия над ними понимать в каком-то новом смысле, обобщающем прежний.

Ограничимся сначала положительными действительными числами и начнем с рассмотрения действия сложения. Дадим следующее определение.

Суммой двух положительных действительных чисел (рациональных или иррациональных) называется длина отрезка, получающегося сложением отрезков, длинами которых являются слагаемые числа. (Сложение отрезков здесь следует понимать в том же смысле, как в геометрии. Именно, чтобы сложить отрезки, нужно их «приложить» один к другому, т. е., взяв некоторую точку на прямой, отложить от нее отрезок, равный одному из слагаемых отрезков, и от его конца отложить в ту же сторону отрезок, равный второму слагаемому. Отрезок, соединяющий начало первого отрезка с концом второго, и есть сумма данных отрезков.)

Сложение действительных чисел, согласно этому определению, является обобщением хорошо известного нам сложения положительных рациональных чисел. Действительно, если длины слагаемых отрезков выражаются рациональными числами, то в геометрии доказывается, что длина суммы отрезков равна сумме длин слагаемых отрезков. Если же один или оба отрезка несоизмеримы с единицей масштаба, т. е. длина одного из них или обоих не может быть выражена рациональным числом, то действие сложения отрезков сохраняет смысл и длина суммы двух отрезков, в силу данного выше определения действия сложения действительных чисел, тоже равна сумме длин слагаемых отрезков.

Из данного определения можно установить справедливость переместительного и сочетательного законов сложения

$$a + b = b + a; (a + b) + c = a + (b + c).$$

Мы не будем на этом останавливаться.

Далее, если  $a$ ,  $b$  и  $c$  — положительные числа и  $a > b$ , то

$$a + c > b + c.$$

Действительно, отрезки с длинами  $a$  и  $b$  можно расположить так, что они будут иметь общий конец  $N$  и отрезок  $MN$  с длиной  $b$  окажется частью отрезка  $KN$  с длиной  $a$  (см. рис. 37).

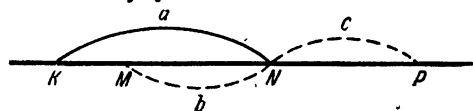


Рис. 37.

Приложив к точке  $N$  отрезок  $NP$  длины  $c$ , мы получим, что  $MP$  есть часть  $KP$ . Но, согласно определению сложения действительных чисел, длина  $KP$  равна  $a + c$ , длина  $MP$  равна  $b + c$ . Следовательно,  $a + c > b + c$ .

Если  $a, b, c, d$  — действительные положительные числа и  $a > b$ ,  $c > d$ , то

$$a + c > b + d.$$

Действительно,  $a + c > b + c > b + d$ .

Установим теперь, как производится сложение положительных действительных чисел, записанных в виде бесконечных десятичных дробей. Обратимся к численному примеру. Из таблиц известно, что

$$\sqrt{3} = 1,73205080\dots$$

$$\sqrt{2} = 1,41421356\dots$$

Составим, например, десятичные приближения с тремя знаками после запятой с недостатком и с избытком к каждому из этих чисел. Это будут 1,732 и 1,733 для  $\sqrt{3}$  и соответственно 1,414 и 1,415 для  $\sqrt{2}$ . Отсюда заключаем, что  $1,732 < \sqrt{3} < 1,733$  и  $1,414 < \sqrt{2} < 1,415$ .

Следовательно, в силу только что доказанных свойств неравенств,

$$3,146 < \sqrt{3} + \sqrt{2} < 3,148,$$

т. е. истинным трехзначным приближением (с недостатком) к числу  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  является 3,146 или 3,147.

Таким образом, взяв в записи для  $\sqrt{3}$  и  $\sqrt{2}$  по три цифры после запятой и сложив полученные приближения с недостатком, мы получаем трехзначное приближение для  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ , в котором последняя цифра не достоверна — может быть, ее нужно увеличить на одну единицу.

Таким же образом, исходя из восьмизначных приближений, мы получим, что  $\sqrt{3} + \sqrt{2} \approx 3,14626436$ . Последняя цифра здесь не достоверна, ибо, привлекая, как раньше, приближение с избытком, мы получим  $3,14626436 < \sqrt{3} + \sqrt{2} < 3,14626438$ , так что, может быть, в десятичном восьмизначном приближении (с недостатком) следует последнюю цифру увеличить на одну единицу.

Для того чтобы узнать, нужно ли это сделать, надо знать девятые цифры для  $\sqrt{3}$  и  $\sqrt{2}$ . Если окажется, что их сумма меньше 9, то восьмой цифрой в записи числа  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  является цифра 6. Если сумма девятых цифр больше 9, то восьмой цифрой в записи  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  является 7. Если, наконец, сумма девятых цифр равна 9, то для установления точной восьмой цифры для  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$  пришлось бы привлечь десятые, а может быть, и одиннадцатые (если бы оказалось, что и сумма десятых цифр равна 9) цифры.

Выскажем теперь в общем виде некоторые выводы из проведенного исследования.

Если действительные числа  $x$  и  $y$  заданы при помощи бесконечных десятичных дробей, то чтобы получить  $m$ -значное приближение (с недостатком)

к их сумме  $x + u$ , нужно сложить  $m$ -значные десятичные приближения (с недостатком) для чисел  $x$  и  $u$ . При этом последняя цифра будет недостоверной, возможно, что ее нужно увеличить на одну единицу, что можно выяснить, только зная следующие цифры.

Чтобы получить надежные границы для  $x + u$ , нужно взять  $m$ -значные приближения с недостатком и с избытком к слагаемым числам и соответственно сложить их. В результате мы получим два числа, между которыми заключена сумма  $x + u$ . Разность между полученными границами равна двум единицам последнего знака, т. е. может быть сделана сколь угодно близкой к нулю.

Перейдем теперь к действию вычитания положительных действительных чисел в предположении, что уменьшаемое больше вычитаемого.

Вычитание определяется как действие, обратное сложению, т. е. как действие, посредством которого по данной сумме и одному из слагаемых определяется второе слагаемое. Геометрический смысл вычитания в рассматриваемом случае ясен (рис. 38).

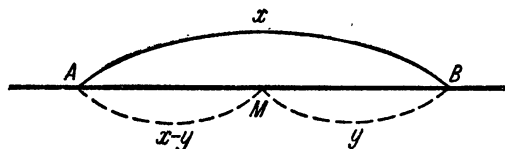


Рис. 38.

Если действительные числа  $x$  и  $u$  заданы при помощи бесконечных десятичных дробей, то, чтобы получить  $m$ -значное десятичное приближение к разности  $x - u$ , нужно вычесть  $m$ -значные десятичные приближения (с недостатком) для чисел  $x$  и  $u$ . Так же, как при сложении, последняя цифра будет недостоверной, может быть, ее следует уменьшить на одну единицу.

Чтобы получить надежные границы для  $x - u$ , следует из приближения с недостатком для  $x$  вычесть приближение с избытком для  $u$ , а из приближения с избытком для  $x$  приближение с недостатком для  $u$ . Разность между полученными таким образом границами равна двум единицам последнего знака.

Так,  $\sqrt[3]{3} = 1,73205080\dots$ ,  $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$ . Отсюда следует, что

$$0,31783723 < \sqrt[3]{3} - \sqrt{2} < 0,31783725.$$

После того как действия сложения и вычитания для положительных действительных чисел определены, они распространяются на действительные числа любых знаков по тем же правилам, как это делается для рациональных чисел.

Так, сумма двух отрицательных действительных чисел равна сумме их абсолютных величин со знаком минус, сумма двух чисел, имеющих противоположные знаки, равна по абсолютной величине разности

сти абсолютных величин слагаемых и берется со знаком слагаемого, имеющего большую абсолютную величину. Наконец, разность двух любых действительных чисел равна сумме уменьшаемого и числа, противоположного вычитаемому.

### § 13. Умножение и деление действительных чисел

Исходя из определения действительного числа, как длины отрезка, естественнее всего определить произведение двух положительных чисел  $a$  и  $b$  как длину отрезка, получаемого известным из геометрии построением первого члена пропорции  $\frac{x}{a} = \frac{b}{1}$ . Построение это таково.

Берется произвольный угол  $POQ$  (рис. 39). На одной из его сторон откладываются отрезок  $OK$ , длина которого равна единице, и отрезок  $OM$  с длиной  $a$ . На другой стороне откладывается отрезок  $OL$  с длиной  $b$ . Точки  $K$  и  $L$  соединяются прямой линией. Через точку  $M$  проводится прямая  $MN$ , параллельная  $KL$ , пересекающая сторону  $OP$  в точке  $N$ . Длина  $ON$  и есть  $x$ .

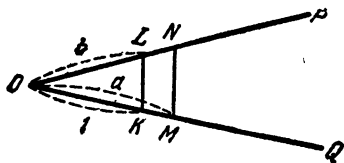


Рис. 39.

Действительно, если отрезки  $OM$  и  $OL$  соизмеримы с единицей масштаба  $OK$ , т. е. их длины выражаются рациональными числами, то в геометрии доказывается, что длина  $ON$  равна  $ab$ , так что умножение действительных чисел, согласно данному определению, содержит обычное умножение рациональных чисел как частный случай.

Можно доказать справедливость переместительного и сочетательного законов умножения:  $ab = ba$  и  $(ab)c = a(bc)$ , а также справедливость распределительного закона для сложения с умножением  $a(b + c) = ab + ac$ , но мы на этом останавливаться не будем.

Далее, если  $a', a, b$  — положительные действительные числа и  $a' > a$ , то  $a'b > ab$ . В самом деле, если  $a' > a$ , то отрезок  $OM'$  с длиной  $a'$  длиннее отрезка  $OM$  с длиной  $a$  (рис. 40). Следовательно, и  $ON'$  длиннее  $ON$ , т. е.  $a'b > ab$ .

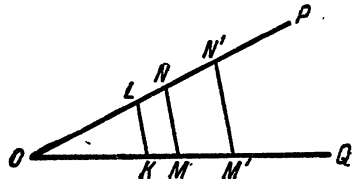


Рис. 40.

Далее, если  $a, b, a', b'$  — положительные числа и  $a' > a$ ,  $b' > b$ , то  $a'b' > ab$ . Действительно,  $a'b' > ab$ .

Последнее неравенство дает возможность строить приближения к произведению двух действительных чисел, если они заданы бесконечными десятичными дробями. Именно, умножив приближения с недостатком к положительным числам  $x$  и  $y$ , мы получим результат,

меньший чем  $xу$ , а если умножим приближения с избытком, то получившийся результат будет больше  $xу$ . Исходя из более точных приближений, мы будем получать для  $xу$  все более тесные границы, так что сможем получить  $xу$  с любой степенью точности.

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим вопрос в общем виде. Пусть  $p_m$  и  $p'_m$  — десятичные приближения с недостатком и с избытком к числу  $x$  с точностью до  $\frac{1}{10^m}$ , и пусть  $q_m$  и  $q'_m$  — такие же приближения к числу  $y$ . Тогда  $p_m \leq x < p'_m$ ;  $q_m \leq y < q'_m$  и, следовательно,  $p_m q_m \leq xу < p'_m q'_m$ , т. е.  $p_m q_m$  и  $p'_m q'_m$  являются приближениями к  $xу$  с недостатком и с избытком.

Однако разность между этими приближениями может быть больше  $\frac{1}{10^m}$  и даже значительно больше, если числа  $x$  и  $y$  больше. Действительно,

$$\begin{aligned} p'_m q'_m - p_m q_m &= \left( p_m + \frac{1}{10^m} \right) q'_m - p_m q_m = \\ &= p_m (q'_m - q_m) + \frac{q'_m}{10^m} = \frac{1}{10^m} (p_m + q'_m), \end{aligned}$$

т. е. эта разность приблизительно равна  $\frac{1}{10^m} (x + y)$ .

Например, умножив  $m$ -значные десятичные приближения с недостатком для чисел  $\sqrt{2}$  и  $\sqrt{3}$ , мы получим приближение с недостатком для  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  с точностью лишь до  $(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \frac{1}{10^m}$ , т. е. с точностью около 3 единиц последнего знака.

Однако при беспредельном увеличении числа знаков  $m$  мы получим беспредельное усиление точности, так что если нам известны бесконечные десятичные дроби для множителей, мы можем построить любое число цифр и для их произведения.

Действие деления положительных действительных чисел определяется как действие, обратное умножению, т. е. как действие, посредством которого по данному произведению и одному из сомножителей определяется второй сомножитель.

При представлении действительных чисел в виде длин отрезков отрезок, длина которого равна частному от деления длин двух данных отрезков, строится подобно произведению. Именно, на рис. 39 нужно считать отрезок  $ON$  данным, а отрезок  $OM$  искомым.

Приближения к частному получаются посредством деления приближения с недостатком к делимому на приближение с избытком к делителю и делением приближения с избытком к делимому на приближение с недостатком к делителю, так как

$$\frac{p_m}{q'_m} < \frac{x}{y} < \frac{p'_m}{q_m}.$$

Так же, как при умножении, разность  $\frac{p'_m}{q_m} - \frac{p_m}{q'_m}$  беспредельно уменьшается при безграничном возрастании числа десятичных знаков  $m$ .

Распространение умножения и деления на любые действительные числа, положительные и отрицательные, делается по обычным правилам:

абсолютная величина произведения или частного равна соответственно произведению или частному абсолютных величин. Произведение и частное двух чисел, имеющих одинаковые знаки, положительно. Произведение и частное двух чисел, имеющих противоположные знаки, отрицательно. Действие деления на нуль по-прежнему остается невозможным и в области всех действительных чисел.

## § 14. Возведение в степень и извлечение корня

*Степень* действительного числа  $a$  с натуральным показателем  $n$  есть произведение  $n$  сомножителей, равных  $a$ .

Возведение в степень становится особенно наглядным, если ввести в рассмотрение график зависимости  $y = x^n$  (рис. 41). Если представить себе, что этот график построен идеально точно, то задача возведения числа  $a$  в степень сводится к измерению ординаты точки на графике, абсцисса которой равна  $a$ .

Зная бесконечную десятичную дробь для числа  $a$ , мы можем найти его степень  $a^n$  с любой степенью точности. Для этого нужно возвысить в  $n$ -ю степень достаточно точное десятичное приближение (с недостатком или с избытком) к числу  $a$ .

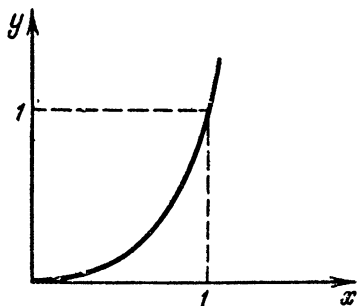


Рис. 41.

Для того чтобы это строго доказать, докажем предварительно следующие две теоремы.

**Теорема 1.** Если  $a$  и  $b$  два положительных действительных числа и  $a > b$ , то  $a^n > b^n$  при любом натуральном  $n$ .

Эта теорема для рациональных чисел  $a$  и  $b$  была доказана в § 3 (теорема 1). Доказательство дословно переносится и на случай произвольных действительных положительных чисел  $a$  и  $b$ , так как используемые в доказательстве леммы были установлены в § 13 при изучении действия умножения действительных чисел.

**Теорема 2.** Если  $a > 0$ ,  $h > 0$  и  $a > h$ , то  $a^m - (a - h)^m < ma^{m-1}h$  при любом натуральном  $m$ .

**Доказательство.** Для  $m = 2$  теорема верна, ибо

$$a^2 - (a - h)^2 = a^2 - (a^2 - 2ah + h^2) = 2ah - h^2 < 2ah.$$

Построим дальнейшее доказательство, воспользовавшись методом математической индукции.

Пусть теорема уже доказана для показателя  $m - 1$ , т. е. уже установлено что

$$a^{m-1} - (a - h)^{m-1} < (m - 1)a^{m-2}h.$$

В этом предположении докажем теорему для показателя  $m$ . С этой целью в разность  $a^m - (a - h)^m$  вставим выражение  $a^{m-1}(a - h)$  со знаками минус и

плюс. Получим

$$\begin{aligned} a^m - (a-h)^m &= a^m - a^{m-1}(a-h) + a^{m-1}(a-h) - (a-h)^m = \\ &= a^{m-1}[a - (a-h)] + (a-h)[a^{m-1} - (a-h)^{m-1}] = \\ &= a^{m-1}h + (a-h)[a^{m-1} - (a-h)^{m-1}]. \end{aligned}$$

Во втором слагаемом оба множителя положительны.

Далее,  $a-h < a$  и  $a^{m-1} - (a-h)^{m-1}$ , в силу «индукционного» предположения, меньше  $(m-1)a^{m-2}h$ . Следовательно,

$$(a-h)[a^{m-1} - (a-h)^{m-1}] < a(m-1)a^{m-2}h = (m-1)a^{m-1}h,$$

$$a^m - (a-h)^m < a^{m-1}h + (m-1)a^{m-1}h = ma^{m-1}h.$$

Теорема доказана пока условно: если теорема верна для показателя  $m-1$ , то она верна и для показателя  $m$ . Но для  $m=2$  она верна. Следовательно, она верна и для  $m=3$ , а раз она верна для  $m=3$ , то верна для  $m=4$  и т. д. Теорема верна для всех натуральных показателей  $m$ , что и требовалось доказать.

Далее поступаем так. Зная бесконечную десятичную дробь для числа  $a$ , составляем десятичные приближения  $p_m$  и  $p'_m$  для числа  $a$  с недостатком и с избытком с  $m$  цифрами после запятой. Тогда  $p_m \leq a < p'_m$ . В силу теоремы I будут верны и неравенства  $p_m^n \leq a^n < p'_m^n$ , т. е. мы смогли заключить  $a^n$  между двумя границами  $p_m^n$  и  $p'_m^n$ , которые можно вычислить. Можно доказать, что эти границы  $p_m^n$  и  $p'_m^n$  становятся все более тесными, если брать число цифр  $m$  все больше и больше. Таким образом, мы можем определить  $a^n$  с любой степенью точности.

Строгое доказательство того, что границы  $p_m^n$  и  $p'_m^n$  действительно неограниченно сближаются, основывается на теореме 2. Обозначим через  $A$  наименьшее целое число, большее  $a$ . Тогда при любом  $m$

$$p'_m \leq A.$$

Рассмотрим разность

$$p'^n_m - p^n_m = p'^n_m - \left(p'_m - \frac{1}{10^m}\right)^n.$$

В силу теоремы 2

$$p'^n_m - p^n_m < np'^{n-1}_m \cdot \frac{1}{10^m} \leq nA^{n-1} \cdot \frac{1}{10^m},$$

откуда следует, что разность  $p'^n_m - p^n_m$  действительно беспредельно уменьшается при увеличении числа цифр  $m$ .

Обратимся теперь к действию извлечения корня.

**Определение.** Корнем  $n$ -й степени из действительного числа  $b$  называется такое число  $x$ , что  $x^n = b$ .

Положительное значение корня  $n$ -й степени из положительного числа называется *арифметическим значением корня*.

Таким образом, определения степени, корня и арифметического значения корня для действительных чисел остаются совершенно такими же, как для рациональных чисел. Однако в области действительных чисел верна следующая теорема.



**Теорема 3.** *Арифметическое значение корня любой степени из любого положительного числа всегда существует.*

В области рациональных чисел такое утверждение было неверным — не существует, например, рационального значения  $\sqrt{2}$ . Смысл этой теоремы ясен: извлечь корень  $n$ -й степени из данного числа  $b$  — значит измерить абсциссу точки на графике зависимости  $y = x^n$ , ордината которой равна  $b$ , а существование такой точки геометрически очевидно.

Однако для того, чтобы это геометрически наглядное рассуждение сделать строгим, нужно было бы доказать, что при непрерывном возрастании числа  $x$  число  $y = x^n$  возрастает тоже непрерывно, т. е. проходит через все действительные числа. Это же в свою очередь равносильно доказательству теоремы о существовании корня.

Теорема о существовании корня более строго доказывается так:

Пусть дано число  $b > 0$  и показатель  $n$ . Найдем две соседние десятичные дроби  $p_m$  и  $p'_m$  с  $m$  цифрами после запятой такие, что

$$p_m^n \leq b < p'^n_m.$$

Такие дроби существуют в силу возрастания степени с возрастанием основания (теорема 1, § 14). Числа  $p_m$  и  $p'_m$  представляют собой «приближенные значения» для  $\sqrt[n]{b}$  с точностью до  $\frac{1}{10^m}$  с недостатком и с избытком.

Для того чтобы перейти от приближенных значений  $p_m$  и  $p'_m$  к следующим, мы должны разбить промежутки  $(p_m, p'_m)$  на 10 равных частей. Так как

$$p_m^n \leq b, \quad p'^n_m > b,$$

то найдутся такие соседние точки деления  $p_{m+1}$  и  $p'_{m+1}$ , что

$$p_{m+1}^n \leq b, \quad p'^n_{m+1} > b.$$

Эти точки и дают приближенные значения  $\sqrt[n]{b}$  с  $m+1$  цифрой после запятой.

Таким образом, отрезок  $(p_{m+1}, p'_{m+1})$  вложен в отрезок  $(p_m, p'_m)$ . Совокупность отрезков  $(p_1, p'_1), (p_2, p'_2), (p_3, p'_3), \dots$  есть стягивающаяся последовательность, ибо каждый последующий отрезок вложен в предыдущий, а их длины  $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \dots$  безгранично приближаются к нулю. Согласно аксиоме непрерывности, найдется одно и только одно число  $a$ , принадлежащее всем этим промежуткам, т. е. удовлетворяющее неравенствам

$$p_m \leq a < p'_m$$

при всех  $m$ .

Рассмотрим промежутки с концами  $p_m^n$  и  $p'^n_m$ . Они тоже образуют систему вложенных промежутков, и их длины беспредельно убывают с возрастанием  $m$ , что было установлено выше. Следовательно, существует одно и только одно число, принадлежащее всем этим промежуткам. Но перед нами имеются два таких числа — во-первых,  $b$ , ибо

$$p_m^n \leq b < p'^n_m;$$

во-вторых,  $a^n$ , ибо из  $p_m \leq a < p'_m$  следует

$$p_m^n \leq a^n < p'^n_m.$$

Следовательно,

$$a^n = b,$$

т. е.  $a$  есть арифметическое значение  $\sqrt[n]{b}$ .

**З а м е ч а н и е.** Определения основных действий — сложения, вычитания, умножения и деления — можно дать, не опираясь на геометрические представления, используя лишь свойство непрерывности совокупности действительных чисел. Рассмотрим, например, сложение. Пусть  $p_m, p'_m, q_m, q'_m$  — десятичные приближения с недостатком и с избытком к числам  $x$  и  $y$ . Тогда  $p_m + q_m$  и  $p'_m + q'_m$  при  $m = 1, 2, 3, \dots$  образуют концы вложенных промежутков, длины которых безгранично убывают при неограниченном возрастании  $m$ . В силу свойства непрерывности существует одно и только одно число  $z$ , лежащее во всех этих промежутках, т. е. удовлетворяющее неравенствам

$$p_m + q_m \leq z \leq p'_m + q'_m.$$

Его и следует, по определению, считать суммой чисел  $x$  и  $y$ .

Аналогичным образом можно дать чисто алгебраические определения для остальных действий.

## § 15. Извлечение корня из произведения, дроби и степени

Возвращаемся к свойствам корней любой степени из числа. В формулировках теорем мы будем предполагать, что все числа, участвующие в действии, положительны и значения корней имеются в виду арифметические (т. е. положительные). Без этих предположений некоторые из теорем могут оказаться неверными, что будет оговорено в специальных замечаниях.

При действиях над корнями постоянно приходится пользоваться тождеством

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

и, в частности,

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Эти тождества непосредственно следуют из определения корня. Действительно,  $\sqrt[n]{a}$  есть такое число, которое при возведении в  $n$ -ю степень дает  $a$ . Следовательно,  $(\sqrt[n]{a})^n = a$ .

Верно и следующее полезное тождество. Если  $a$  положительно, то

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

Действительно, по определению арифметического значения корня,  $\sqrt[n]{a^n}$  есть такое положительное число, которое, при возведении в степень с показателем  $n$ , дает  $a^n$ . Таким числом является  $a$ , и других положительных чисел, удовлетворяющих этому требованию, не существует в силу единственности арифметического значения корня из положительного числа. Следовательно,  $\sqrt[n]{a^n} = a$ .

Заметим сразу, что это утверждение неверно для четного показателя  $n$  и отрицательного  $a$ . Например,  $\sqrt[4]{(-2)^4} = 2$ , а не  $-2$ , и вообще  $\sqrt[n]{a^2} = |a|$ , но не всегда  $\sqrt[n]{a^2} = a$ .

**Теорема 1.** *Корень из произведения двух или нескольких положительных чисел равен произведению корней той же степени из сомножителей, т. е.*

$$\sqrt[n]{a \cdot b \dots k} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \dots \sqrt[n]{k}.$$

**Доказательство.** По свойству степени произведения,

$$(\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \dots \sqrt[n]{k})^n = (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n \dots (\sqrt[n]{k})^n = a \cdot b \dots k.$$

Итак,  $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \dots \sqrt[n]{k}$  при возведении в  $n$ -ю степень дает  $a \cdot b \dots k$ . Поэтому  $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \dots \sqrt[n]{k}$  есть одно из значений  $\sqrt[n]{ab \dots k}$ .

Далее,  $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \dots \sqrt[n]{k}$  есть число положительное, так как все  $a, b, \dots, k$  положительны и значения корней арифметические. Следовательно,  $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \dots \sqrt[n]{k}$  есть арифметическое значение корня  $n$ -й степени из числа  $ab \dots k$ , т. е.

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \dots \sqrt[n]{k} = \sqrt[n]{ab \dots k},$$

что и требовалось доказать.

**Замечание.** Без предположения положительности множителей теорема теряет смысл, если  $n$  есть четное число, и ее неправильное применение может привести к получению нелепых результатов. Например,

$$1 = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{(-1)(-1)} = \sqrt{-1} \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2$$

и, по определению корня,  $(\sqrt{-1})^2 = -1$ . Получили нелепость:  $1 = -1$ . Здесь все дело в том, что в ходе выкладки мы, неправильно применив теорему 1, ввели в рассмотрение выражение  $\sqrt{-1} \sqrt{-1}$ , не имеющее смысла в области действительных чисел.

Если же еще расширить понятие числа, введя так называемые *комплексные числа* (что будет сделано в гл. IX книги), то выражение  $\sqrt{-1}$  становится осмысленным, но в области комплексных чисел теорема 1 перестает быть верной в данной ее формулировке. Будет верна лишь следующая ослабленная формулировка:

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \dots \sqrt[n]{k} \text{ есть одно из значений } \sqrt[n]{a \cdot b \dots k}.$$

**Теорема 2.** *Корень из частного от деления двух положительных чисел равен частному от деления корней той же степени из делимого и делителя, т. е.*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Доказательство.  $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b}$  и, следовательно,  $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$  есть одно из значений  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ , именно арифметическое, так как числа  $a$  и  $b$  положительны и корни  $\sqrt[n]{a}$ ,  $\sqrt[n]{b}$  арифметические.

**Теорема 3.** *Значение корня из положительного числа не изменится, если подкоренное число возвысить в некоторую степень и одновременно умножить показатель корня на показатель той степени, в которую возведено подкоренное число, т. е.*

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}.$$

**Доказательство.** Согласно правилу возведения степени в степень

$$(\sqrt[n]{a})^{nk} = [(\sqrt[n]{a})^n]^k = a^k, \text{ ибо } (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

Следовательно,  $\sqrt[n]{a}$  есть одно из значений корня степени  $nk$  из числа  $a^k$ . Так как, по предположению,  $a$  положительно и  $\sqrt[n]{a}$ , как арифметическое значение корня, тоже положительно, то  $\sqrt[n]{a}$  есть арифметическое значение корня степени  $nk$  из числа  $a^k$ , т. е.

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k},$$

что и требовалось доказать.

**Замечание.** При отрицательном  $a$  теорема оказывается, вообще говоря, неверной. Например,  $\sqrt[3]{-2}$  есть отрицательное число, а  $\sqrt[6]{(-2)^3} = \sqrt[6]{4}$  есть число положительное. Следовательно,  $\sqrt[3]{-2}$  не равно  $\sqrt[6]{(-2)^3}$ .

## § 16. Умножение и деление корней

Теоремы 1—3 § 15 позволяют упрощать результаты действий умножения и деления над корнями из положительных чисел.

Рассмотрим вопрос об умножении корней. Если нужно перемножить корни из нескольких чисел с одинаковыми показателями, то, согласно теореме 1, достаточно умножить их подкоренные числа и написать произведение под знаком корня с тем же показателем. Действительно,

$$\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \dots \sqrt[n]{k} = \sqrt[n]{ab \dots k}.$$

Если же показатели перемножаемых радикалов различны, то нужно предварительно привести все радикалы к общему показателю. Это делается посредством умножения каждого показателя на подходящий дополнительный множитель одновременно с возведением в ту же сте-

пень подкоренного числа. За общий показатель следует принять общее кратное показателей перемножаемых радикалов. Например,

$$\sqrt[3]{2} \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{2^2} \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 5^2} = \sqrt[6]{200}.$$

Подобным же образом следует поступить при делении корней. Именно, если корни имеют одинаковый показатель, то при их делении следует разделить их подкоренные числа под знаком корня с тем же показателем, ибо

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Если же показатели корней делимого и делителя различны, то следует привести их предварительно к общему показателю. Например,

$$\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{4^2}}{\sqrt[6]{2^2}} = \sqrt[6]{\frac{4^2}{2^2}} = \sqrt[6]{2}.$$

Указанные преобразования часто оказываются полезными, так как они позволяют привести результат действия умножения и деления над несколькими корнями к такому виду, что действие извлечения корня приходится делать только один раз.

### Упражнения

Выполнить преобразования:

$$1. \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{3} \sqrt[5]{\frac{1}{6}}. \quad 2. \frac{\sqrt[8]{16}}{\sqrt[8]{8}}. \quad 3. \frac{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2}}.$$

## § 17. Возведение корня в степень и извлечение корня из корня

**Теорема 1.** Для возведения корня в степень достаточно возвысить в ту же степень подкоренное число, т. е.

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}.$$

**Доказательство.**  $(\sqrt[n]{a})^k = \underbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}_k$ , и следовательно-

но, по правилу умножения корней с одинаковым показателем,

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_k} = \sqrt[n]{a^k},$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что после возведения корня в степень, согласно теореме 1, иногда удастся «сократить» показатели степени и корня, воспользовавшись теоремой 3 § 13. Действительно, в силу этой теоремы,

$$n^k \sqrt[n^k]{a^{mk}} = n^k \sqrt{(a^m)^k} = n \sqrt[n]{a^m}.$$

Таким образом, если под знаком радикала находится степень некоторого положительного числа и показатель степени имеет с показателем корня общий множитель, то можно, не изменив значения корня, «сократить» на этот множитель, т. е. отбросить его как в показателе степени, так и в показателе корня.

Пример.  $(\sqrt[3]{3})^3 = \sqrt[3]{3^3} = \sqrt[3]{9}.$

Пример.  $(\sqrt[4]{2})^6 = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt[4]{2^{3 \cdot 2}} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt{8}.$

Во втором примере возможно «сокращение», так как  $6 = 3 \cdot 2$ ,  $4 = 2 \cdot 2$ , и следовательно,  $\sqrt[4]{2^6} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt{8}.$

**Теорема 2.** Для того чтобы извлечь корень из корня, достаточно перемножить их показатели, не меняя подкоренного числа, т. е.

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = n^k \sqrt[n]{a}.$$

**Доказательство.**  $(n^k \sqrt[n]{a})^k = n^k \sqrt[n^k]{a^k} = n \sqrt[n]{a^k}$ , согласно теореме 1 § 15 и теореме 3 § 13. Следовательно, по определению корня,

$$n^k \sqrt[n]{a} = \sqrt[k]{n^k \sqrt[n]{a}},$$

что и требовалось доказать.

Пример.  $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[2]{2}.$

**Замечание.** Установленные теоремы верны безоговорочно лишь в обычных предположениях, что речь идет об арифметических значениях корней из положительных чисел.

### Упражнения

Преобразовать выражения:

1.  $(\sqrt{2})^4$ . 2.  $(\sqrt[3]{5})^2$ . 3.  $\sqrt{\sqrt{25}}.$

### § 18. Вынесение рационального множителя из-под знака корня и введение его под знак корня

**Теорема.** Если  $a$  и  $b$  — положительные числа, то

$$a^n \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}.$$

**Доказательство.** Мы видели, что  $a = \sqrt[n]{a^n}$ . Следовательно,

$$a^n \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b},$$

что и требовалось доказать.

Формула  $a^n \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$  применяется двумя способами. Иногда она применяется в чтении «слева направо», т. е.  $a^n \sqrt[n]{b}$  заменяется на  $\sqrt[n]{a^n b}$ .

Пусть, например, нам нужно вычислить  $5\sqrt{2}$  с точностью до 0,01. Если мы вычислим  $\sqrt{2}$  с точностью до 0,01 и результат умножим на 5, то мы получим некоторое приближение значения для  $5\sqrt{2}$ , но его погрешность окажется в пять раз больше погрешности исходного приближения к  $\sqrt{2}$ . Целесообразнее ввести множитель 5 под знак корня, воспользовавшись доказанной теоремой. Получим

$$5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{50};$$

затем вычислим обычным способом  $\sqrt{50}$  с точностью до 0,01. Действительно, приближенное значение к  $\sqrt{2}$  с точностью до 0,01 есть 1,41 и  $5 \cdot 1,41 = 7,05$ , а  $\sqrt{50} \approx 7,07$ . Таким образом, введение множителя 5 под знак радикала уменьшает погрешность на 0,02.

При извлечении корня из произведения числа на корень тоже целесообразно вводить множитель под знак корня, например

$$\sqrt[3]{16\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2} \cdot 16^3} = \sqrt[3]{2 \cdot 2^8} = \sqrt[3]{2^9} = \sqrt[3]{2^3} = \sqrt[3]{8}.$$

Чаше бывает целесообразно применять ту же формулу, читая ее «справа налево», именно — выносить множитель из-под знака радикала, если он имеется в подкоренном выражении с показателем, равным показателю корня, например

$$\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}.$$

Однако при преобразовании корня этим способом нужно твердо помнить, что формула  $a^n \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$  выведена в предположении положительности чисел  $a$  и  $b$ . Мы не можем, например, записать безоговорочно, что  $\sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$ . Это равенство верно для  $a > 0$ , но для  $a < 0$  оно неверно. Преобразование выражения  $\sqrt{2a^2}$ , верное при всех действительных значениях  $a$ , есть  $\sqrt{2a^2} = |a| \cdot \sqrt{2}$ .

Поэтому при вынесении буквенного множителя из-под знака радикала с четным показателем необходимо записывать этот множитель под знаком абсолютной величины, если только заранее не делается оговорка о его положительности.

Вынесение множителя из-под знака корня удобно применять к извлечению корня из дроби.

При этом следует пользоваться формулой  $\sqrt[n]{\frac{b}{a^n}} = \frac{\sqrt[n]{b}}{a}$ , непосредственно вытекающей из теоремы 1 этого параграфа.

Действительно,

$$\sqrt[n]{\frac{b}{a^n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n b} = \frac{1}{a} \sqrt[n]{b} = \frac{\sqrt[n]{b}}{a}.$$

При преобразовании корня  $n$ -й степени из дроби посредством этой формулы нужно предварительно умножить числитель и знаменатель подкоренного выражения на такой дополнительный множитель, чтобы в результате умножения в знаменателе получилась полная  $n$ -я степень.

Пример.  $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$

Пример.  $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{\frac{6}{8}} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}.$

Пример.  $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \sqrt{\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)^2}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{|a+b|}.$

### Упражнения

Ввести множители под знак корня:

1.  $2\sqrt{3}.$  2.  $3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}.$  3.  $\frac{a-b}{a+b} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$

Преобразовать корни из дробных выражений:

4.  $\sqrt{\frac{5}{8}}.$  5.  $\sqrt[3]{\frac{7}{9}}.$  6.  $\sqrt{\frac{x}{yz}}.$

### § 19. Подобные радикалы и их сложение

Вообще говоря, сумма или разность двух различных корней не может быть приведена к более простому виду. Например, никакими преобразованиями нельзя упростить выражение  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ . Но в одном частном случае упрощающие преобразования возможны, именно, если слагаемые радикалы подобны.

*Подобными* называются такие радикалы, которые, во-первых, имеют одинаковую степень и, во-вторых, могут быть преобразованы к произведениям одного и того же радикала на рациональные числа или рациональные выражения. Например,  $\sqrt{8}$  и  $\sqrt{18}$  подобны, ибо

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}, \quad \sqrt{18} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}.$$

Два радикала  $n$ -й степени подобны в том и только в том случае, если отношение их подкоренных выражений есть  $n$ -я степень рационального числа или рационального выражения.

Для того чтобы сложить или вычесть подобные радикалы, нужно предварительно сделать такие вынесения множителей из-под знака корня, чтобы подкоренные выражения оказались равными, и после этого сделать вынесение радикала за скобку, например

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = (2+3)\sqrt{2} = 5\sqrt{2}.$$



Если же в алгебраической сумме, содержащей радикалы, не все радикалы подобны, то следует порознь объединить все подобные между собой радикалы.

### Упражнения

Упростить радикальные выражения:

1.  $\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}$  ( $a > 0, b > 0$ ).    2.  $\sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{3}$ .
3.  $(\sqrt{x} + \sqrt{a})^2 + (\sqrt{x^3} + \sqrt{a^3})^2$  ( $a > 0, x > 0$ ).
4.  $\sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{6} + \sqrt{150}$ .

## § 20. Исключение иррациональности в знаменателе

Дробное выражение, в знаменатель которого входят радикалы, может быть преобразовано к виду дроби, не содержащей радикалов в знаменателе. Такого рода преобразования называются исключением иррациональности в знаменателе.

Мы рассмотрим лишь некоторые частные случаи этого преобразования.

Случай 1. Знаменатель есть радикал, т. е. дробь имеет вид

$$\frac{A}{\sqrt[n]{b}}.$$

В этом случае нужно подобрать дополнительный множитель к подкоренному числу до полной  $n$ -й степени и затем умножить числитель и знаменатель дроби на корень  $n$ -й степени из этого дополнительного множителя.

Пример. Исключить иррациональность в знаменателе

$$\frac{5}{\sqrt[3]{4}}.$$

Решение. Умножим числитель и знаменатель на  $\sqrt[3]{2}$ . Получим

$$\frac{5}{\sqrt[3]{4}} = \frac{5\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{2}} = \frac{5\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5}{2}\sqrt[3]{2}.$$

Пример. Исключить иррациональность в знаменателе

$$\frac{16\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

Решение. Умножим числитель и знаменатель на  $\sqrt{2}$ . Получим

$$\frac{16\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{3}\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = 8\sqrt{6}.$$

Случай 2. Знаменатель есть сумма или разность рационального выражения и квадратного радикала, т. е. дробь имеет вид

$$\frac{c}{a + \sqrt{b}} \quad \text{или} \quad \frac{c}{a - \sqrt{b}}.$$

В этом случае целесообразно умножить числитель и знаменатель на выражение  $a - \sqrt{b}$  или соответственно на выражение  $a + \sqrt{b}$ . Получим

$$\frac{c}{a + \sqrt{b}} = \frac{c(a - \sqrt{b})}{(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b})} = \frac{c(a - \sqrt{b})}{a^2 - b}.$$

Таким же образом

$$\frac{c}{a - \sqrt{b}} = \frac{c(a + \sqrt{b})}{(a - \sqrt{b})(a + \sqrt{b})} = \frac{c(a + \sqrt{b})}{a^2 - b}.$$

Радикальные выражения вида  $a + \sqrt{b}$  и  $a - \sqrt{b}$  часто называют *сопряженными* радикальными выражениями. Таким образом, в рассматриваемом случае для исключения иррациональности в знаменателе нужно умножить числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное со знаменателем.

Пример.

$$\frac{5}{3 + \sqrt{2}} = \frac{5(3 - \sqrt{2})}{(3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})} = \frac{15 - 5\sqrt{2}}{9 - 2} = \frac{15 - 5\sqrt{2}}{7}.$$

Пример.

$$\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = \frac{(1 + \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})}{(1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3})} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} = -2 - \sqrt{3}.$$

Случай 3. Знаменатель есть сумма или разность двух квадратных корней, т. е. дробь имеет вид

$$\frac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad \text{или} \quad \frac{c}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}.$$

Здесь применяется тот же прием, что и в предыдущем случае.

Пример. Исключить иррациональность в знаменателе дроби

$$\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{6 - 2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Пример. Исключить иррациональность в знаменателе дроби

$$\frac{3}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}}.$$

Решение. Избавимся сначала от  $\sqrt{3}$  в знаменателе. С этой целью умножим числитель и знаменатель дроби на  $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

Получим

$$\begin{aligned}\frac{3}{1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}} &= \frac{3(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})} = \\ &= \frac{3(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{2})^2 - 3} = \frac{3(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3} = \\ &= \frac{3(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{2\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

Теперь умножим числитель и знаменатель на  $\sqrt{2}$ . Получим

$$\frac{3(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = \frac{3(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{3}{4}(\sqrt{2} + 2 + \sqrt{6}).$$

Пример. Исключить иррациональность в знаменателе дроби

$$\frac{7}{\sqrt[3]{2} - 1}.$$

Решение. Умножим числитель и знаменатель на «неполный квадрат суммы» чисел  $\sqrt[3]{2}$  и 1, т. е. на  $(\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2} + 1$ .

Получим

$$\begin{aligned}\frac{7}{\sqrt[3]{2} - 1} &= \frac{7[(\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2} + 1]}{(\sqrt[3]{2} - 1)[(\sqrt[3]{2})^2 + \sqrt[3]{2} + 1]} = \\ &= \frac{7(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1)}{(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3} = 7(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1).\end{aligned}$$

### Упражнения

Исключить иррациональность в знаменателе выражений:

1.  $\frac{a}{\sqrt[5]{a^5}}$ .
2.  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ .
3.  $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$ .
4.  $\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a} - \sqrt{x}}$ .
5.  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}}$ .

## ГЛАВА II

### КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ И УРАВНЕНИЯ, ПРИВОДЯЩИЕСЯ К КВАДРАТНЫМ

#### § 1. Целые алгебраические уравнения и их классификация

Уравнение с одним неизвестным называется *целым алгебраическим*, если обе его части являются целыми алгебраическими выражениями от неизвестного. Например, уравнения

$(x+1)(x+2)(x+3)=(x-1)(x-2)(x-3)$ ;  $x^3+\frac{1}{3}x=5$   
целые алгебраические.

Уравнения же

$$\frac{x+1}{x+2}=3-x; \quad x+\sqrt{x+1}=5$$

не являются целыми алгебраическими. Первое из них содержит в знаменателе выражение  $x+2$ , зависящее от неизвестного  $x$ . Такого рода уравнения называются *дробными алгебраическими*. Второе содержит выражение  $x+1$ , зависящее от неизвестного  $x$ , под знаком корня. Такие уравнения называются *иррациональными*.

Важнейшими из алгебраических уравнений являются целые алгебраические. Это обусловлено тем, что решение дробных и иррациональных уравнений может быть сведено к решению целых (с некоторыми приемами такого сведения мы познакомимся в § 16, 17 этой главы).

Обратимся теперь к классификации целых уравнений. Прежде всего напомним, что два уравнения называются *равносильными*, если каждое решение первого уравнения является решением второго и каждое решение второго уравнения является решением первого.

В первой части книги было установлено, что если к обеим частям уравнения добавить любой многочлен от неизвестного, то каждое решение исходного уравнения будет решением преобразованного, и обратно, каждое решение преобразованного уравнения будет решением исходного, так что преобразованное уравнение будет *равносильно* исходному.

В силу этого любое целое алгебраическое уравнение может быть преобразовано в равносильное, в одной части которого находится многочлен от неизвестного, не содержащий подобных членов, а в другой части нуль. Для этого достаточно «перенести все члены уравнения в одну часть», т. е. добавить к обеим частям уравнения выра-

жение, противоположное одной из его частей, а затем раскрыть скобки и привести подобные члены.

Например, уравнение

$$(x+1)(x+2)(x+3)=(x-1)(x-2)(x-3)$$

преобразуется в

$$(x+1)(x+2)(x+3)-(x-1)(x-2)(x-3)=0$$

и, после раскрытия скобок и приведения подобных членов, в

$$12x^2+12=0.$$

Степень многочлена, получающегося в одной части уравнения после указанных преобразований, называется степенью исходного уравнения.

Так, уравнение

$$(x+1)(x+2)(x+3)=(x-1)(x-2)(x-3)$$

есть уравнение второй степени, уравнение

$$x^3+\frac{1}{3}x=5,$$

равносильное уравнению

$$x^3+\frac{1}{3}x-5=0,$$

есть уравнение третьей степени и т. д.

### Упражнения

Преобразовать к простейшему виду уравнения и определить степень каждого из них:

1.  $(x+1)(x+2)=(x-3)(x-4).$
2.  $x^3=x(x-1)(x+2)+1.$
3.  $(x-1)(x+1)^2=x^2-3.$

## § 2. Неполные квадратные уравнения

Уравнение второй степени называется иначе *квадратным уравнением*. Любое квадратное уравнение, после перенесения всех его членов в одну часть и приведения подобных членов, приводится к виду

$$ax^2+bx+c=0,$$

где  $x$  — неизвестное,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — коэффициенты, причем  $a \neq 0$ .  $a$  называется старшим коэффициентом квадратного уравнения,  $b$  — средним коэффициентом,  $c$  — свободным членом.

Квадратное уравнение называется *неполным*, если хотя бы один из его коэффициентов равен нулю. Так как старший коэффициент равняться нулю не может, в неполном уравнении должен обращаться в нуль средний коэффициент или свободный член или оба вместе,

так что неполное квадратное уравнение может иметь один из следующих трех видов:

$$\text{I. } ax^2 = 0.$$

$$\text{II. } ax^2 + c = 0.$$

$$\text{III. } ax^2 + bx = 0.$$

Уравнение  $ax^2 = 0$ , очевидно, имеет единственное решение  $x = 0$ . Действительно, так как  $a \neq 0$ , то из  $ax^2 = 0$  следует, что  $x^2 = 0$ , и потому  $x = 0$ .

Уравнение  $ax^2 + c = 0$  равносильно уравнению

$$x^2 = -\frac{c}{a}.$$

Здесь могут представиться два случая (если исключить разобранный выше случай  $c = 0$ ). Если  $a$  и  $c$  имеют одинаковые знаки, то уравнение не имеет решений, ибо квадрат действительного числа не может равняться отрицательному числу  $-\frac{c}{a}$ . Если  $a$  и  $c$  имеют противоположные знаки, то  $-\frac{c}{a}$  положительно и уравнение  $x^2 = -\frac{c}{a}$ , а вместе с ним и исходное уравнение  $ax^2 + c = 0$  имеет два решения

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{и} \quad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Неполное квадратное уравнение последнего вида  $ax^2 + bx = 0$  решается посредством разложения левой части на множители. Именно, вынося  $x$  за скобку, получим

$$x(ax + b) = 0.$$

Для того чтобы произведение равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из множителей равнялся нулю. Приравняв к нулю первый множитель, получим одно решение  $x_1 = 0$ . Приравняв к нулю второй множитель  $ax + b$ , получим второе решение  $x_2 = -\frac{b}{a}$ .

Итак, мы рассмотрели все виды неполного квадратного уравнения. Формулируем результаты:

I.  $ax^2 = 0$ . Уравнение имеет единственное решение  $x = 0$ .

II.  $ax^2 + c = 0$ . Уравнение не имеет решений, если знаки  $a$  и  $c$  одинаковы. Если же знаки  $a$  и  $c$  противоположны, то уравнение имеет два решения:  $x_{1,2} = \pm \sqrt{+\frac{c}{a}}$ . Эти два решения сливаются в одно  $x = 0$ , если  $c = 0$ , т. е. если уравнение имеет вид I.

III.  $ax^2 + bx = 0$ . Уравнение имеет два решения:  $x_1 = 0$  и  $x_2 = -\frac{b}{a}$ . Они различны при  $b \neq 0$  и сливаются в одно при  $b = 0$ , т. е. если уравнение имеет вид I.

## § 3. Приведенное квадратное уравнение

Решение полного квадратного уравнения мы начнем со случая, когда старший коэффициент равен единице. В этом случае уравнение называется приведенным. Общее квадратное уравнение легко преобразуется в равносильное ему, приведенное посредством деления обеих частей уравнения на старший коэффициент.

Для решения приведенного уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

в общем виде применим прием выделения полного квадрата суммы, который применяется при разложении квадратного трехчлена на множители.

Рассмотрим  $x^2$  как квадрат первого слагаемого, равного  $x$ ,  $px$  — как удвоенное произведение первого слагаемого на второе. Очевидно, что за это второе слагаемое нужно взять  $\frac{p}{2}$ . Затем добавим квадрат второго слагаемого, т. е.  $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ , и сразу вычтем его, чтобы не изменить левую часть уравнения. Таким образом, исходное уравнение  $x^2 + px + q = 0$  преобразуется к виду

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0,$$

или

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0.$$

Это последнее уравнение равносильно исходному, так как его левая часть тождественно равна левой части исходного уравнения.

Далее, перенесем последние два члена в правую часть уравнения с противоположными знаками. Получим новое уравнение

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q,$$

равносильное предыдущему. Теперь могут представиться три случая.

Случай 1.  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ . Преобразованное уравнение, а следовательно и исходное, не может иметь решений, ибо квадрат действительного числа  $x + \frac{p}{2}$  не может равняться отрицательному числу  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ .

Случай 2.  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ . В этом случае преобразованное уравнение будет удовлетворяться только при  $x + \frac{p}{2} = 0$ , т. е. при

$x = -\frac{p}{2}$ . Таким образом, в этом случае уравнение имеет единственное решение.

Случай 3.  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$ . Преобразованное уравнение удовлетворяется, если

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

или

$$x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

т. е. если

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

или

$$x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Таким образом, в этом случае уравнение имеет два решения:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}; \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Оба эти решения удобно записать в виде одной формулы:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \quad (1)$$

Корень приведенного квадратного уравнения равен половине среднего коэффициента, взятого с противоположным знаком, плюс или минус квадратный корень из квадрата этой половины без свободного члена.

Итак, при решении приведенного квадратного уравнения могут представиться три случая:

Случай 1.  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$  — уравнение не имеет действительных решений.

Случай 2.  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$  — уравнение имеет единственное решение:  $x = -\frac{p}{2}$ .

Случай 3.  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$  — уравнение имеет два решения, вычисляемых по формуле

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Очевидно, что при решении квадратного уравнения нет необходимости заранее исследовать, который из трех случаев имеет место.



Можно сразу записать решение по формуле, и результат сам покажет, который из случаев имеет место.

Именно, если имеет место первый случай  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$ , формула приводит к невозможному действию — извлечению квадратного корня из отрицательного числа. Во втором случае  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$  оба корня, вычисленные по формуле, сливаются в один  $x = -\frac{p}{2}$ . В этом случае принято говорить, что уравнение имеет два одинаковых корня.

Формулу (1) для решения приведенного квадратного уравнения иногда удобно применять в несколько преобразованной форме следующим образом. Очевидно, что

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \sqrt{\frac{p^2 - 4q}{4}} = \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

и, следовательно, согласно формуле (1),

$$x = -\frac{p}{2} \pm \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

или

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}. \quad (2)$$

Формула (2) иногда оказывается удобнее формулы (1), например, если  $p$  и  $q$  целые числа и  $p$  нечетное число или если коэффициенты  $p$  и  $q$  являются буквенными выражениями. Если же  $p$  и  $q$  целые числа и  $p$  четное число, то формула (1) удобнее.

Запоминать формулу (2) нет необходимости, так как она непосредственно получается из формулы для решения общего квадратного уравнения, которая будет выведена в следующем параграфе.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример. Решить уравнение  $x^2 - 8x + 15 = 0$ .

Решение.  $x = 4 \pm \sqrt{4^2 - 15} = 4 \pm 1$ ;  $x_1 = 5$ ;  $x_2 = 3$ .

Пример. Решить уравнение  $x^2 - 8x + 16 = 0$ .

Решение.  $x = 4 \pm \sqrt{4^2 - 16} = 4$  (или, что то же самое,  $x_1 = 4$ ;  $x_2 = 4$ ).

Пример. Решить уравнение  $x^2 - 8x + 17 = 0$ .

Решение.  $x = 4 \pm \sqrt{4^2 - 17} = 4 \pm \sqrt{-1}$ . Уравнение не имеет действительных решений.

Пример. Решить уравнение  $2x^2 - 5x + 2 = 0$ .

Решение. Это уравнение не приведенное. Оно равносильно приведенному

$$x^2 - \frac{5}{2}x + 1 = 0,$$

которое получается из исходного посредством деления обеих его частей на 2. Решая это последнее уравнение, получим

$$x = \frac{5}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{5}{4} \pm \frac{3}{4}; \quad x_1 = 2; \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Замечание. Из вывода формулы для решения квадратного уравнения следует, что числа

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

если только они имеют смысл, действительно являются корнями квадратного уравнения  $x^2 + px + q = 0$ . Поэтому проверка корней посредством подстановки в уравнение может быть нужна только для контроля правильности вычислений.

### Упражнения

Решить уравнения:

1.  $x^2 - 4x - 45 = 0$ .
2.  $x^2 - 18x + 81 = 0$ .
3.  $x^2 - 10x + 27 = 0$ .
4.  $x^2 - x - 96 = (x-1)(x-2)(x-3)$ .
5.  $(x+1)^2 = 2x^2 - 7$ .

## § 4. Общее квадратное уравнение

Для решения общего квадратного уравнения достаточно его привести, т. е. преобразовать, к приведенному, разделив обе его части на старший коэффициент, и затем воспользоваться формулой для корней приведенного уравнения. Именно так был решен последний пример в предыдущем параграфе.

Однако целесообразно провести эти преобразования в общем виде и получить формулу, позволяющую решить общее квадратное уравнение без предварительного приведения.

Итак, пусть дано уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ . Поделив обе его части на  $a$ , мы получим равносильное приведенное уравнение

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \quad (1)$$

к которому можно применить результаты предыдущего параграфа. Положив  $p = \frac{b}{a}$ ,  $q = \frac{c}{a}$ , мы получим

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}. \quad (2)$$

Если уравнение  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$  имеет решение, т. е. если  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \geq 0$ , последнюю формулу можно еще несколько упростить.

Именно,

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = \\ &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Итак, в том случае, когда уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет решение, корни уравнения могут быть вычислены по формуле

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (3)$$

Так же, как в случае приведенного уравнения, при решении общего квадратного уравнения нет необходимости заранее проверять, существует решение или нет. Именно, уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  не имеет решения в том и только в том случае, если формула (3) приводит к невозможному действию извлечения корня из отрицательного числа.

Действительно, решение не существует в том и только в том случае, если

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$$

отрицательно. Но

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} = \frac{1}{4a^2} (b^2 - 4ac)$$

отличается только положительным множителем  $\frac{1}{4a^2}$  от выражения  $b^2 - 4ac$ , находящегося под знаком квадратного корня в формуле (3).

Выражение  $b^2 - 4ac$  называется *дискриминантом* уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Если дискриминант отрицателен, то, как мы видели, уравнение не имеет действительных корней. Из формулы (3) следует, что если дискриминант положителен, то уравнение имеет два различных действительных корня, если же дискриминант равен нулю, то оба корня сливаются в один:  $x = -\frac{b}{2a}$ .

Формула (3) читается так: *корень квадратного уравнения равен дроби, знаменателем которой является удвоенный старший коэффициент, а числителем — средний коэффициент, взятый с противоположным знаком, плюс или минус квадратный корень из дискриминанта.*

Если удобно принять  $b = 2k$  (например, если  $b$  есть целое четное число), формула (3) может быть еще немного упрощена. В этом случае уравнение имеет вид

$$ax^2 + 2kx + c = 0.$$

Согласно формуле (3),

$$\begin{aligned} x &= \frac{-2k + \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2 - ac)}}{2a} = \\ &= \frac{-2k \pm 2\sqrt{k^2 - ac}}{2a} = \frac{2(-k \pm \sqrt{k^2 - ac})}{2a} = \\ &= \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \end{aligned}$$

Итак, уравнение  $ax^2 + 2kx + c = 0$  решается по формуле

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \quad (4)$$

Пример. Решить уравнение

$$3x^2 + 4x - 7 = 0.$$

Решение.  $x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 21}}{3} = \frac{-2 \pm 5}{3}$ ;  $x_1 = \frac{-2 + 5}{3} = 1$ ;

$$x_2 = \frac{-2 - 5}{3} = -\frac{7}{3}.$$

Замечание 1. Введение иррациональных чисел не является последним этапом в расширении понятия числа. Дальше вводятся еще так называемые *комплексные числа*, после введения которых действие извлечения квадратного корня из отрицательного числа оказывается осуществимым. После введения комплексных чисел мы будем вправе считать, что и в случае отрицательного дискриминанта квадратное уравнение имеет корни, но эти корни не являются действительными числами.

Замечание 2. Формула (3) пригодна, конечно, и для решения неполных квадратных уравнений. Например, для уравнения  $ax^2 + bx = 0$  формула (3) дает

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2}}{2a} = \frac{-b \pm b}{2a},$$

т. е.  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = -\frac{b}{a}$  в соответствии с прежним результатом \*).

Замечание 3. Иногда нужно рассматривать уравнение первой степени как частный случай квадратного, в котором старший коэффициент равен нулю. Это целесообразно, например, если некоторая задача, поставленная в общем виде, приводит к квадратному уравнению, в котором, в зависимости от численных данных задачи, коэффициенты изменяются и, в частности, старший коэффициент может принимать значение, равное нулю.

\*) Строго говоря,  $\sqrt{b^2}$  не обязательно равен  $b$ , именно:  $\sqrt{b^2} = b$  при  $b > 0$ ,  $\sqrt{b^2} = -b$  при  $b < 0$ . Но оба значения  $\pm \sqrt{b^2}$  совпадают со значениями выражения  $\pm b$ , только знаки не обязаны находиться в соответствии:

Формула (3) при  $a=0$  дает бессмысленный результат, ибо ее знаменатель  $2a$  обращается в нуль. Однако формулу (3) можно преобразовать так, что она окажется пригодной и для этого случая. Мы проведем это преобразование, предположив сначала, что  $a \neq 0$  и  $c \neq 0$ .

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac})} = \\ &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{2a(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{2a(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac})} = \\ &= \frac{4ac}{2a(-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac})} = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}. \end{aligned}$$

Полученная формула

$$x = \frac{2c}{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}} \quad (5)$$

применима при  $a \neq 0$ ,  $c \neq 0$  наравне с формулой (3), но она, вообще говоря, менее удобна из-за большей сложности знаменателя.

При  $a=0$  формула (5) дает

$$x = \frac{2c}{-b \mp b}.$$

Если в этом результате взять верхний знак, получим

$$x = \frac{2c}{-2b} = -\frac{c}{b},$$

т. е. мы действительно получаем корень уравнения первой степени  $b x + c = 0$ . Нижний знак приводит к бессмысленному результату, так как знаменатель обращается в 0.

Формула (5) оказывается удобной при приближенном решении квадратного уравнения в случае, если старший коэффициент очень мал по сравнению с остальными коэффициентами.

### Упражнения

Решить уравнения:

- $5x^2 - 7x - 6 = 0$ .
- $5x^2 + 3x - 1 = 0$ .
- $(a+b)x^2 + (4a-2b)x + b - 5a = 0$ .
- $(x+1)(x+2)(x+3) = x^3 + 52$ .
- $0,001x^2 + 3x - 6 = 0$  (воспользоваться формулой (5)).

## § 5. Некоторые задачи, приводящиеся к квадратным уравнениям

Квадратные уравнения, так же как уравнения первой степени, оказываются полезными при решении многих задач. Заметим, что если задача приводится к решению квадратного уравнения, обычные приемы и правила арифметики оказываются бессильными для решения такой задачи, в то время как задачи, приводящиеся к уравнениям первой степени, по большей части могут быть решены и средствами арифметики.

При решении задачи, сводящейся к квадратному уравнению, необходимо, после того как уравнение составлено и решено, производить

проверку полученных корней по смыслу задачи. При этом часто оказывается, что из двух полученных корней отвечает смыслу задачи лишь один.

**Задача.** Дети поехали на лодке и поднялись на веслах на 6 км от пристани против течения реки. Затем они ловили рыбу, останавливаясь в разных местах. Через 3 часа они оказались в 2 км ниже первой остановки и, окончив ловлю, пошли на веслах обратно к пристани. Всего они пробыли на лодке 5 часов. Какова скорость лодки в стоячей воде, если известно, что скорость течения реки равна 2 км/час.

**Решение.** Обозначим скорость лодки в стоячей воде (в км/час) через  $x$ . Тогда скорость лодки при движении против течения реки равна  $x - 2$  км/час, при движении по течению равна  $x + 2$  км/час.

Дети гребли против течения реки 6 км, на это они затратили  $\frac{6}{x-2}$  часа, затем 3 часа ловили рыбу и затем гребли 4 км по течению реки, на что затратили  $\frac{4}{x+2}$  часа. Итак,

$$\frac{6}{x-2} + 3 + \frac{4}{x+2} = 5. \quad (1)$$

Уравнение составлено. Умножим обе его части на общий знаменатель  $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$ . (При этом уравнение может приобрести лишние корни.) Получим

$$6(x+2) + 3(x^2-4) + 4(x-2) = 5(x^2-4).$$

После очевидных преобразований мы получим

$$x^2 - 5x - 6 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 6; \quad x_2 = -1.$$

Оба корня удовлетворяют уравнению (1), что легко проверяется подстановкой их в это уравнение. Однако по смыслу задачи подходит только первый корень  $x_1 = 6$ .

*Ответ.* 6 км/час.

**Задача.** Периметр прямоугольника равен 20 см. Площадь этого прямоугольника равна 25 см<sup>2</sup>. Определить стороны прямоугольника.

**Решение.** Обозначим длину основания прямоугольника через  $x$  см. Тогда высота прямоугольника равна  $10 - x$  см, ибо сумма длин основания и высоты равна полупериметру. Следовательно, площадь прямоугольника равна

$$x(10 - x) \text{ см}^2.$$

По условию задачи

$$x(10 - x) = 25,$$

отсюда

$$x^2 - 10x + 25 = 0; \quad x = 5 \pm \sqrt{25 - 25} = 5.$$

Уравнение имеет единственный корень  $x = 5$ , и он подходит по смыслу задачи.

*Ответ.* 5 см.

**Задача.** Сторона квадрата  $ABCD$  равна 10 см. От его вершин в направлении обхода по часовой стрелке (рис. 42) отложены равные отрезки  $Aa$ ,  $Bb$ ,  $Cc$ ,  $Dd$ , и точки  $a, b, c, d$  соединены прямыми. Площадь квадрата  $abcd$  равна 40 см. Определить длину отрезка  $Aa$ .

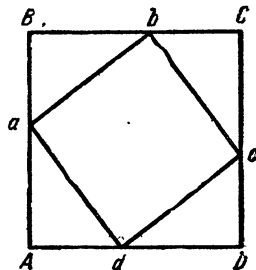


Рис. 42.

**Решение.** Обозначим длину отрезка  $Aa$  через  $x$  см. Тогда длина каждого из отрезков  $aB$ ,  $bC$ ,  $cD$ ,  $dA$  равна  $10 - x$  см. Треугольники  $aBb$ ,  $cDd$ , будучи приложены по гипотенузам, составляют прямоугольник со сторонами  $x$  и  $10 - x$  см и, следовательно, сумма их площадей равна  $x(10 - x)$  см<sup>2</sup>.

Точно так же сумма площадей треугольников  $aAd$  и  $bCc$  равна  $x(10 - x)$  см<sup>2</sup>. Но

$$\text{пл. } ABCD = \text{пл. } abcd + \text{пл. } aBb + \text{пл. } cDd + \text{пл. } aAd + \text{пл. } bCc.$$

Следовательно,

$$100 = 40 + 2x(10 - x),$$

откуда

$$x^2 - 10x + 30 = 0.$$

Это уравнение действительных решений не имеет. Следовательно, и задача не имеет решения.

*Ответ.* Задача не имеет решения.

Проведем теперь исследование последней задачи, выяснив, как следует изменить условие задачи, чтобы подобная задача имела решение. При этом будет вскрыта причина, в силу которой данная задача не имеет решения. С этой целью поставим задачу в общем виде, заменив все численные данные буквами. Итак, пусть сторона квадрата  $ABCD$  равна  $l$  см и площадь квадрата  $abcd$  равна  $s$  см<sup>2</sup>.

Рассуждая таким же образом, как при численных данных, мы получим для  $x = Aa$  уравнение

$$l^2 = s + 2x(l - x)$$

или

$$2x^2 - 2lx + l^2 - s = 0.$$

Решая по формуле (4), получим

$$x = \frac{l \pm \sqrt{l^2 - 2(l^2 - s)}}{2} = \frac{l \pm \sqrt{2s - l^2}}{2}.$$

Для того чтобы уравнение, к которому свелось решение задачи, имело действительные решения, необходимо и достаточно, чтобы число  $2s - l^2$  было положительным или нулем, т. е. чтобы  $s \geq \frac{l^2}{2}$ . В задаче, которую мы рассматривали, это условие выполнено не было.

Однако даже если уравнение имеет решение, задача может решений не иметь, если корни не подходят по смыслу задачи. В нашей задаче корень  $x$  будет подходить по смыслу задачи в том и только в том случае, если  $0 < x < l$ , так как точка  $a$  должна находиться между точками  $A$  и  $B$ .

Очевидно, если корень

$$x_1 = \frac{l + \sqrt{2s - l^2}}{2}$$

удовлетворяет поставленному требованию, то ему удовлетворяет и второй корень

$$x_2 = \frac{l - \sqrt{2s - l^2}}{2},$$

так как  $x_1 + x_2 = l$ . Геометрический смысл этого обстоятельства ясен: если отрезок  $x_1 = Aa$  заменить отрезком  $aB = AB - Aa = l - x_1 = x_2$ , получится равный вписанный квадрат.

Таким образом, для выяснения условия существования решения задачи остается установить, когда  $0 < x_1 < l$ . Очевидно,  $x_1$  всегда положительно.

Для выполнения неравенства  $x_1 < l$  необходимо и достаточно выполнение неравенства  $\sqrt{2s - l^2} < l$ , которое в свою очередь вытекает из неравенства  $2s - l^2 < l^2$  или  $s < l^2$ .

Итак, задача имеет решение в том и только в том случае, если  $s \geq \frac{l^2}{2}$  и  $s < l^2$ , т. е. если данная площадь не меньше половины площади квадрата  $ABCD$  и меньше всей площади этого квадрата.

## § 6. Связь между коэффициентами и корнями квадратного уравнения

Рассмотрим сначала приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0.$$

Его корни  $x_1, x_2$  выражаются через коэффициенты  $p$  и  $q$  посредством выведенной выше формулы

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Но во многих приложениях квадратных уравнений часто возникает необходимость выразить коэффициенты квадратного уравнения через



его корни. Соответствующие выражения проще всего вывести, сложив и перемножив корни. Сделаем это:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &= -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -p, \\x_1 x_2 &= \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = \\&= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q.\end{aligned}$$

Отсюда следует

$$p = -(x_1 + x_2),$$

$$q = x_1 x_2.$$

Итак, средний коэффициент приведенного квадратного уравнения равен сумме его корней, взятой с обратным знаком. Свободный член приведенного квадратного уравнения равен произведению его корней.

Выведенные формулы называются *формулами Виета* \*).

Теперь легко вывести соотношение между коэффициентами и корнями для общего квадратного уравнения. Общее квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  равносильно приведенному

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

В силу формул Виета имеем

$$\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2),$$

$$\frac{c}{a} = x_1 x_2.$$

Итак, средний коэффициент общего квадратного уравнения равен произведению старшего коэффициента на сумму корней, взятую с обратным знаком; свободный член общего квадратного уравнения равен произведению старшего коэффициента на произведение корней.

### Упражнения

Проверить справедливость формул Виета для следующих уравнений:

$$1. x^2 - 8x + 15 = 0. \quad 2. 2x^2 - 5x + 2 = 0. \quad 3. x^2 - 3x - 7 = 0.$$

## § 7. Разложение квадратного трехчлена на множители

*Квадратным трехчленом* называется многочлен вида

$$ax^2 + bx + c$$

с данными коэффициентами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , причем  $a \neq 0$ . Коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  называются соответственно *старшим коэффициентом*, *средним*

\*) Виет — французский математик. Родился в 1540 г., умер в 1603 г.

коэффициентом и свободным членом квадратного трехчлена. Квадратный трехчлен называется *приведенным*, если его старший коэффициент равен единице. *Корнями* квадратного трехчлена называются те значения буквы  $x$ , при которых трехчлен обращается в нуль. Иными словами, корнями трехчлена  $ax^2 + bx + c$  называются корни уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Пусть  $x_1, x_2$  являются корнями приведенного квадратного трехчлена  $x^2 + px + q$ . Тогда, в силу формул Виета,

$$p = -(x_1 + x_2); \quad q = x_1 x_2$$

и, следовательно,

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2.$$

Теперь не представляет труда разложить трехчлен на множители. Действительно,

$$\begin{aligned} x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 &= x^2 - x x_1 - x x_2 + x_1 x_2 = \\ &= x(x - x_1) - x_2(x - x_1) = (x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Итак,

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2),$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — корни трехчлена  $x^2 + px + q$ .

**Замечание.** Эта формула применима, конечно, только в случае, если трехчлен  $x^2 + px + q$  имеет действительные корни. Если же действительных корней нет, трехчлен  $x^2 + px + q$  не может быть разложен на множители первой степени. В самом деле, если допустить, что

$$x^2 + px + q = (\alpha x + \beta)(\gamma x + \delta),$$

то числа

$$x_1 = -\frac{\beta}{\alpha}; \quad x_2 = -\frac{\delta}{\gamma},$$

которые при подстановке вместо  $x$  обращают в нуль множители правой части, являлись бы корнями трехчлена  $x^2 + px + q$ . Но это противоречит условию, что квадратный трехчлен действительных корней не имеет.

Для общего квадратного трехчлена имеем:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 x_2 = \\ &= a[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2] = a(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Итак,

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где  $x_1, x_2$  — корни трехчлена  $ax^2 + bx + c$ .

## Упражнения

Разложить на множители трехчлены:

$$1. x^2 + 8x - 9. \quad 2. 3x^2 - 10x + 3. \quad 3. x^2 + 2x - 5.$$

## § 8. Составление квадратного уравнения по данным корням

Пусть даны два числа  $x_1, x_2$ , различные или равные. Требуется построить приведенное квадратное уравнение, имеющее своими корнями  $x_1$  и  $x_2$ .

Очевидно, что в качестве такого уравнения можно взять

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

или, после раскрытия скобок,

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0.$$

Действительно, если вместо  $x$  подставить  $x_1$  или  $x_2$ , левая часть уравнения обратится в нуль, ибо один из сомножителей окажется равным нулю.

Из формулы Виета следует, что составленное уравнение является единственным решением поставленной задачи. Действительно, если уравнение  $x^2 + px + q = 0$  имеет корни  $x_1$  и  $x_2$ , то его коэффициенты  $p$  и  $q$  выражаются через  $x_1$  и  $x_2$  по формулам

$$p = -(x_1 + x_2), \quad q = x_1x_2,$$

т. е. оно совпадает с составленным выше.

Итак, существует единственное приведенное квадратное уравнение, имеющее своими корнями данные числа  $x_1$  и  $x_2$ . Коэффициенты этого уравнения выражаются через  $x_1$  и  $x_2$  по формулам Виета.

## Упражнения

Составить приведенные квадратные уравнения по данным корням:

$$1. x_1 = 3; \quad x_2 = -1. \quad 3. x_1 = 3; \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

$$2. x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}; \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$$

## § 9. Примеры и приложения

Рассмотрим несколько примеров на применение результатов § 6—8.

**Пример.** Составить приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются квадраты корней уравнения

$$x^2 - 7x + 5 = 0.$$

Мы дадим два решения этого примера.

Первое решение. Уравнение  $x^2 - 7x + 5 = 0$  имеет корни  $x_1 = \frac{7 + \sqrt{29}}{2}$  и  $x_2 = \frac{7 - \sqrt{29}}{2}$ . Их квадраты  $x_1^2 = \frac{39 + 7\sqrt{29}}{2}$  и  $x_2^2 = \frac{39 - 7\sqrt{29}}{2}$ . Согласно формулам Виета искомое уравнение имеет коэффициенты

$$p = -(x_1^2 + x_2^2) = -39,$$

$$q = x_1^2 x_2^2 = \frac{39^2 - 7^2 \cdot 29}{4} = 25.$$

Второе решение. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни данного уравнения. Тогда искомое уравнение имеет коэффициенты  $p = -(x_1^2 + x_2^2)$  и  $q = x_1^2 x_2^2$ . Преобразуем их так, чтобы их было легко выразить непосредственно через коэффициенты данного уравнения, минуя вычисление  $x_1$  и  $x_2$ . Именно,

$$\begin{aligned} p &= -(x_1^2 + x_2^2) = -(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2) = \\ &= -(x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2. \end{aligned}$$

$$q = x_1^2 x_2^2 = (x_1x_2)^2.$$

Но

$$x_1 + x_2 = 7; \quad x_1x_2 = 5.$$

Следовательно,

$$p = -49 + 10 = -39; \quad q = 5^2 = 25.$$

Мы пришли к тому же ответу, но при значительно меньших вычислениях.

$$\text{Ответ. } x^2 - 39x + 25 = 0.$$

Пример. Решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 12, \\ xy &= 35. \end{aligned} \right\}$$

Решение. Составим вспомогательное квадратное уравнение, корнями которого являются  $x$  и  $y$ . Так как сумма и произведение чисел  $x$  и  $y$  нам известны, это уравнение составляется по формулам Виета, именно, оно есть

$$z^2 - 12z + 35 = 0.$$

Решая его, получим  $z_1 = 7$ ;  $z_2 = 5$ . Один из его корней мы должны принять за  $x$ , другой за  $y$ . Так как это можно сделать двумя способами, мы получим два решения системы

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 7, \\ y_1 &= 5 \end{aligned} \right\} \quad \text{и} \quad \left. \begin{aligned} x_2 &= 5, \\ y_2 &= 7. \end{aligned} \right\}$$

$$\text{Ответ. } x_1 = 7, y_1 = 5; \quad x_2 = 5, y_2 = 7.$$

Рассмотренный в последнем примере прием применяется к любой системе уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} x+y &= a, \\ xy &= b. \end{aligned} \right\}$$

**Пример.** Решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} x-y &= 7, \\ xy &= 44. \end{aligned} \right\}$$

**Решение.** Составим вспомогательное квадратное уравнение, корнями которого являются  $x$  и  $-y$ . Так как сумма этих двух чисел равна 7, а произведение  $x(-y)$  равно  $-xy = -44$ , вспомогательное уравнение есть

$$z^2 - 7z - 44 = 0.$$

Решив его, получим  $z_1 = 11$ ;  $z_2 = -4$ . Один из этих корней мы должны принять за  $x$ , другой за  $-y$ . Сделав это двумя возможными способами, получим два решения системы

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 11, \\ y_1 &= 4, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} x_2 &= -4, \\ y_2 &= -11. \end{aligned} \right\}$$

*Ответ.*  $x_1 = 11$ ,  $y_1 = 4$ ;  $x_2 = -4$ ,  $y_2 = -11$ .

Рассмотренный в последнем примере прием может быть применен к любой системе уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} x-y &= a, \\ xy &= b. \end{aligned} \right\}$$

В случае, если вспомогательное уравнение при решении системы

$$\left. \begin{aligned} x \pm y &= a, \\ xy &= b \end{aligned} \right\}$$

не имеет действительных корней, то и сама система действительных решений не имеет.

### Упражнения

1. Составить приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются  $x_1^2$  и  $x_2^2$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 - 9x - 11 = 0$ .

2. Составить приведенное квадратное уравнение, корнями которого являются  $3x_1 - x_2$  и  $3x_2 - x_1$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 + 11x - 9 = 0$ . Решить системы

$$\begin{array}{lll} 3. \left. \begin{aligned} x+y &= 4, \\ xy &= -77. \end{aligned} \right\} & 4. \left. \begin{aligned} x-y &= -1, \\ xy &= 8. \end{aligned} \right\} & 5. \left. \begin{aligned} x+2y &= 11, \\ xy &= 15. \end{aligned} \right\} \end{array}$$

### § 10. Исследование корней квадратного уравнения по коэффициенту и дискриминанту

При выводе формулы для решения квадратного уравнения мы выяснили, что значение дискриминанта  $D = b^2 - 4ac$  уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  определяет число корней уравнения. Именно, если дискриминант положителен, то уравнение имеет два различных действительных корня, если дискриминант равен нулю, то корни совпадают, и, наконец, если дискриминант отрицателен, то уравнение не имеет действительных корней.

Формулы Виета дают дополнительные сведения о корнях квадратного уравнения. Мы ограничимся рассмотрением приведенного квадратного уравнения.

Начнем исследование с рассмотрения уравнения, свободный член которого  $q$  отрицателен. В этом случае дискриминант  $p^2 - 4q = p^2 + 4(-q)$  наверное положителен, так что уравнение имеет два различных действительных корня  $x_1$  и  $x_2$ . Далее, произведение корней равно отрицательному числу  $q$ . Следовательно, один из корней положителен, другой отрицателен. Наконец,  $x_1 + x_2 = -p$ . Отсюда следует, что при  $p > 0$  сумма корней отрицательна, и следовательно, отрицательный корень имеет большую абсолютную величину. Если  $p < 0$ , то большую абсолютную величину имеет положительный корень. Если же  $p = 0$ , то корни равны по абсолютной величине.

Теперь предположим, что свободный член  $q$  положителен. В этом случае прежде всего необходимо посмотреть на дискриминант, он может быть положительным, равным нулю или отрицательным. В последнем случае исследование закончено, так как уравнение не имеет действительных корней. В первых двух случаях уравнение имеет действительные корни  $x_1$  и  $x_2$  — различные или равные. Так как их произведение равно положительному числу  $q$ , знаки корней одинаковые и сумма корней  $x_1 + x_2 = -p$  имеет тот же знак. Поэтому при  $p > 0$  оба корня отрицательны, при  $p < 0$  оба корня положительны. Случай  $p = 0$  здесь невозможен, так как при  $p = 0$ ;  $q > 0$  дискриминант  $D = p^2 - 4q = -4q < 0$ .

Результаты проведенного исследования можно объединить в следующую таблицу, в которую мы включаем для полноты и очевидные результаты при  $q = 0$ .

Случай 1.  $q < 0$ . Два различных корня, имеющих противоположные знаки.

а)  $p > 0$ . Отрицательный корень по абсолютной величине больше положительного.

б)  $p = 0$ . Корни равны по абсолютной величине.

с)  $p < 0$ . Положительный корень больше абсолютной величины отрицательного.

Случай 2.  $q = 0$ .

а)  $p > 0$ . Один корень равен нулю, другой отрицателен.

б)  $p = 0$ . Оба корня равны нулю.

с)  $p < 0$ . Один корень равен нулю, другой положителен.

С л у ч а й 3.  $q > 0$ .

а)  $p^2 - 4q > 0$ . Два различных корня одного знака, противоположного знаку  $p$ .

б)  $p^2 - 4q = 0$ . Два равных корня, их знак противоположен знаку  $p$ .

с)  $p^2 - 4q < 0$ . Действительных корней нет.

### Упражнения

Не решая уравнений, выяснить, сколько они имеют положительных и сколько отрицательных корней:

1.  $x^2 - 373x - 111 = 0$ . 2.  $3x^2 - 11x + 435 = 0$ . 3.  $x^2 + 100x + 2500 = 0$ .

4. Исследовать при различных значениях числа  $a$  корни квадратного уравнения  $x^2 - 2(a-3)x + a^2 - 7a + 6 = 0$ .

## § 11. Биквадратные уравнения

Уравнение вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

называется *биквадратным* уравнением. Решение биквадратного уравнения легко сводится к решению квадратного уравнения с последующим извлечением квадратного корня.

Для этого достаточно принять за новую неизвестную  $y = x^2$ . Ввиду того, что

$$x^4 = (x^2)^2 = y^2,$$

биквадратное уравнение относительно  $x$  является квадратным относительно  $y$ . Решив это квадратное уравнение, мы получим, вообще говоря, два значения для  $y$ . Извлекая из этих значений квадратные корни (со знаками  $+$  и  $-$ ), если это возможно, мы получим искомые корни биквадратного уравнения.

Пр и м е р. Решить уравнение

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0.$$

Решение. Положим  $x^2 = y$ . Тогда  $x^4 = y^2$ , и уравнение преобразуется в следующее:

$$y^2 - 13y + 36 = 0.$$

Решая его, получим

$$y = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2}; \quad y_1 = 9; \quad y_2 = 4.$$

Итак, для  $x^2$  имеются две возможности:

$$x^2 = 9, \quad \text{тогда} \quad x = \pm 3;$$

$$x^2 = 4, \quad \text{тогда} \quad x = \pm 2.$$

Таким образом, данное биквадратное уравнение имеет четыре корня:

$$x_1 = 3; \quad x_2 = -3; \quad x_3 = 2; \quad x_4 = -2.$$

Решение примера можно оформить по-другому, не вводя новой буквы. Именно, записать данное уравнение в виде

$$(x^2)^2 - 13x^2 + 36 = 0,$$

откуда

$$x^2 = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2},$$

т. е.

$$x^2 = 9 \quad \text{или} \quad x^2 = 4.$$

Отсюда

$$x = \pm 3 \quad \text{или} \quad x = \pm 2.$$

*Ответ.*  $\pm 3, \pm 2$ .

Для биквадратного уравнения число действительных корней вдвое больше числа положительных корней вспомогательного квадратного уравнения  $ay^2 + by + c = 0$ .

### Упражнения

Решить уравнения:

1.  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ .
3.  $x^4 + 6x^2 - 40 = 0$ .
5.  $x^4 + x^2 + 1 = 0$ .
2.  $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ .
4.  $x^4 + 3x^2 + 2 = 0$ .

### § 12. Некоторые уравнения, сводящиеся к квадратным посредством введения нового неизвестного

Способ упрощения уравнения посредством введения нового неизвестного применим не только к биквадратным уравнениям. Решение весьма многих уравнений может быть упрощено при помощи этого приема. Однако невозможно дать какие-либо исчерпывающие общие указания относительно того, когда этот прием может быть применен с успехом. Поэтому мы ограничимся лишь рассмотрением нескольких примеров.

**Пример.** Решить уравнение

$$x + \sqrt{x} - 12 = 0.$$

**Решение.** Это уравнение принадлежит к числу иррациональных уравнений, так как в нем неизвестное  $x$  входит под знаком квадратного корня. Посредством введения нового неизвестного оно легко сводится к квадратному уравнению.

Действительно, положим  $\sqrt{x} = y$ . Тогда  $x = y^2$  и, следовательно, уравнение преобразуется к виду

$$y^2 + y - 12 = 0,$$

откуда

$$y_1 = 3; \quad y_2 = -4.$$



Итак,  $\sqrt{x} = 3$ , откуда  $x = 9$ , или  $\sqrt{x} = -4$ . Последнее равенство невозможно, ибо под  $\sqrt{x}$  мы должны понимать арифметическое значение квадратного корня, которое не может быть отрицательным.  
*Ответ.*  $x = 9$ .

**Пример.** Решить уравнение

$$(x^2 + 4x)^2 - 2(x^2 + 4x) - 15 = 0.$$

**Решение.** Данное уравнение есть уравнение четвертой степени — после раскрытия скобок и приведения подобных членов в левой части окажется многочлен четвертой степени относительно неизвестного  $x$ . Решение уравнений четвертой степени в общем виде весьма сложно. Однако решение данного выше уравнения не представляет никакого труда.

Введем новое неизвестное:  $y = x^2 + 4x$ . Относительно этого нового неизвестного уравнение будет уже квадратным

$$y^2 - 2y - 15 = 0.$$

Решая его получим

$$y_1 = -3; \quad y_2 = 5.$$

Таким образом,

$$x^2 + 4x = -3 \quad \text{или} \quad x^2 + 4x = 5.$$

В первом случае имеем

$$x^2 + 4x + 3 = 0,$$

откуда

$$x_1 = -3; \quad x_2 = -1.$$

Во втором случае получаем

$$x^2 + 4x - 5 = 0,$$

откуда

$$x_3 = 1; \quad x_4 = -5.$$

Итак, данное уравнение имеет четыре решения:

$$x_1 = -3; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = -5.$$

$$\text{Ответ. } x_1 = -3; \quad x_2 = -1; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = -5.$$

Подстановка  $x^2 + 4x = y$  в последнем примере подсказывалась самым видом уравнения. Аналогичная подстановка применима к любому уравнению вида

35977

$$(x^2 + mx)^2 + p(x^2 + mx) + q = 0.$$

Некоторые уравнения четвертой степени можно привести к такому виду посредством несложного преобразования левой части.

**Пример.** Решить уравнение

$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = 0.$$

**Решение.** Это уравнение легко приводится к виду, подобному разобранному в предыдущем примере. Действительно, преобразуем левую часть уравнения, выделив из третьего члена такое слагаемое, которое вместе с первыми двумя образует квадрат суммы. За такое слагаемое нужно взять  $x^2$ . Получим

$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x^2 - 5x - 6 = \\ = (x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x) - 6.$$

Уравнение приводится к виду

$$(x^2 + x)^2 - 5(x^2 + x) - 6 = 0.$$

Положив  $x^2 + x = y$ , получим

$$y^2 - 5y - 6 = 0; \quad y_1 = 6; \quad y_2 = -1.$$

Следовательно,

$$x^2 + x = 6 \quad \text{или} \quad x^2 + x = -1.$$

Первое из этих уравнений дает  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -3$ . Второе не имеет действительных корней.

*Ответ.*  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -3$ .

Указанный в этом параграфе прием можно применить, конечно, не к любому уравнению четвертой степени. Но в каждом частном случае легко проверяется, возможно ли применение этого приема или нет.

### Упражнения

Решить уравнения:

1.  $\sqrt{x+3} + x = 3.$

3.  $x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x - 12 = 0.$

2.  $(x^2 - x)^2 - 4(x^2 - x) - 12 = 0.$

4.  $(x+1)^4 + (x+3)^4 = 706.$

## § 13. Возвратные уравнения

Уравнение четвертой степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

называется *возвратным*, если отношение свободного члена к старшему коэффициенту равно квадрату отношения коэффициентов при  $x$  и при  $x^3$ , т. е.

$$\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2.$$

Возвратные уравнения легко решаются посредством специального введения нового неизвестного. Покажем это на примере.

**Пример.** Решить уравнение

$$x^4 + 2x^3 - 18x^2 - 10x + 25 = 0.$$

**Решение.** Это уравнение возвратное, так как здесь

$$\frac{e}{a} = 25; \quad \frac{d}{b} = -5,$$

и следовательно,

$$\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2.$$

Прием заключается в следующем. Объединим первое слагаемое с последним, второе с предпоследним и поделим обе части уравнения на  $x^3$ . Получим

$$x^3 + \frac{25}{x^3} + 2\left(x - \frac{5}{x}\right) - 18 = 0.$$

Введем новое неизвестное  $y = x - \frac{5}{x}$ . Тогда

$$y^2 = x^2 - 10 + \frac{25}{x^2}$$

и, следовательно,

$$x^3 + \frac{25}{x^3} = y^2 + 10.$$

Принимая это во внимание получим следующее уравнение относительно  $y$ :

$$y^2 + 10 + 2y - 18 = 0 \quad \text{или} \quad y^2 + 2y - 8 = 0.$$

Решив его, получим  $y_1 = 2$ ;  $y_2 = -4$ .

Возвращаясь к неизвестному  $x$ , мы получим относительно него два уравнения:

$$x - \frac{5}{x} = 2; \quad x - \frac{5}{x} = -4.$$

Умножив обе части уравнений на  $x$ , получим квадратные уравнения

$$x^2 - 2x - 5 = 0; \quad x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Решив их, получим  $x_1 = 1 + \sqrt{6}$ ;  $x_2 = 1 - \sqrt{6}$ ;  $x_3 = 1$ ;  $x_4 = -5$ .

$$\text{Ответ. } x_1 = 1 + \sqrt{6}; \quad x_2 = 1 - \sqrt{6}; \quad x_3 = 1; \quad x_4 = -5.$$

Указанный в приведенном примере прием применим к любому возвратному уравнению.

Действительно, пусть уравнение

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

возвратное, т. е.

$$\frac{e}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2.$$

Обозначим отношение  $\frac{d}{b}$  через  $m$ . Тогда,  $d = bm$ ;  $e = am^2$ . Принимая это во внимание и поделив обе части уравнения на  $x^2$ , приведем уравнение к виду

$$a\left(x^2 + \frac{m^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{m}{x}\right) + e = 0.$$

Теперь ясно, что подстановка  $x + \frac{m}{x} = y$  приведет к цели, ибо

$$x^2 + \frac{m^2}{x^2} = \left(x + \frac{m}{x}\right)^2 - 2m = y^2 - 2m.$$

Частным случаем возвратных уравнений являются так называемые *симметрические* уравнения  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ . Для них после преобразования к виду

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

применяют подстановку  $x + \frac{1}{x} = y$ . Тогда  $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$  и уравнение приводится к квадратному относительно  $y$ .

## Упражнения

Решить уравнения:

1.  $x^4 - 10x^2 + 26x^2 - 10x + 1 = 0$ .
4.  $6x^4 - 25x^3 + 62x^2 - 25x + 6 = 0$ .
2.  $x^4 - 6x^3 + 6x^2 + 6x + 1 = 0$ .
5.  $4x^4 + 6x^3 - 22x^2 - 9x + 9 = 0$ .
3.  $x^4 + 2x^3 - 34x^2 + 14x + 49 = 0$ .

## § 14. Второй способ решения биквадратного уравнения

При решении биквадратного уравнения  $x^4 + px^2 + q = 0$  в случае, если  $q > 0$ , можно применить тот же прием, что и при решении возвратного уравнения. Именно, поделив обе части уравнения на  $x^2$ , получим

$$x^2 + \frac{q}{x^2} + p = 0.$$

Это последнее уравнение после подстановки  $x + \frac{\sqrt{q}}{x} = y$  приводится к квадратному.

Описанный прием особенно удобен в том случае, когда  $q$  является квадратом рационального числа.

Пример. Решить уравнение

$$x^4 - 8x^2 + 4 = 0.$$

Решение. Разделив обе части уравнения на  $x^2$ , получим

$$x^2 + \frac{4}{x^2} - 8 = 0.$$

Положим  $x + \frac{2}{x} = y$ . Тогда

$$x^2 + \frac{4}{x^2} + 4 = y^2.$$

Отсюда

$$x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4.$$

Для  $y$  получаем уравнение

$$y^2 - 4 - 8 = 0; \quad y = \pm \sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}.$$

Теперь для  $x$  получаем два уравнения:

$$x + \frac{2}{x} = 2\sqrt{3}, \quad x + \frac{2}{x} = -2\sqrt{3}.$$

После умножения на  $x$  получим

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 2\sqrt{3}x + 2 = 0,$$

откуда

$$x_{1,2} = \sqrt{3} \pm 1; \quad x_{3,4} = -\sqrt{3} \pm 1.$$

Интересно отметить, что, решая обычным образом, мы получим решение в совершенно другой, более сложной форме:

$$x^2 = 4 \pm \sqrt{16-4} = 4 \pm 2\sqrt{3}; \quad x = \pm \sqrt{4 \pm 2\sqrt{3}}.$$

Но на самом деле оба ответа, конечно, совпадают.

Действительно,

$$(\sqrt{3} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{3} + 1 = 4 + 2\sqrt{3},$$

и, следовательно,

$$\sqrt{3} + 1 = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}};$$

точно таким же образом легко убедимся, что

$$\sqrt{3} - 1 = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}; \quad -\sqrt{3} + 1 = -\sqrt{4 - 2\sqrt{3}};$$

$$-\sqrt{3} - 1 = -\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ответ. } x_1 = \sqrt{3} + 1; \quad x_2 = \sqrt{3} - 1; \quad x_3 = -\sqrt{3} + 1; \\ x_4 = -\sqrt{3} - 1.$$

Совпадение в приведенном примере результатов двух способов решения биквадратного уравнения наводит на мысль о возможности упрощения в некоторых случаях иррациональных выражений вида  $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ , где  $a$  и  $b$  рациональные числа.

Действительно, пусть  $x = \sqrt{a + \sqrt{b}}$ . Тогда  $x^2 = a + \sqrt{b}$  и, следовательно,

$$x^2 - a = \sqrt{b}; \quad (x^2 - a)^2 = b.$$

Раскрывая скобки и перенося все члены в одну часть, получим биквадратное уравнение

$$x^4 - 2ax^2 + a^2 - b = 0.$$

Решив его по второму способу, получим для  $x$  новое выражение, которое будет проще исходного, если  $a^2 - b$  есть полный квадрат. Правда, после решения биквадратного уравнения необходимо установить, к которому из корней биквадратного уравнения следует приравнять интересующее нас число  $\sqrt{a + \sqrt{b}}$ . Но этот выбор всегда легко сделать в каждом частном случае.

**Пример.** Упростить выражение  $\sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{7 - \sqrt{24}}$ .

**Решение.** Здесь  $7^2 - 24 = 25 = 5^2$ , так что указанный прием дает возможность упростить выражение. Положим  $x = \sqrt{7 - \sqrt{24}}$ . Тогда

$$x^2 = 7 - \sqrt{24}; \quad x^2 - 7 = -\sqrt{24}; \quad x^4 - 14x^2 + 49 = 24;$$

$$x^4 - 14x^2 + 25 = 0; \quad x^2 + \frac{25}{x^2} - 14 = 0.$$

Пусть  $x + \frac{5}{x} = y$ . Тогда

$$x^2 + \frac{25}{x^2} = y^2 - 10$$

и, следовательно,

$$y^2 - 24 = 0; \quad y = \pm \sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}.$$

Далее, так как  $x$  положительно, то  $y = x + \frac{5}{x}$  тоже положительно, и следовательно,  $y = +2\sqrt{6}$ .

Для  $x$  получаем такое уравнение:

$$x^2 + 5 = 2\sqrt{6}x; \quad x^2 - 2\sqrt{6}x + 5 = 0; \quad x = \sqrt{6} \pm 1.$$

Из этих двух значений искомым является  $\sqrt{6} - 1$ , ибо  $\sqrt{6} + 1$  при возведении в квадрат дает  $7 + 2\sqrt{6}$ .

$$\text{Ответ. } \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{6} - 1.$$

### Упражнения

1. Решить уравнение  $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$  двумя способами и сравнить результаты.

Упростить выражения:

$$2. \sqrt{5 + \sqrt{21}}. \quad 3. \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}.$$

## § 15. Преобразование уравнений

Как было сказано выше, два уравнения называются *равносильными*, если каждое решение первого уравнения является решением второго и каждое решение второго является решением первого. В первой части книги были выяснены два типа преобразований, переводящих данное уравнение в равносильное:

1. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число или один и тот же многочлен относительно неизвестного, то полученное в результате этого новое уравнение равносильно исходному.

2. Если обе части уравнения умножить или разделить на какое-нибудь число, отличное от нуля, то полученное в результате этого уравнение равносильно исходному (ч. I, гл. VII, § 1).

Однако во многих случаях при решении уравнений приходится производить такие преобразования, после которых полученное уравнение не равносильно исходному, но является только его следствием. Дадим точное определение этого понятия в применении к уравнениям.

**Определение.** Если все решения уравнения  $A=B$  являются также решениями уравнения  $C=D$ , то второе уравнение называется *следствием* первого.

Смысл этого термина легко понять. Пусть  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  — данные алгебраические выражения от неизвестного  $x$ . Допустим, что уравнение  $C=D$  есть следствие уравнения  $A=B$ . Это значит, что всякое значение буквы  $x$ , при котором удовлетворяется уравнение  $A=B$ , удовлетворяет и уравнению  $C=D$ . Иными словами, если  $A=B$  (т. е.  $x$  таково, что численные значения выражений  $A$  и  $B$  равны), то  $C=D$ . Таким образом, здесь слово «следствие» употребляется в том же смысле, что и в повседневной жизни.

Очевидно, что равносильность двух уравнений означает, что каждое из них является следствием другого. Понятия равносильности и следствия без всякого изменения переносятся на уравнения и системы уравнений с несколькими неизвестными.

Рассмотрим несколько примеров, разъясняющих смысл введенных определений.

Уравнение  $x^2 - 4x + 3 = 0$  есть следствие уравнения  $x - 2 = 1$ . Действительно, единственным решением второго уравнения является  $x = 3$ , и это решение является вместе с тем решением первого уравнения. То же самое можно обосновать следующим рассуждением: «Если  $x - 2 = 1$ , то  $x = 3$  и, следовательно,  $x^2 - 4x + 3 = 0$ ».

Часто можно убедиться в том, что одно уравнение является следствием другого, не решая последнее. В том же примере это можно сделать, например, таким рассуждением: «Если  $x - 2 = 1$ , то  $(x - 2)^2 = 1$ , т. е.  $x^2 - 4x + 4 = 1$ , следовательно,  $x^2 - 4x + 3 = 0$ ».

Теперь сформулируем и докажем несколько теорем, обосновывающих некоторые преобразования данного уравнения в новое, являющееся следствием данного (или равносильного данному). Для полноты изложения поместим и две сформулированные выше теоремы из первой части книги.

**Теорема 1.** *Если к обеим частям уравнения добавить одно и то же число или один и тот же многочлен, то получится уравнение, равносильное исходному.*

**Доказательство.** Пусть данное уравнение есть  $A = B$ , где  $A$  и  $B$  — алгебраические выражения от  $x$ , и пусть  $C$  есть число или многочлен, зависящий от  $x$ .

Если  $x_0$  есть решение данного уравнения, т. е. такое число, при подстановке которого вместо буквы  $x$  выражение  $A$  становится действительно равным  $B$ , то при том же значении  $x_0$   $A + C = B + C$ .

Обратно, если  $x_0$  такое, что при подстановке его вместо  $x$   $A + C = B + C$ , то при том же значении  $x_0$   $A = B$ .

Итак, каждое решение уравнения  $A = B$  оказывается решением уравнения  $A + C = B + C$  и, обратно, каждое решение уравнения  $A + C = B + C$  есть решение уравнения  $A = B$ . Уравнения  $A = B$  и  $A + C = B + C$  действительно равносильны.

Короче, все рассуждения можно провести так. Если (при некотором значении  $x$ )  $A = B$ , то (при том же значении  $x$ )  $A + C = B + C$ . Обратно, если (при некотором значении  $x$ )  $A + C = B + C$ , то (при том же значении  $x$ )  $A = B$ .

**Замечание.** В этой теореме существенно, что  $C$  есть число или многочлен. Если  $C$  есть дробное выражение, то теорема может оказаться неверной — может случиться, что решение уравнения  $A = B$  при подстановке в уравнение  $A + C = B + C$  дает бессмысленное равенство, если знаменатель  $C$  обращается в нуль. Например, уравнения

$$x + 2 = 4$$

и

$$x + 2 + \frac{1}{x-2} = 4 + \frac{1}{x-2}$$

не равносильны: первое из них имеет корень  $x = 2$ , второе — корней не имеет.

**Теорема 2.** Если обе части уравнения умножить на одно и то же число, отличное от нуля, то в результате этого преобразования получится уравнение, равносильное исходному.

**Доказательство.** Пусть  $A=B$  есть данное уравнение, а  $c \neq 0$  — данное число. Тогда если (при каком-нибудь значении  $x$ )  $A=B$ , то (при том же значении  $x$ )  $Ac=Bc$ . Обратно, если (при каком-нибудь значении  $x$ )  $Ac=Bc$ , то (при том же значении  $x$ )  $A=B$ . Таким образом, каждое решение уравнения  $A=B$  является решением уравнения  $Ac=Bc$ , и обратно, следовательно, уравнения  $A=B$  и  $Ac=Bc$  равносильны.

**Теорема 3.** Если обе части уравнения умножить на один и тот же многочлен, то в результате этого преобразования получится уравнение, являющееся следствием исходного.

**Доказательство.** Пусть  $A=B$  — данное уравнение,  $C$  — данный многочлен от неизвестного  $x$ . Тогда, если (при каком-либо значении  $x$ )  $A=B$ , то (при том же значении  $x$ )  $AC=BC$ . Таким образом, каждое решение уравнения  $A=B$  является решением уравнения  $AC=BC$ .

Следовательно, уравнение  $AC=BC$  есть следствие уравнения  $A=B$ , что и требовалось доказать.

**Замечание 1.** Уравнение  $AC=BC$  есть следствие уравнения  $A=B$ , но оно не обязано быть ему равносильным. Действительно, из  $AC=BC$  следует  $A=B$ , только если  $C \neq 0$ . Поэтому, решение уравнения  $AC=BC$  может не быть решением уравнения  $A=B$ , если оно является решением уравнения  $C=0$ .

Например, умножая обе части уравнения  $x-3=0$  на многочлен  $x-2$ , мы получим новое уравнение  $(x-3)(x-2)=0$ , которое, кроме корня исходного уравнения  $x=3$ , имеет еще корень  $x=2$ .

**Замечание 2.** В формулировке теоремы существенно, что  $C$  является многочленом. Если  $C$  есть дробное выражение, содержащее неизвестное в знаменателе, то преобразованное уравнение может не быть следствием исходного, если хотя бы один из корней исходного уравнения обращает в нуль знаменатель  $C$ . Например, умножив обе части уравнения

$$x-2=0$$

на выражение  $\frac{x-3}{x-2}$ , мы получим новое уравнение

$$x-3=0,$$

не являющееся следствием исходного.

**Теорема 4.** Если обе части исходного уравнения возвести в степень с одним и тем же показателем, то полученное в результате этого преобразования уравнение будет следствием исходного.

**Доказательство.** Пусть  $A=B$  — данное уравнение. Тогда если  $A=B$  (при некотором значении неизвестного  $x$ ), то  $A^n=B^n$



(при том же значении неизвестного  $x$ ). Таким образом, каждое решение уравнения  $A=B$  является решением уравнения  $A^n=B^n$ .

Следовательно, уравнение  $A^n=B^n$  есть следствие уравнения  $A=B$ .

**З а м е ч а н и е.** Так же, как в теореме 3, здесь нельзя утверждать равносильность. Действительно, если  $A^2=B^2$ , то  $A=B$  или  $A=-B$ , так что корнями уравнения  $A^2=B^2$  могут быть как корни уравнения  $A=B$ , так и корни уравнения  $A=-B$ . Например, возводя в квадрат обе части уравнения

$$x-2=1,$$

корень которого  $x=3$ , мы получим уравнение

$$(x-2)^2=1,$$

корнями которого будут  $x_1=3$  и  $x_2=1$ .

Допустим теперь, что мы имеем два уравнения, причем известно, что второе уравнение является следствием первого, и допустим, что это второе уравнение мы умеем решать, т. е. можем найти все его корни. Тогда мы можем решить и исходное уравнение, так как среди корней второго уравнения находятся все корни исходного. Но не все корни второго уравнения обязаны быть корнями исходного, среди корней второго уравнения могут встретиться числа, не являющиеся корнями исходного уравнения. Поэтому, для того чтобы решить исходное уравнение, мы должны корни второго уравнения испытать посредством подстановки их в исходное уравнение и отобрать из них те корни, которые удовлетворяют исходному уравнению.

## § 16. Дробные алгебраические уравнения

Дробные уравнения, т. е. такие, в одной или обеих частях которых находятся дробные рациональные выражения, содержащие неизвестное в знаменателе, решаются посредством сведения к целым уравнениям.

Для достижения этой цели можно, например, перенести все слагаемые правой части в левую с противоположными знаками, затем посредством обычных тождественных преобразований привести левую часть к виду частного от деления двух многочленов. После этих преобразований мы получаем новое уравнение, являющееся лишь следствием исходного, но не обязательно равносильное ему.

Действительно, всякое решение исходного уравнения, очевидно, является решением преобразованного. Обратно, всякий корень преобразованного уравнения является корнем исходного, если только обе части исходного уравнения имеют смысл при подстановке этого корня. Однако может случиться так, что обе части исходного уравнения лишены смысла при некотором значении неизвестного, а левая часть преобразованного уравнения имеет смысл и обращается в нуль. Тогда такое значение неизвестного является корнем преобразованного уравнения, но не является корнем исходного. Таким образом, преобразованное уравнение действительно является следствием исходного, но не обязательно ему равносильно, так как может иметь лишние

корни. Указанное обстоятельство может иметь место, если по ходу преобразований происходит взаимное уничтожение дробных выражений или производится сокращение дробей.

Например, производя в уравнений

$$x + 1 + \frac{1}{x-2} = 3 + \frac{1}{x-2} \quad (1)$$

указанные преобразования, мы получим уравнение

$$x + 1 + \frac{1}{x-2} - 3 - \frac{1}{x-2} = 0 \quad (2)$$

и, далее,

$$x - 2 = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3), очевидно, есть следствие уравнения (1). Проверим это обычным рассуждением.

Если ( $x$  такое, что)

$$x + 1 + \frac{1}{x-2} = 3 + \frac{1}{x-2},$$

то

$$x + 1 + \frac{1}{x-2} - 3 - \frac{1}{x-2} = 0$$

и, следовательно,

$$x - 2 = 0.$$

Но уравнение (1) не является следствием уравнения (3), так как уравнение (3) имеет корень  $x = 2$ , а как раз при  $x = 2$  обе части уравнения (1) не имеют смысла.

Для того чтобы еще более уяснить это обстоятельство, посмотрим, почему нельзя рассуждать следующим образом: «Если  $x - 2 = 0$ , то  $x + 1 = 3$ ; если  $x + 1 = 3$ , то  $x + 1 + \frac{1}{x-2} = 3 + \frac{1}{x-2}$ ». Первая половина рассуждения верна безусловно — мы добавляем к обеим частям число 3. Вторая половина рассуждения была бы верна, если бы  $x$  был не равен 2. Но у нас как раз  $x = 2$ , и рассуждение теряет силу.

Таким образом, мы наметили путь, следуя которому, мы можем преобразовать любое дробное уравнение к уравнению вида  $\frac{A}{B} = 0$ , где  $A$  и  $B$  — многочлены, причем преобразованное уравнение является следствием исходного.

Умножив обе части последнего уравнения на  $B$ , мы получим новое уравнение  $A = 0$ , которое, согласно теореме § 3 § 15, является следствием предыдущего, а потому и следствием исходного уравнения. Корень уравнения  $A = 0$  может не быть корнем уравнения  $\frac{A}{B} = 0$  только тогда, когда при его подстановке знаменатель  $B$  обращается в нуль.

Итак, любое дробное уравнение может быть преобразовано в целое уравнение, являющееся следствием исходного. Для этого достаточно перенести все слагаемые правой части в левую, затем посредством известных тождественных преобразований представить левую часть в виде частного от деления двух многочленов и, наконец, умно-

жить обе части уравнения на знаменатель полученной дроби. (Это все равно, что приравнять числитель к нулю.) Если преобразованное уравнение удастся решить, то среди его корней находятся все корни исходного уравнения, но могут быть и лишние корни. Их следует отбросить после испытания посредством подстановки в исходное уравнение.

Указанный путь не является единственным при решении дробных уравнений. Часто можно достигнуть цели быстрее, умножив обе части уравнения на многочлен, являющийся общим знаменателем всех дробей, находящихся в левой и правой частях исходного уравнения. Полученное таким образом целое уравнение является следствием исходного дробного, но не обязательно равносильно ему. Рассмотрим несколько примеров.

*Пример.* Решить уравнение

$$\frac{1}{x+2} + \frac{4x}{x^2-4} = 1 + \frac{2}{x-2}.$$

*Решение.*

*Способ 1.* Перенесем все слагаемые правой части в левую. Получим

$$\frac{1}{x+2} + \frac{4x}{x^2-4} - 1 - \frac{2}{x-2} = 0.$$

Выполняя сложение дробей, мы пока не будем приводить целую часть (т. е.  $-1$ ) к общему знаменателю для упрощения выкладки. Получим

$$-1 + \frac{3x-6}{x^2-4} = 0.$$

Сократив дробь на  $x-2$ , что дает  $-1 + \frac{3}{x+2} = 0$ , и выполнив сложение с целой частью, получим  $\frac{-x+1}{x+2} = 0$ , откуда, приравняв числитель к нулю, получим  $-x+1=0$ ;  $x=1$ .

Подставив это значение в исходное уравнение, убеждаемся, что  $x=1$  есть действительно его решение. Таким образом, в данном случае выполненные преобразования не внесли лишних корней.

Указанную выкладку целесообразно сопровождать следующим рассуждением. Если

$$\frac{1}{x+2} + \frac{4x}{x^2-4} = 1 + \frac{2}{x-2},$$

то

$$\frac{1}{x+2} + \frac{4x}{x^2-4} - 1 - \frac{2}{x-2} = 0,$$

откуда

$$-1 + \frac{3x-6}{x^2-4} = 0; \quad \frac{-x+1}{x+2} = 0.$$

Следовательно,

$$-x+1=0; \quad x=1.$$

Итак, если  $x$  удовлетворяет уравнению, то  $x=1$ . Действительно  $x=1$  удовлетворяет уравнению, ибо

$$\frac{1}{1+2} + \frac{4 \cdot 1}{1-4} = 1 + \frac{2}{1-2}.$$

Способ 2. Общим знаменателем всех слагаемых уравнения является  $x^2 - 4$ . Умножив на него обе части уравнения, получим

$$x - 2 + 4x = x^2 - 4 + 2x + 4$$

и после очевидных преобразований

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

откуда

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 1.$$

Первый корень преобразованного уравнения не является корнем исходного, ибо обе его части теряют смысл при  $x=2$ . Второй корень удовлетворяет уравнению.

Приведенную выкладку можно обосновать так. Если

$$\frac{1}{x+2} + \frac{4x}{x^2-4} = 1 + \frac{2}{x-2},$$

то

$$x - 2 + 4x = x^2 - 4 + 2x + 4,$$

т. е.  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , откуда  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 1$ .

Итак, если  $x$  удовлетворяет данному уравнению, то  $x=2$  или  $x=1$ . Но в действительности из этих двух значений корнем данного уравнения является только  $x=1$ , ибо при  $x=2$  обе части данного уравнения не имеют смысла.

Ответ.  $x=1$ .

В приведенном примере сокращение дроби, оказавшееся возможным при решении по первому способу, избавило нас в данном случае от «лишнего» корня  $x=2$ . Однако бывает и так, что, хотя уравнение решается первым способом и сокращение дроби осуществляется до конца, «лишние» корни все же возникают. Это видно из следующего примера.

Пример. Решить уравнение

$$\frac{1}{x+2} + \frac{5x-2}{x^2-4} = 1 + \frac{2}{x-2}.$$

Решение. Если  $\frac{1}{x+2} + \frac{5x-2}{x^2-4} = 1 + \frac{2}{x-2}$ ,

то

$$\frac{1}{x+2} + \frac{5x-2}{x^2-4} - 1 - \frac{2}{x-2} = 0,$$

и после преобразований  $\frac{4x-8}{x^2-4} - 1 = 0$ , откуда получаем, сокращая на  $x-2$ , что  $\frac{4}{x+2} - 1 = 0$  и, следовательно,  $4 - x - 2 = 0$ ;  $x = 2$ .

Итак, если  $x$  удовлетворяет данному уравнению, то  $x = 2$ . Но в действительности  $x = 2$  не удовлетворяет данному уравнению, ибо обе части его теряют смысл при  $x = 2$ . Следовательно, данное уравнение решений не имеет.

*Ответ.* Уравнение не имеет решений.

### Упражнения

Решить уравнения:

$$1. \frac{x+3}{x-2} + \frac{x-2}{x+3} = \frac{10}{3}. \quad 2. \frac{x-1}{x} = \frac{x^2-1}{x} - x.$$

$$3. \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{3}{x+1} + \frac{5}{x+3}.$$

$$4. \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} = \frac{4}{x+1} + \frac{2}{x+3}.$$

## § 17. Иррациональные уравнения

Всякое *иррациональное* уравнение, т. е. уравнение, в котором некоторые выражения, зависящие от неизвестного, находятся под знаком корня, может быть преобразовано в целое алгебраическое уравнение, являющееся следствием исходного.

Доказательство этого утверждения в общем виде сложно, и мы ограничимся рассмотрением некоторых частных случаев.

*Пример.* Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+3x}+1=3x.$$

*Решение.* В рассматриваемое уравнение входит только один радикал. Преобразуем уравнение, оставив радикал в одной его части, а все остальные члены перенесем в другую часть. Получим

$$\sqrt{x^2+3x}=3x-1.$$

Теперь возведем обе части уравнения в квадрат, что приведет нас к новому уравнению, являющемуся следствием исходного. Это обусловлено теоремой 4 § 15 или обычным рассуждением при преобразовании уравнения:

«Если ( $x$  такое, что)  $\sqrt{x^2+3x}=3x-1$ , то

$$x^2+3x=(3x-1)^2.$$

Решая преобразованное уравнение, получим  $x_1=1$ ;  $x_2=\frac{1}{8}$ . Эти корни не обязаны быть корнями исходного уравнения, так как из выполнения равенства  $x^2+3x=(3x-1)^2$  еще не следует, что

$\sqrt{x^2+3x}=3x-1$ . Может быть одно из двух: или  $\sqrt{x^2+3x}=3x-1$ , или  $-\sqrt{x^2+3x}=3x-1$ , и следовательно, удовлетворяется либо исходное уравнение, либо уравнение  $-\sqrt{x^2+3x}=3x-1$ . И, в самом деле, корень  $x_1=1$  удовлетворяет исходному уравнению, а корень  $x=\frac{1}{8}$  исходному уравнению не удовлетворяет, но удовлетворяет уравнению  $-\sqrt{x^2+3x}+1=3x$ .

Указанный прием применяется во всех случаях, когда в уравнение входит только один радикал.

*Ответ.*  $x=1$ .

**Пример.** Решить уравнение

$$x - \sqrt[3]{x^3 - 4x - 7} = 1.$$

**Решение.** Уединив радикал, получим  $\sqrt[3]{x^3 - 4x - 7} = x - 1$ , откуда следует  $x^3 - 4x - 7 = (x - 1)^3$ . Раскрывая скобки и перенося все члены в одну часть, получим  $3x^2 - 7x - 6 = 0$ , откуда  $x_1=3$ ;  $x_2=-\frac{2}{3}$ . Проверая, убеждаемся, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

*Ответ.*  $x_1=3$ ;  $x_2=-\frac{2}{3}$ .

**Пример.** Решить уравнение

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{22-x} = 7.$$

**Решение.** Здесь имеются два радикала, и избавиться от них одновременно посредством однократного возведения в квадрат не представляется возможным. Мы решим этот пример тремя способами.

**Способ 1.** Уединим один из радикалов, а затем возведем уравнение в квадрат

$$\sqrt{x+3} = 7 - \sqrt{22-x}; \quad x+3 = 49 - 14\sqrt{22-x} + 22 - x.$$

Полученное уравнение содержит уже один радикал. Уединив его, получим

$$14\sqrt{22-x} = 68 - 2x \quad \text{или} \quad 7\sqrt{22-x} = 34 - x.$$

Возведя в квадрат еще раз, получим

$$1078 - 49x = 1156 - 68x + x^2; \quad x^2 - 19x + 78 = 0,$$

откуда

$$x_1=13; \quad x_2=6.$$

Посредством подстановки в исходное уравнение убеждаемся, что оба корня ему удовлетворяют.

**Способ 2.** Возведем в квадрат обе части исходного уравнения. Получим

$$x+3 + 2\sqrt{(x+3)(22-x)} + 22-x = 49.$$

Это уравнение содержит уже один радикал. Уединим радикал:

$$2\sqrt{(x+3)(22-x)} = 24; \quad \sqrt{(x+3)(22-x)} = 12.$$

Теперь снова возведем в квадрат обе части уравнения. Получим  $(x+3)(22-x) = 144$  и после очевидных преобразований приходим к уравнению

$$x^2 - 19x + 78 = 0$$

к такому же, какое было получено при освобождении от радикалов по первому способу.

*Способ 3.* Введем новую неизвестную  $y = \sqrt{x+3}$ . Тогда  $y^2 = x+3$  и  $x = y^2 - 3$ . Относительно новой неизвестной уравнение

$$y + \sqrt{25 - y^2} = 7$$

содержит только один радикал.

Далее,

$$\sqrt{25 - y^2} = 7 - y; \quad 25 - y^2 = 49 - 14y + y^2; \quad y^2 - 7y + 12 = 0$$

и, наконец,  $y_1 = 4$ ;  $y_2 = 3$ . Теперь вспомним, что  $x = y^2 - 3$  и, следовательно,  $x_1 = 13$ ;  $x_2 = 6$ .

Таким образом, иногда при решении иррациональных уравнений следует комбинировать способ возведения в степень со способом введения новой неизвестной.

*Ответ.*  $x_1 = 13$ ;  $x_2 = 6$ .

*Пример.* Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x^2} - 4\sqrt[3]{x} + 3 = 0.$$

*Решение.*

*Способ 1.* Представим уравнение в виде

$$4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} = 3$$

и возведем обе его части в куб. При этом формулу куба разности двух чисел возьмем в следующем виде:

$$(A - B)^3 = A^3 - B^3 - 3AB(A - B).$$

Получим

$$64x - x^2 - 12\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2}(4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2}) = 27.$$

Далее,

$$\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{x^3} = x.$$

Кроме того, если  $x$  удовлетворяет исходному уравнению (а именно, в этом предположении мы и ведем преобразования, так как мы хотим построить уравнение, являющееся следствием исходного), то  $4\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} = 3$ .

Итак, преобразованное уравнение есть

$$64x - x^2 - 12x \cdot 3 = 27; \quad x^2 - 28x + 27 = 0.$$

Решая его, получим  $x_1 = 27$ ;  $x_2 = 1$ . Подставляя в исходное уравнение, убеждаемся, что оба корня ему удовлетворяют.

*Способ 2.* Положим  $\sqrt[3]{x} = y$ . Тогда  $\sqrt[3]{x^2} = y^2$  и относительно нового неизвестного уравнение превращается в  $y^2 - 4y + 3 = 0$ , откуда  $y_1 = 3$ ;  $y_2 = 1$ . Но  $x = y^3$ . Следовательно,  $x_1 = 27$ ;  $x_2 = 1$ .

*Ответ.*  $x_1 = 27$ ;  $x_2 = 1$ .

**Пример.** Решить уравнение

$$2\sqrt{x^2 - 3x + 11} - \sqrt{x^2 - 3x + 3} = 5.$$

**Решение.** Решение этого примера по образцу второго примера затруднительно, так как в результате последовательного уединения радикалов и возведения в степень получится уравнение четвертой степени, которое можно решить способом введения нового неизвестного, но не очень просто. Лучше сразу ввести новое неизвестное, положив  $\sqrt{x^2 - 3x + 11} = y$ . Тогда

$$x^2 - 3x + 11 = y^2 \quad \text{и} \quad x^2 - 3x + 3 = y^2 - 8.$$

Таким образом, относительно новой неизвестной уравнение имеет вид

$$2y - \sqrt{y^2 - 8} = 5.$$

Освободившись от радикала, получим

$$3y^2 - 20y + 33 = 0, \quad \text{откуда} \quad y_1 = \frac{11}{3}; \quad y_2 = 3.$$

Оба корня удовлетворяют уравнению.

Далее, вспоминая, что  $x^2 - 3x + 11 = y^2$ , получим относительно  $x$  два уравнения

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - 3x - \frac{22}{9} = 0.$$

Первое уравнение имеет корни  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = 1$ . Корнями второго являются  $x_3 = \frac{11}{3}$ ,  $x_4 = -\frac{2}{3}$ .

Все четыре корня удовлетворяют исходному уравнению, в чем легко убедиться посредством их подстановки в него.

$$\text{Ответ.} \quad x_1 = 2; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = \frac{11}{3}; \quad x_4 = -\frac{2}{3}.$$

Из рассмотренных примеров мы видим, что при решении иррациональных уравнений следует пользоваться методом уничтожения радикалов посредством возведения в степень или комбинацией его со способом введения нового неизвестного. В каждом частном случае следует, раньше чем приступить к выкладке, взвешивать в строение уравнения и составить план решения.

В заключение приводим еще один прием, который, несмотря на его искусственность, иногда оказывается полезным.



Пример. Решить уравнение

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{x-7} = 5.$$

Решение. Умножим обе части уравнения на  $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7}$ .  
Получим

$$x+6 - x+7 = 5(\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7}),$$

откуда

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{x-7} = \frac{13}{5}.$$

Складывая с исходным уравнением, получим

$$2\sqrt{x+6} = \frac{38}{5}, \quad \text{откуда} \quad x = \left(\frac{19}{5}\right)^2 - 6 = 8\frac{11}{25}.$$

Однако подстановка в исходное уравнение дает, что  $x = 8\frac{11}{25}$  не удовлетворяет исходному уравнению. Следовательно, уравнение не имеет решений.

*Ответ.* Уравнение не имеет решений.

### Упражнения

Решить уравнения:

1.  $\sqrt{x^2+5} = 5-x.$

4.  $\sqrt[3]{x+6} - \sqrt[3]{x-2} = 2.$

2.  $\sqrt{x^2-5} = x-6.$

5.  $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} = 3.$

3.  $\sqrt{x+3} + \sqrt{2x-1} = 3.$

---

## ГЛАВА III

### ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

#### § 1. Функциональная зависимость

В повседневной жизни и в практической деятельности постоянно приходится иметь дело с величинами переменными, т. е. изменяющимися с течением времени или в зависимости от обстоятельств. Это совершенно неизбежно, например, в учении о движении, т. е. в механике, так как величины, определяющие положение движущегося тела, все время изменяют свои численные значения. В самом простом случае механического движения — движения точки по прямой, положение точки определяется алгебраической величиной расстояния от точки отсчета, и это расстояние все время изменяется. Но и во всех других отделах физики, в технике, в естествознании — всюду, где только возможно применение методов математики, неизбежно появляется идея переменной величины, ибо все в природе находится в состоянии постоянного изменения и развития.

Более того, и в самой математике иногда полезно рассматривать данную постоянную величину как одно из значений переменной. И это дает возможность полнее понять ту закономерность, которая описывается данной формулой. Само обозначение чисел буквами, собственно говоря, отражает целесообразность такого рассмотрения. Когда мы решаем задачу в общем виде, обозначая данные числа буквами, мы затем вправе подставлять вместо букв различные численные значения, т. е. считать их переменными, и следить за тем, как изменяется ответ задачи в зависимости от изменения исходных данных.

Часто приходится иметь дело с переменными, связанными функциональной зависимостью. Это значит, что изменение одной переменной влечет за собой вполне определенное изменение другой переменной.

**Определение.** Если каждому значению одной переменной соответствует одно вполне определенное значение другой, то первая из этих переменных называется *независимой переменной* или *аргументом*, вторая — *функцией* от этой независимой переменной.

Например, площадь квадрата есть функция от длины его стороны; алгебраическая величина пути, пройденного точкой, находя-

шейся в определенном прямолинейном движении, есть функция от времени и т. д.

Необходимо заметить, что разделение ролей двух переменных, связанных функциональной зависимостью, имеет условный характер и зависит от обстоятельств исследования. Так, если мы должны следить за изменением площади квадрата при изменении длины его стороны, мы рассматриваем площадь как функцию и длину стороны — как независимую переменную. Наоборот, если для нас важно изменение длины стороны в зависимости от площади квадрата, роли функции и независимой переменной меняются.

Чтобы задать функцию, нужно дать правило, при помощи которого по данному значению независимой переменной может быть вычислено соответствующее значение функции.

Наиболее удобным «правилом» является алгебраическая формула, дающая выражение каждого значения функции через соответствующее значение независимой переменной. Так, формула  $y = x^2$  дает возможность по любому значению переменной  $x$  вычислить соответствующее значение переменной  $y$ , т. е. задает  $y$  как функцию от  $x$ . Формулы

$$y = \frac{x-2}{\sqrt{x}}; \quad y = \frac{x-1}{x+1}; \quad y = \sqrt{9-x^2}$$

и т. д. каждая выражает переменную  $y$  как функцию от переменной  $x$ .

Функция, заданная посредством формулы, дающей выражение каждого значения функции через соответствующее значение независимой переменной, называется *явно заданной*.

Кроме явно заданных функций, часто приходится иметь дело с функциями, *заданными неявно*. Под этим понимается задание уравнения, связывающего соответствующие значения функции и независимой переменной, но не решенного относительно значений функции.

Например, зависимость  $xy = 1$  задает  $y$  как функцию от  $x$ , ибо каждому значению  $x$  (кроме нуля) соответствует одно и только одно значение  $y$ . Ту же функцию можно задать явно посредством формулы  $y = \frac{1}{x}$ . Для этого достаточно решить уравнение  $xy = 1$  относительно  $y$ .

При неявном задании функции возможно, что из уравнения, связывающего значения двух переменных, всем (или некоторым) значениям одной из переменных соответствует два или больше значений другой переменной. В этом случае считается, что одно уравнение задает *многозначную* функцию.

Например, решая уравнение  $y^2 - x^2 = 1$  относительно  $y$ , мы получим  $y = \pm \sqrt{x^2 + 1}$ , т. е. каждому значению  $x$  здесь соответствует два значения  $y$ . Эту двузначную функцию можно считать составленной из двух однозначных  $y = \sqrt{x^2 + 1}$  и  $y = -\sqrt{x^2 + 1}$ .

Такого рода расщепления многозначной функции на однозначные *ветви* часто применяются. Такое расщепление можно произвести разными способами, и вопрос о наиболее естественном выборе способа расщепления решается в каждом частном случае отдельно.

Функция может быть задана не только посредством формулы или уравнения, но и при помощи какого-либо сформулированного словами правила вычисления значений функции по значениям независимой переменной.

Например,  $y$  как функция от  $x$  задается так:

$$\begin{aligned} y &= 5, \text{ пока } x \text{ меняется от } 0 \text{ до } 1, \\ y &= 6 - x, \text{ пока } x \text{ меняется от } 1 \text{ до } 3. \end{aligned}$$

Наконец, на практике часто приходится иметь дело с функциями, заданными посредством таблицы, в которой ряду значений независимой переменной сопоставлены соответствующие значения функции. Однако табличное задание функции является менее полным, чем задание посредством формулы или словесного описания, так как по таблице мы можем находить только те значения функции, которые находятся в таблице.

Правда, приемы так называемой *интерполяции* дают возможность вычислять при помощи данной таблицы значения функции и не входящие в таблицу, но сами приемы интерполяции основаны на дополнительных сведениях о свойствах функции и применимы только для функций, изменяющихся достаточно плавно при непрерывном изменении независимой переменной.

При задании функции необходимо указывать ее *область задания*, т. е. совокупность значений независимой переменной, при которых рассматривается функция. Если функция возникает в связи с исследованием какой-либо конкретной задачи, область ее задания определяется смыслом задачи.

Пусть, например, известно, что периметр прямоугольника равен 20 см и надо выразить его площадь через длину его основания. Пусть длина основания равна  $x$  см, высота равна  $h$  см. Тогда

$$2x + 2h = 20$$

и, следовательно,  $h = 10 - x$ . Площадь

$$s = xh = x(10 - x).$$

Мы получили явную формулу для выражения значений интересующей нас функции (площади прямоугольника) через значение независимой переменной (длины основания).

Эта формула имеет смысл при всех без исключения вещественных значениях переменной  $x$ . Однако, по смыслу задачи, числа  $x$  и  $h$  должны быть положительными, и следовательно,  $0 < x < 10$ . Эти неравенства и определяют область задания функции в данной задаче.

Если же функция задана формулой в отрыве от какой-либо конкретной задачи, то за *естественную область* ее задания при-

нимается совокупность всех значений независимой переменной, при которых формула позволяет вычислять значение функции.

Например, функция, заданная формулой  $y = \frac{3}{x}$ , имеет естественной областью задания все значения  $x$ , кроме  $x=0$ ; функция  $y = \sqrt{x-1}$  имеет смысл при  $x \geq 1$ .

Выяснение естественной области задания функций иногда представляет довольно трудную задачу.

## § 2. Прямоугольная система координат на плоскости

Для построения графика пользуются методом прямоугольных координат на плоскости.

Напомним, что системой прямоугольных координат на плоскости называется совокупность двух взаимно перпендикулярных направленных прямых с выбранными единицами масштаба. Одна из этих прямых называется осью абсцисс, другая — осью ординат, обе вместе — осями координат. Единицы масштаба по осям координат обычно выбираются одинаковыми. Точка пересечения осей, имеющая название начала координат, принимается за начальную точку отсчета по каждой из осей.

Введенная система координат на плоскости дает возможность задавать положение любой точки плоскости заданием двух действительных чисел — координат точки. Делается это следующим образом.

Через данную точку  $M$  (рис. 43) проводится прямая  $MN$ , параллельная оси ординат, до пересечения ее с осью абсцисс. Длина отрезка  $ON$ , взятая со знаком  $+$  или  $-$ , в зависимости от совпадения или несовпадения направления отрезка  $ON$  с направлением оси абсцисс, называется *абсциссой* точки  $M$ . Таким же образом, длина отрезка  $OP$ , равного и параллельного  $MN$ , взятая с надлежащим знаком, называется *ординатой* точки  $M$ . Абсцисса и ордината точки вместе называются *координатами* точки.

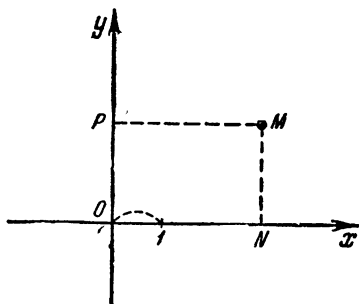


Рис. 43.

В свою очередь любые два действительных числа могут быть приняты за координаты некоторой точки. Действительно, для того чтобы найти точку с данной абсциссой  $a$  и данной ординатой  $b$ , достаточно построить на осях точки  $N$  и  $P$ , изображающие числа  $a$  и  $b$ , и провести через них прямые параллельно осям координат. Точка  $M$  пересечения этих прямых и будет искомой.

Таким образом, координаты точки играют роль ее адреса. Каждая точка имеет вполне определенные координаты, и обратно, по данным координатам положение точки устанавливается однозначно.

Координаты точки принято записывать рядом, разделив их запятой (или точкой с запятой, если координаты заданы десятичными дробями) и заключив в обыкновенные скобки; на первом месте пишется абсцисса, на втором — ордината. Например,  $(3, 2)$  обозначают координаты точки  $M$  (рис. 43). То обстоятельство, что точка  $M$  имеет координаты  $(a, b)$ , кратко записывается так:  $M(a, b)$ .

### § 3. График функции

*Графиком функции* называется геометрическое место точек, координатами которых являются соответствующие значения независимой переменной и функции.

Обычно значения независимой переменной откладываются по оси абсцисс, значения функции — по оси ординат.

Построение графика данной функции практически возможно лишь приближенно с той точностью, которую допускают чертежные средства и выбранный масштаб. Чем больше выбрана единица масштаба, тем точнее можно построить выбранный участок графика функции. Но даже несовершенный график вносит наглядность и дает возможность понять и осудить ход изменения функции при изменении независимой переменной.

Рассмотрим несколько примеров на построение графиков.

**Пример.** Построить график функции  $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ .

Прежде всего построим таблицу значений функции по обе стороны от нуля, придавая независимой переменной целые значения:

| $x$ | — 4             | — 3            | — 2            | — 1 | 0 | 1 | 2             | 3             | 4              |
|-----|-----------------|----------------|----------------|-----|---|---|---------------|---------------|----------------|
| $y$ | $-\frac{8}{17}$ | $-\frac{3}{5}$ | $-\frac{4}{5}$ | — 1 | 0 | 1 | $\frac{4}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{8}{17}$ |

Мы ограничиваемся значениями  $x$  от — 4 до 4, так как дальнейший ход изменения функции ясен. При возрастании абсолютной величины  $x$  числитель и знаменатель дроби  $\frac{2x}{x^2 + 1}$  будут расти по абсолютной величине, но рост знаменателя будет значительно опережать рост числителя, и абсолютная величина дроби будет подходить все ближе и ближе к нулю.

Перенеся на чертеж вычисленные точки, мы видим, как их соединить более или менее плавной линией. Неясно только, как соединять точки  $(-1, -1)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ . Они явно лежат на одной прямой. Но можно ли их соединять прямой линией? Для выяснения этого вопроса добавим новые точки графика:

| $x$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
|-----|----------------|---------------|
| $y$ | $-\frac{4}{5}$ | $\frac{4}{5}$ |

Теперь вопрос ясен (рис. 44; пунктиром отмечено продолжение ветвей графика за пределами значений, вычисленных в таблице).

Пример. Построить график функции  $y = \frac{x^3 + 1}{2}$ .

Естественной областью задания функции  $y = \frac{x^3 + 1}{x}$  является вся совокупность действительных чисел, за исключением нуля. Для по-

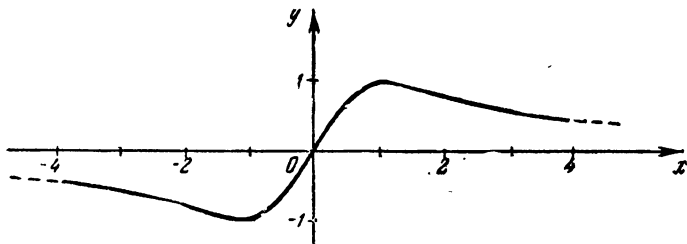


Рис. 44.

строения графика прежде всего составим таблицу значений, включив в нее целые значения для  $x$ . При этом удобно формулу  $y = \frac{x^3 + 1}{x}$  преобразовать к виду  $y = x + \frac{1}{x}$ . Получим:

|     |      |       |          |      |    |   |     |         |      |     |
|-----|------|-------|----------|------|----|---|-----|---------|------|-----|
| $x$ | -5   | -4    | -3       | -2   | -1 | 1 | 2   | 3       | 4    | 5   |
| $y$ | -5,2 | -4,25 | -3,33... | -2,5 | -2 | 2 | 2,5 | 3,33... | 4,25 | 5,2 |

Перенеся эту таблицу на чертеж, мы получим ряд точек, которые естественным образом соединяются плавной линией, за исключением участка от  $x = -1$  до  $x = 1$ .

На этом участке изобразить график плавной линией заведомо нельзя, так как на графике не существует точки с абсциссой нуля. Для того чтобы уточнить поведение функции на этом участке, следует вычислить еще ряд ее значений при значениях  $x$ , близких к нулю. Строим дополнительную таблицу:

|     |                |                |                |                |                  |                 |               |               |               |               |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|------------------|-----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $x$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{5}$ | $-\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{100}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $y$ | -2,5           | -3,33...       | -4,25          | -5,2           | -100,01          | 100,01          | 5,2           | 4,25          | 3,33...       | 2,5           |

Мы видим, что при значениях  $x$ , близких к нулю, значения  $y$  становятся очень большими по абсолютной величине, положительными при положительных  $x$  и отрицательными при отрицательных  $x$ . Поэтому при приближении  $x$  к нулю справа — ветвь графика безгранично поднимается, при приближении  $x$  к нулю слева — ветвь графика безгранично опускается.

В целом график выглядит так, как показано на рис. 45. Он как бы «разорван» осью  $x=0$  на две отдельные ветви.

Пример. Построить график функции

$$y = \sqrt{9 - x^2}.$$

Естественной областью определения этой функции является совокупность значений переменной  $x$ , заключенных между числами  $-3$  и  $+3$ , включая сами эти числа.

Действительно, если абсолютная величина  $x$  не превосходит 3, то  $x^2 \leq 9$  и разность  $9 - x^2$  не отрицательна. Если же  $x$  больше 3 по абсолютной величине (т. е.  $x > 3$  или  $x < -3$ ), то  $x^2 > 9$ , разность  $9 - x^2$  отрицательна и  $\sqrt{9 - x^2}$  смысла не имеет.

Составим таблицу значений функции, включив в нее значения  $x$ , близкие к  $+3$  и  $-3$ , для того чтобы узнать, что происходит

Рис. 45.

с функцией вблизи границ ее естественной области определения:

|    |         |         |         |         |   |         |         |         |         |   |
|----|---------|---------|---------|---------|---|---------|---------|---------|---------|---|
| -3 | -2,9    | -2,5    | -2      | -1      | 0 | 1       | 2       | 2,5     | 2,9     | 3 |
| 0  | 0,76... | 1,65... | 2,23... | 2,82... | 3 | 2,82... | 2,23... | 1,65... | 0,76... | 0 |

Построив вычисленные точки и соединив их, получим график (рис. 46).

Легко убедиться в том, что этот график есть верхняя полуокружность радиуса 3 с центром в начале координат. Действительно, если  $M$  есть точка на графике с координатами  $(x, y)$ , то ее расстояние от начала координат легко определяется по теореме Пифагора:

$$\begin{aligned} OM^2 &= ON^2 + NM^2 = \\ &= x^2 + y^2 = x^2 + (\sqrt{9 - x^2})^2 = \\ &= x^2 + 9 - x^2 = 9, \end{aligned}$$

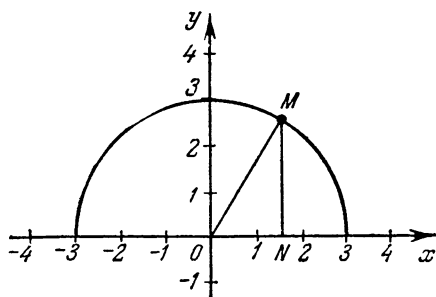


Рис. 46.

откуда  $OM=3$ , в каком бы месте графика ни находилась точка  $M$ . Обратно,



если  $M$  лежит на указанной полуокружности, то, по теореме Пифагора,

$$9 = OM^2 = ON^2 + NM^2 = x^2 + y^2,$$

откуда

$$y = +\sqrt{9-x^2} \quad \text{или} \quad y = -\sqrt{9-x^2}.$$

Вторая возможность должна быть отброшена, ибо для всех точек рассматриваемой полуокружности ординаты не отрицательны.

Полную окружность радиуса 3 мы получили бы, присоединив к графику функции  $y = \sqrt{9-x^2}$  график функции  $y = -\sqrt{9-x^2}$ . Обе эти функции являются ветвями двузначной функции, определяемой неявным уравнением  $x^2 + y^2 = 9$ . Таким образом, окружность радиуса 3 есть график зависимости  $x^2 + y^2 = 9$ .

Совершенно такими же рассуждениями легко убедиться, что окружность любого радиуса  $r$  с центром в начале координат является графиком зависимости  $x^2 + y^2 = r^2$ .

**Пример.** Построить график функции  $y^2 = \frac{x^2}{9}(9-x^2)$ .

Данное уравнение определяет  $y$  как двузначную функцию  $x$ , именно

$$y = +\sqrt{\frac{x^2}{9}(9-x^2)} \quad \text{или} \quad y = -\sqrt{\frac{x^2}{9}(9-x^2)}.$$

Обе выделенные ветви имеют естественной областью задания значения  $x$ , заключенные между  $-3$  и  $3$ .

Составим для ветви  $y = \sqrt{\frac{x^2}{9}(9-x^2)}$  таблицу значений:

|     |      |        |        |        |        |     |        |        |        |        |     |
|-----|------|--------|--------|--------|--------|-----|--------|--------|--------|--------|-----|
| $x$ | $-3$ | $-2,9$ | $-2,5$ | $-2$   | $-1$   | $0$ | $1$    | $2$    | $2,5$  | $2,9$  | $3$ |
| $y$ | $0$  | $0,74$ | $1,38$ | $1,49$ | $0,94$ | $0$ | $0,94$ | $1,49$ | $1,38$ | $0,74$ | $0$ |

Для второй ветви соответствующие значения  $y$  отличаются только знаком. На рис. 47 изображен график данной зависимости. Он напоминает восьмерку, положенную горизонтально. Ветвь

$$y = +\sqrt{\frac{x^2}{9}(9-x^2)}$$

изображается той частью графика, которая лежит выше оси абсцисс. Ветвь

$$y = -\sqrt{\frac{x^2}{9}(9-x^2)}$$

изображается нижней половиной графика.

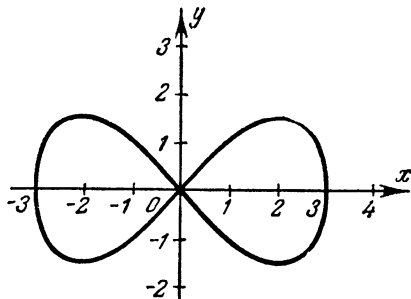


Рис. 47.

Обе эти ветви имеют графики с резким изломом в начале координат. Любопытно отметить при этом, что правая половина гра-

фика  $y = \sqrt{\frac{x^2}{9}(9-x^2)}$  плавно переходит в левую половину графика  $y = -\sqrt{\frac{x^2}{9}(9-x^2)}$ . Обе эти части вместе образуют график функции  $y = \frac{x}{3}\sqrt{9-x^2}$ , ибо

$$\frac{x}{3}\sqrt{9-x^2} = +\sqrt{\frac{x^2}{9}(9-x^2)}$$

при положительном  $x$  и

$$\frac{x}{3}\sqrt{9-x^2} = -\sqrt{\frac{x^2}{9}(9-x^2)}$$

при  $x$  отрицательном.

### Упражнения

Построить графики зависимостей:

1.  $y = \sqrt{x^2 + 1}$ .
2.  $y = x^2 + 1$ .
3.  $y = \sqrt{x^2 - 1}$ .
4.  $y = x^2 - 1$ .
5.  $y = \sqrt{x^2}$ .
6.  $y = x + \frac{1}{x-2}$ .
7.  $x^4 + y^4 = 6xy^2$ .
8.  $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2 - 9xy^2$ .

## § 4. Прямо пропорциональная зависимость

Простейшим видом функциональной зависимости является *прямо пропорциональная* зависимость, которая характеризуется тем, что значения функции пропорциональны значениям независимой переменной. Пропорциональная зависимость переменных  $x$  и  $y$  выражается уравнением  $y = kx$ , где  $k$  — постоянный коэффициент.

**Теорема 1.** *График функции  $y = kx$  есть прямая линия, проходящая через начало координат.*

**Доказательство.** Допустим для определенности, что  $k$  — положительное число

и пусть  $M_1$  — точка графика, абсцисса которой равна 1. Тогда ордината точки  $M_1$  равна  $k \cdot 1 = k$ . Возьмем произвольную точку  $M_2$  на графике и предположим только, что ее абсцисса  $x$  положительна (рис. 48).

Опустим перпендикуляры  $M_1N_1$  и  $M_2N_2$  из точек  $M_1$  и  $M_2$  на ось абсцисс и рассмотрим треугольники  $OM_1N_1$  и  $OM_2N_2$ . Углы этих треугольников при вершинах  $N_1$  и  $N_2$  равны, как прямые углы. Стороны, образующие эти углы, пропорциональны.

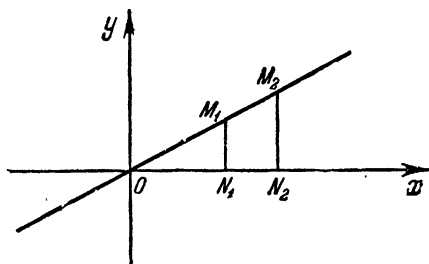


Рис. 48.

Действительно,

$$M_1N_1 = k; \quad ON_1 = 1; \quad ON_2 = x_2; \quad M_2N_2 = y_2 = kx_2,$$

так как точка  $M_2$  лежит на графике функции  $y = kx$ , и следовательно, ее координаты связаны этим соотношением.

Следовательно,

$$\frac{M_2N_2}{ON_2} = k; \quad \frac{M_1N_1}{ON_1} = k; \quad \frac{M_2N_2}{ON_2} = \frac{M_1N_1}{ON_1}.$$

Таким образом, треугольники  $ON_1M_1$  и  $ON_2M_2$  подобны, и следовательно, углы при общей вершине  $O$  равны, т. е. точки  $M_1$  и  $M_2$  лежат на одной и той же прямой, проходящей через начало координат.

Итак, все точки графика функции  $y = kx$ , имеющие положительные абсциссы, расположены по прямой, проходящей через точку  $M$  и через начало координат. Точки с отрицательными абсциссами укладываются на ту же прямую, продолженную через начало координат влево.

Действительно, если точка  $M_3(x_3, y_3)$ , абсцисса которой отрицательна, лежит на графике, то симметричная с ней относительно начала координат точка  $M'_3(-x_3, -y_3)$  тоже лежит на графике, ибо если  $y_3 = kx_3$ , то  $-y_3 = k(-x_3)$ . Но абсцисса  $x_3$  положительна, и следовательно,  $M'_3$  лежит на описанной выше прямой линии. Следовательно, и симметричная с ней точка  $M_3$  лежит на той же прямой. Наконец, само начало координат тоже принадлежит графику, ибо его координаты  $(0, 0)$  удовлетворяют уравнению  $y = kx$  при любом  $k$ .

Таким образом, все точки графика функции  $y = kx$  укладываются на прямую линию, проходящую через начало координат и через точку  $M_1(1, k)$ .

Обратно, всякая точка, лежащая на такой прямой, принадлежит графику. Докажем это для точек с положительными абсциссами. Для точек с отрицательными абсциссами доказательство аналогично.

Возьмем снова точку  $M_1(1, k)$ , заведомо лежащую на графике, и пусть  $M_2(x_2, y_2)$  есть какая-либо точка с положительной абсциссой, лежащая на прямой, проходящей через начало координат и через  $M_1$ .

Опустим из точек  $M_1$  и  $M_2$  перпендикуляры на ось абсцисс и пусть  $N_1$  и  $N_2$  — основания этих перпендикуляров (см. рис. 48). Треугольники  $OM_1N_1$  и  $OM_2N_2$  подобны, ибо они прямоугольны и имеют равные углы при вершине  $O$ . Следовательно, их катеты пропорциональны

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{k}{1} = k,$$

откуда  $y_2 = kx_2$ , т. е. точка  $M_2$  действительно лежит на графике функции  $y = kx$ .

Итак, мы доказали, что все точки графика  $y = kx$  расположены на прямой, проходящей через начало координат и точку  $M_1(1, k)$ . Обратно, каждая точка этой прямой принадлежит графику  $y = kx$ .

Следовательно, эта прямая совпадает с графиком, что и требовалось доказать.

Мы доказали теорему для функции  $y=kx$  при положительном коэффициенте пропорциональности  $k$ . Совершенно таким же способом она устанавливается и при отрицательном  $k$ . Разница будет только в том, что график функции  $y=kx$  при положительном  $k$  проходит из левого нижнего координатного угла в правый верхний,

а при отрицательном  $k$  — из левого верхнего угла в правый нижний.

Наконец, если  $k=0$ , то  $y=0$  при всех  $x$ , и следовательно, графиком является ось абсцисс.

Построим на одном чертеже несколько графиков функции  $y=kx$  при различных численных значениях  $k$  для того, чтобы проследить, как изменяется график при изменении  $k$ . При построении используем то обстоятельство, что график функции  $y=kx$  проходит через начало координат и через точку  $M_1(1, k)$ .

На рис. 49 изображены графики при  $k=-3$ ,  $-2$ ,  $-1$ ,  $-\frac{1}{2}$ ,  $0$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $1$ ,  $2$ ,  $3$ .

Из построения очевидно, что при увеличении положительного коэффициента  $k$  график образует все больший угол с осью абсцисс, постепенно приближающийся к прямому углу. При уменьшении положительных  $k$  угол между графиком и осью абсцисс уменьшается, и при  $k=0$  график совпадает с осью абсцисс. При отрицательном значении  $k$  график образует с осью абсцисс острый угол, откладываемый вниз от положительного направления оси абсцисс. Этот угол возрастает при увеличении абсолютной величины  $k$ , постепенно приближаясь к прямому углу.

Коэффициент пропорциональности  $k$  называется *угловым коэффициентом* или *наклоном* графика.

**Теорема 2.** *Всякая прямая, проходящая через начало координат, за исключением оси ординат, есть график некоторой функции  $y=kx$ .*

**Доказательство.** Пусть дана прямая, проходящая через начало координат и отличающаяся от оси ординат. Возьмем на ней

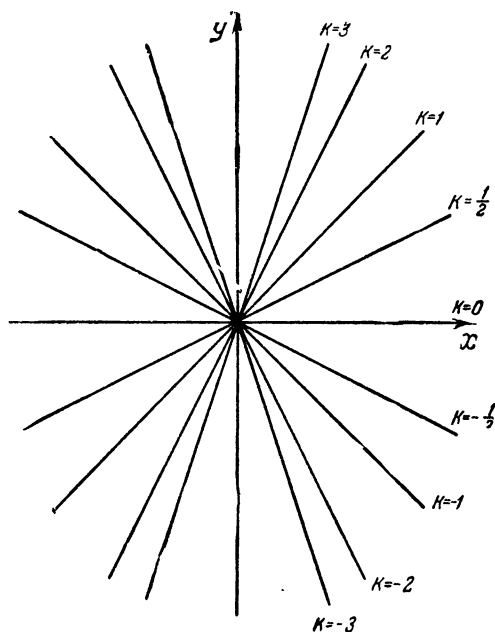


Рис. 49.

какую-либо точку  $M_1(x_1, y_1)$ , абсцисса которой отличается от нуля. Такая точка найдется на прямой, в силу предположения, что она не совпадает с осью координат. Обозначим отношение  $\frac{y_1}{x_1}$  через  $k$ . График функции  $y=kx$  проходит через точку  $M_1$ , ибо координаты  $(x_1, y_1)$  этой точки удовлетворяют соотношению  $y=kx$ .

Действительно,  $y_1 = \frac{y_1}{x_1} x_1 = kx_1$ . Следовательно, график функции  $y=kx$  есть прямая, проходящая через начало координат и точку  $M_1$ . Но, так как через две данные точки проходит только одна прямая, график функции  $y=kx$  совпадает с данной прямой, что и требовалось доказать.

**З а м е ч а н и е.** Ось ординат не является графиком функции  $y=kx$ . «Уравнением» оси ординат является равенство  $x=0$ , ибо абсциссы всех точек, лежащих на оси ординат, равны нулю, и наоборот, каждая точка с абсциссой, равной нулю, лежит на оси ординат.

### § 5. Линейная функция

Двучленом первой степени от  $x$  или линейным двучленом от  $x$  называется выражение вида  $kx+b$ , где  $k$  и  $b$  — некоторые постоянные. Например,  $2x+3$ ;  $-\frac{1}{2}x+1$ ;  $3x$  — линейные двучлены.

Функция  $y$ , значения которой выражаются через значения независимой переменной в виде линейного двучлена  $kx+b$ , называется линейной функцией.

**Теорема 1.** *График линейной функции есть прямая линия.*

**Доказательство.** С целью исследования графика функции  $y=kx+b$  введем вспомогательную функцию  $y=kx$ , график которой мы уже рассматривали.

Предположим для простоты, что  $b > 0$ . Каждое значение функции  $y=kx+b$  получается из соответствующего значения функции  $y=kx$  добавлением числа  $b$ , одного и того же для всех значений независимой переменной  $x$ . Геометрически это обозначает, что каждая точка графика функции  $y=kx+b$  расположена на  $b$  единиц выше точки графика функции  $y=kx$  с той же абсциссой. Следовательно, график функции  $y=kx+b$  может быть получен из прямой линии, являющейся графиком функции  $y=kx$ , параллельным перенесением на  $b$  единиц в сторону положительных ординат.

Поэтому график  $y=kx+b$  есть прямая, параллельная прямой  $y=kx$  (рис. 50).

Если  $b$  отрицательно, то график функции  $y=kx+b$  получается из графика  $y=kx$  параллельным перенесением на  $|b|$  единиц вниз в направлении оси ординат. Так что и в этом случае график функции  $y=kx+b$  есть прямая, параллельная прямой  $y=kx$ .

Прямая  $y=kx+b$  пересекает ось ординат в точке с ординатой, равной  $b$ , ибо при  $x=0$   $y=b$ . Поэтому  $b$  называется *начальной ординатой* графика.

В силу параллельности прямых  $y=kx+b$  и  $y=kx$  они образуют одинаковый угол с осью абсцисс. Поэтому число  $k$  называется *угловым коэффициентом* или *наклоном* прямой  $y=kx+b$ , так же как для графика прямой пропорциональности.

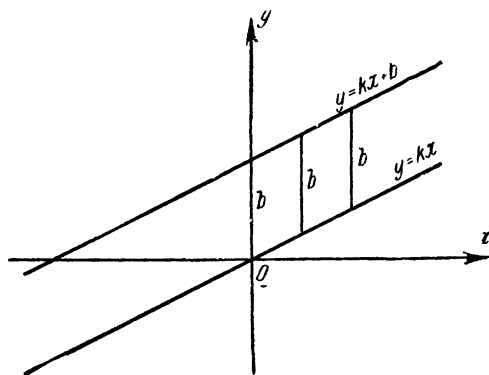


Рис. 50.

Ввиду того, что прямая вполне определяется своими двумя точками, для построения графика линейной функции достаточно построить две точки графика и соединить их прямой линией.

Построим график функции  $y = \frac{1}{2}x - 1$ . С

этой целью зададимся двумя значениями  $x$ , напри-

мер  $x_1=0$  и  $x_2=4$ . Соответствующие значения  $y$  равны  $y_1=-1$  и  $y_2=1$ . Следовательно, график рассматриваемой функции есть прямая, проходящая через точки  $M_1(0, -1)$  и  $M_2(4, 1)$  (рис. 51).

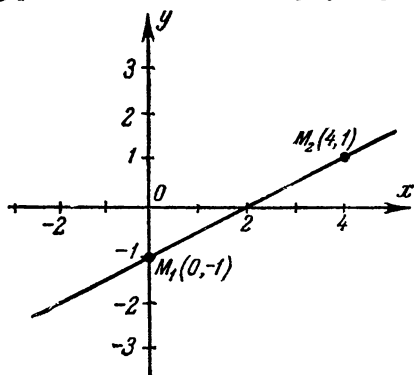


Рис. 51.

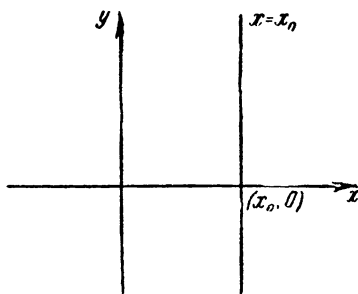


Рис. 52.

**Теорема 2.** *Всякая прямая, не параллельная оси ординат, есть график некоторой линейной функции.*

**Доказательство.** Действительно, любая такая прямая пересекается с осью ординат в одной точке  $M$ .

Пусть  $b$  есть ордината точки  $M$ . Проведем через начало координат прямую, параллельную данной. В силу теоремы 2 § 4 эта прямая есть график прямой пропорциональной зависимости  $y=kx$ . График линейной функции  $y=kx+b$  есть прямая, проходящая через точку  $M$  и параллельная прямой  $y=kx$ .

Так как через данную точку проходит только одна прямая, параллельная прямой  $y=kx$ , график  $y=kx+b$  совпадает с данной прямой, что и требовалось доказать.

**З а м е ч а н и е.** Каждая прямая, параллельная оси ординат, не является графиком линейной функции. Такая прямая характеризуется уравнением  $x=x_0$ , где  $x_0$  есть абсцисса одной из ее точек, например точки пересечения с осью абсцисс. Действительно, абсциссы всех точек прямой, параллельной оси ординат, равны между собой и, следовательно, равны абсциссе точки пересечения прямой с осью абсцисс. Обратно, все точки плоскости, имеющие абсциссу  $x_0$ , лежат на прямой, параллельной оси ординат и проходящей через точку  $(x_0, 0)$  (рис. 52).

### Упражнения

Построить графики линейных функций:

1.  $y=x+1$ .    2.  $y=-x+1$ .    3.  $y=x-1$ .    4.  $y=-x-1$ .  
 5.  $y=\frac{1}{2}x+2$ .    6.  $y=-\frac{1}{2}x+2$ .    7.  $y=\frac{1}{2}x-2$ .    8.  $y=-\frac{1}{2}x-2$ .

## § 6. Геометрический смысл уравнения первой степени с двумя неизвестными

Уравнение первой степени

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

с двумя «неизвестными»  $x$  и  $y$  есть зависимость, связывающая  $x$  и  $y$ , которые рассматриваются как переменные величины. Совокупность всех точек, координаты которых удовлетворяют уравнению  $Ax + By + C = 0$ , есть график этой зависимости.

Рассмотрим, что представляет собой этот график.

Предположим сначала, что  $B \neq 0$ . Тогда уравнение (1) можно решить относительно  $y$ :

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Таким образом, при  $B \neq 0$   $y$  есть линейная функция от  $x$  и ее графиком является прямая линия, не параллельная оси ординат. Эта прямая будет параллельна оси абсцисс в том и только том случае, если  $A=0$ . Она будет проходить через начало координат в том и только том случае, если  $C=0$ .

Теперь допустим, что  $B=0$ . Тогда уравнение (1) превращается в

$$Ax + C = 0,$$

и потому, если  $A \neq 0$ , то  $x = -\frac{C}{A}$ . Следовательно, графиком будет в этом случае прямая, параллельная оси ординат.

Если оба коэффициента  $A$  и  $B$  при переменных  $x$  и  $y$  в уравнении  $Ax + By + C = 0$  равны нулю, т. е. если уравнение имеет вид

$$0x + 0y + C = 0,$$

то это уравнение есть либо тождество (когда  $C = 0$ ), либо бессмысленное равенство (когда  $C \neq 0$ ). В первом случае «графиком» его будет вся плоскость, так как «уравнению»  $0x + 0y + 0 = 0$  удовлетворяют координаты  $x$  и  $y$  любой точки.

Итак, если  $A$  и  $B$  не равны нулю одновременно, то графиком зависимости  $Ax + By + C = 0$  является прямая линия.

Уравнение

$$Ax + By + C = 0$$

называется *уравнением прямой*.

### Упражнения

Построить прямые линии по их уравнениям:

1.  $x + y - 3 = 0$ .
2.  $-x + 3y - 6 = 0$ .
3.  $2x + y + 4 = 0$ .
4.  $x = 4$ .
5.  $y = -2$ .

## § 7. Квадратичная функция

Функция  $y$ , значения которой выражаются через значения независимой переменной  $x$  в виде квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c,$$

называется *квадратичной функцией*.

График квадратичной функции  $y = ax^2 + bx + c$  мы изучим в несколько этапов, постепенно усложняя вид функции.

График функции  $y = x^2$ . График этот носит название *параболы* и имеет вид, изображенный на рис. 53. Этот график рассматривался в первой части книги (гл. II, § 17, пример 2 и гл. IX, § 4).

Парабола  $y = x^2$  представляет собой кривую линию, состоящую из двух симметричных быстро поднимающихся бесконечных ветвей, плавно соединяющихся в начале координат. Ось ординат является *осью симметрии* параболы  $y = x^2$ . Точка пересечения параболы с ее осью симметрии называется *вершиной* параболы. Для параболы  $y = x^2$  вершиной является начало координат.

График функции  $y = ax^2$  при  $a > 0$ . Дадим несколько примеров графиков функции  $y = ax^2$  при  $a = 2, 1, \frac{1}{2}$  (рис. 54). Из этих примеров видно, что графиком функции  $y = ax^2$  является тоже парабола более «широкая», чем парабола  $y = x^2$  при  $a < 1$ , и более «узкая» при  $a > 1$ .



Докажем теперь, что график функции  $y = ax^2$  есть действительно парабола, т. е. что этот график совпадает с графиком  $y = x^2$ , но построенным в другом масштабе. С этой целью, выбрав на плоскости основную единицу масштаба, в котором будем строить график, возьмем на той же плоскости другую вспомогательную единицу масштаба, величина которой равна  $\frac{1}{a}$  основной единицы. Координаты какой-либо точки, измеренные в основном

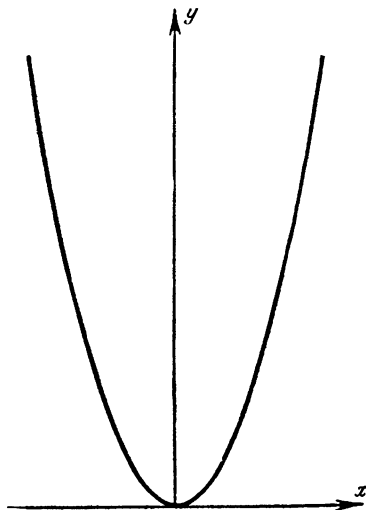


Рис. 53.

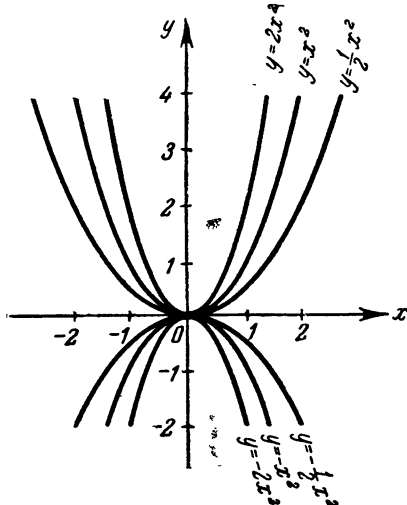


Рис. 54.

масштабе, мы будем называть *основными* координатами, измеренные во вспомогательном масштабе — *вспомогательными*.

Если  $(x, y)$  — основные координаты какой-либо точки  $M$ , а вспомогательные координаты той же точки суть  $(x', y')$ , то  $x' = ax$ ;  $y' = ay$ . Действительно, длина любого отрезка при измерении во вспомогательном масштабе получается из длины того же отрезка, измеренной в основном масштабе, умножением на  $a$ .

Представим себе, что мы построили график функции  $y = ax^2$  в основном масштабе. Умножив обе части уравнения  $y = ax^2$  на  $a$ , получим  $ay = (ax)^2$ , т. е.  $y' = (x')^2$ . Таким образом, вспомогательные координаты  $(x', y')$  любой точки, лежащей на графике функции  $y = ax^2$ , связаны соотношением  $y' = (x')^2$ . Обратно, если вспомогательные координаты некоторой точки связаны соотношением  $y' = (x')^2$ , то основные координаты связаны соотношением  $ay = (ax)^2$ , т. е.  $y = ax^2$ , и следовательно, точка лежит на графике функции  $y = ax^2$ .

Таким образом, графиком функции  $y = ax^2$  является парабола  $y' = (x')^2$ , но только построенная во вспомогательном масштабе, единицей которого является  $\frac{1}{a}$  единицы основного масштаба.

Иными словами, графиком функции  $y = ax^2$  является парабола  $y' = (x')^2$ , равномерно сжатая в  $a$  раз (при  $a > 1$ ) или равномерно растянутая в  $\frac{1}{a}$  раз (при  $a < 1$ ).

График функции  $y = ax^2$  при  $a < 0$ . Пусть  $y = ax^2$  и  $a$  отрицательно. Положим  $a = -a_1$ . Тогда  $y = -a_1x^2$ . Сравнивая точки графиков  $y = a_1x^2$  и  $y = -a_1x^2$ , имеющих одинаковые абсциссы, мы видим, что их ординаты равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Следовательно, график функции  $y = -a_1x^2$  симметричен графику функции  $y = a_1x^2$  относительно оси абсцисс. Таким образом, график функции  $y = ax^2$  при отрицательном  $a$  тоже является параболой. Но ее бесконечные ветви направлены не вверх, а вниз.

На рис. 54 изображены графики функций  $y = ax^2$  при нескольких значениях  $a$ , положительных и отрицательных.

График функции  $y = ax^2 + d$ . Для построения графика функции  $y = ax^2 + d$  сравним эту функцию с функцией  $y = ax^2$ .

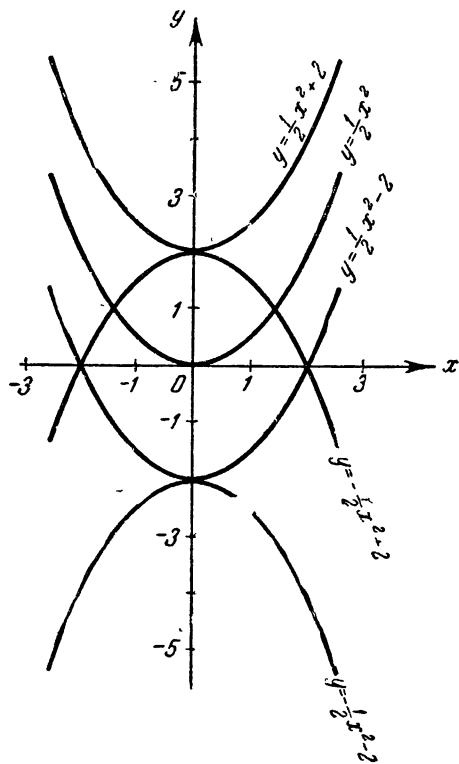


Рис. 55.

При каждом  $x$  значения функции  $y = ax^2 + d$  получаются из соответствующих значений функции  $y = ax^2$  добавлением одного и того же числа  $d$  для всех  $x$ . Геометрически это означает, что каждая точка графика функции  $y = ax^2 + d$  получается из соответствующей точки графика  $y = ax^2$  сдвигом на  $|d|$  единиц вверх или вниз в зависимости от знака  $d$ . Следовательно, и весь график  $y = ax^2 + d$  получается из параболы  $y = ax^2$  таким же сдвигом, т. е. график  $y = ax^2 + d$  представляет собою такую же параболу, как и  $y = ax^2$ , но сдвинутую в направлении оси ординат. Осью симметрии параболы  $y = ax^2 + d$  снова является ось ординат. Вершиной является точка с абсциссой  $x = 0$ , ордината вершины равна  $d$ , так как при  $x = 0$   $y = d$ .

На рис. 55 изображено несколько парабол рассматриваемого вида.

График функции  $y = a(x - m)^2$ . Сравнивая функции  $y = a(x - m)^2$  и  $y = ax^2$ , мы видим, что значения функции

$y = a(x - m)^2$  при  $x = x_0 + m$  совпадают со значениями функции  $y = ax^2$  при  $x = x_0$ . Геометрически это означает, что точка на графике функции  $y = a(x - m)^2$  с абсциссой  $x = x_0 + m$  имеет одинаковую ординату с точкой на графике  $y = ax^2$ , имеющей абсциссу  $x = x_0$ . Иными словами, каждая точка графика функции  $y = a(x - m)^2$  получается из некоторой точки графика функции  $y = ax^2$  сдвигом на  $|m|$  единиц в направлении оси абсцисс вправо

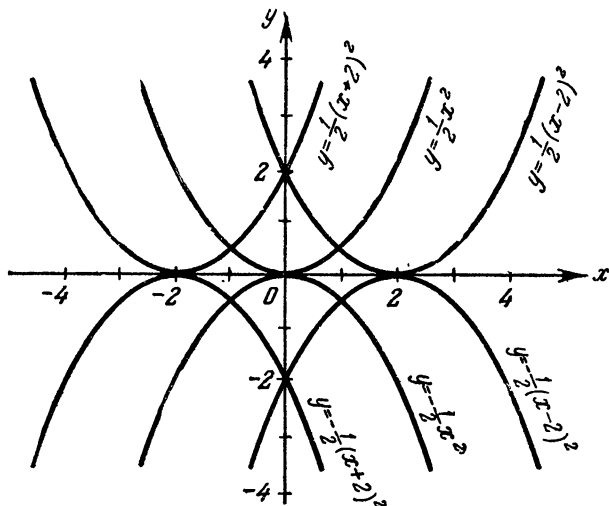


Рис. 56.

или влево в зависимости от знака  $m$ . Поэтому и весь график функции  $y = a(x - m)^2$  получается из параболы  $y = ax^2$  сдвигом на  $|m|$  единиц вправо или влево в зависимости от знака  $m$ . Следовательно, график функции  $y = a(x - m)^2$  есть такая же парабола, как и график функции  $y = ax^2$ , но сдвинутая в направлении оси абсцисс. В частности, вершина параболы  $y = a(x - m)^2$  находится в точке  $(m, 0)$ , а ось симметрии есть прямая, проходящая через эту точку и параллельная оси ординат. На рис. 56 изображается несколько парабол рассматриваемого вида.

График функции  $y = a(x - m)^2 + d$ . Из соображений, приведенных при выводе графика линейной функции и при выводе графика функции  $y = ax^2 + d$ , следует, что график функции  $y = a(x - m)^2 + d$  получается из графика функции  $y = a(x - m)^2$  сдвигом в направлении оси ординат на  $|d|$  единиц вверх или вниз в зависимости от знака  $d$ .

Поэтому график функции  $y = a(x - m)^2 + d$  есть такая же парабола, как  $y = ax^2$ , но сдвинутая на  $m$  единиц в направлении оси абсцисс и на  $d$  единиц в направлении оси ординат. Поэтому вершина

параболы  $y = a(x - m)^2 + d$  находится в точке  $(m, d)$ , а ось симметрии есть прямая, параллельная оси ординат и проходящая через эту точку.

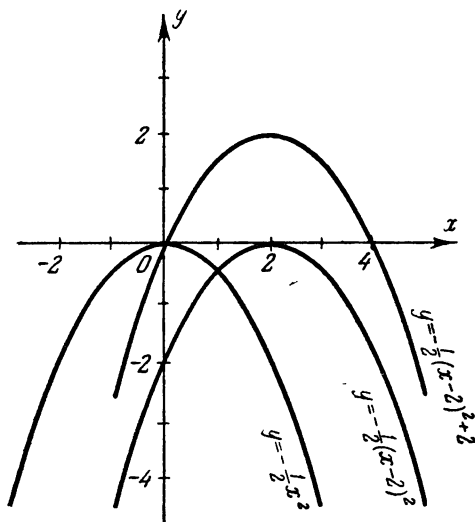


Рис. 57.

На рис. 57 изображена парабола  $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$  и для сравнения

параболы  $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2$  и  $y = -\frac{1}{2}x^2$ .

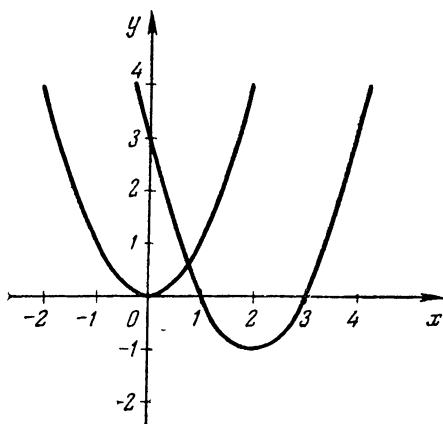


Рис. 58.

График общей квадратичной функции. Общую квадратичную функцию  $y = ax^2 + bx + c$  легко привести к виду, рассмотренному в предыдущем пункте. Для этого прежде всего вынесем за скобки старший коэффициент  $a$ :

$$y = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right),$$

а затем к приведенному квадратному трехчлену, находящемуся в скобках, применим неоднократно применявшийся выше прием выделения полного квадрата суммы, рассматривая  $x^2$  как квадрат первого

слагаемого,  $\frac{b}{a}x$  — как удвоенное произведение первого на второе. В результате получим

$$y = a \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Таким образом, общая квадратичная функция приводится к виду

$$y = a(x - m)^2 + d \quad \text{при} \quad m = -\frac{b}{2a}, \quad d = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Следовательно, графиком функции  $y = ax^2 + bx + c$  является такая же парабола, как  $y = ax^2$ , но сдвинутая так, что ее вершина находится в точке  $\left( -\frac{b}{2a}; \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$ .

На рис. 58 изображена парабола  $y = x^2 - 4x + 3$  и, для сравнения, парабола  $y = x^2$ .

### Упражнения

Построить графики зависимостей:

1.  $y = \frac{1}{2}x^2 + x - 1.$

3.  $y = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}.$

2.  $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1.$

4.  $x = y^2 + y + 1.$

5.  $y^2 = x + y.$

## § 8. Исследование графика квадратичной функции

При построении графика квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c$$

могут представиться следующие случаи.

Случай 1.  $a > 0$ ;  $b^2 - 4ac > 0$ . В этом случае бесконечные ветви параболы направлены вверх, ордината вершины

$$d = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

отрицательна, и следовательно, вершина расположена ниже оси абсцисс (рис. 59). В силу этого парабола должна пересекать ось абсцисс в двух точках. Абсциссы этих точек являются корнями трехчлена  $ax^2 + bx + c$  или, что то же самое, корнями уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ , ибо ордината любой точки оси абсцисс есть 0.

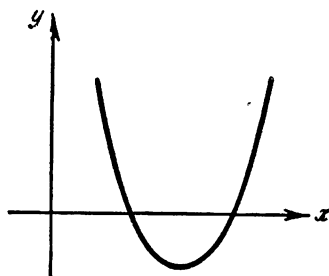


Рис. 59.

Таким образом, мы убеждаемся из геометрических соображений, что в этом случае трехчлен имеет два действительных корня.

Случай 2.  $a > 0$ ;  $b^2 - 4ac = 0$ . Бесконечные ветви направлены вверх. Ордината вершины  $d$  равна нулю, т. е. вершина лежит на оси абсцисс и парабола касается оси абсцисс в одной точке (рис. 60).

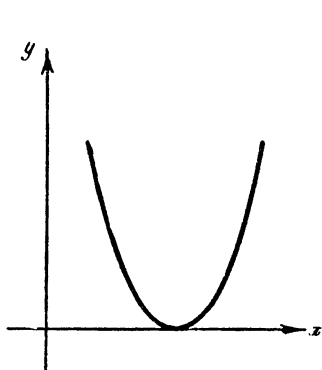


Рис. 60.

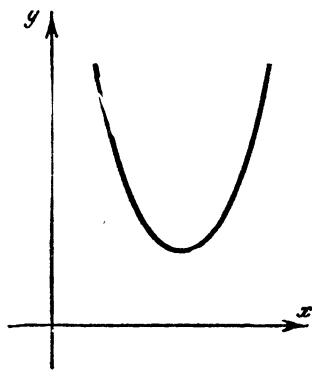


Рис. 61.

Таким образом, трехчлен  $ax^2 + bx + c$  имеет в этом случае только один корень.

Случай 3.  $a > 0$ ;  $b^2 - 4ac < 0$ . Бесконечные ветви параболы направлены вверх. Ордината вершины

$$d = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

положительна, т. е. вершина расположена выше оси абсцисс (рис. 61). Следовательно, и вся парабола расположена выше оси абсцисс и с ней не пересекается.

Трехчлен  $ax^2 + bx + c$  в этом случае действительных корней не имеет.

Случай 4.  $a < 0$ ;  $b^2 - 4ac > 0$ . В этом случае бесконечные ветви параболы направлены вниз. Ордината вершины

$$d = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

положительна, и следовательно, вершина лежит выше оси абсцисс (рис. 62). Следовательно, график пересекает ось абсцисс в двух точках, и потому трехчлен  $ax^2 + bx + c$  имеет два действительных корня.

Случай 5.  $a < 0$ ;  $b^2 - 4ac = 0$ . Бесконечные ветви направлены вниз. Ордината вершины

$$d = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

равна нулю (рис. 63). График касается оси абсцисс снизу в одной точке. Следовательно, трехчлен имеет один действительный корень.

Случай 6.  $a < 0$ ;  $b^2 - 4ac < 0$ . Бесконечные ветви графика направлены вниз. Ордината вершины

$$d = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

отрицательна, т. е. вершина лежит ниже оси абсцисс. Следовательно,

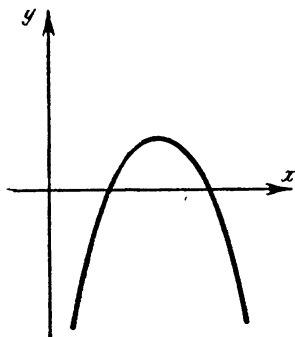


Рис. 62.

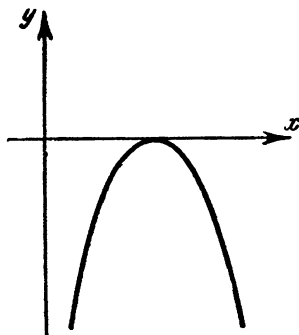


Рис. 63.

и весь график лежит ниже оси абсцисс и с ней не пересекается (рис. 64). Трехчлен  $ax^2 + bx + c$  не имеет действительных корней.

Итак, из геометрических соображений мы получили, что трехчлен  $ax^2 + bx + c$  имеет два действительных корня, если  $b^2 - 4ac > 0$  (случаи 1 и 4), один действительный корень, если  $b^2 - 4ac = 0$  (случаи 2 и 5), и не имеет действительных корней, если  $b^2 - 4ac < 0$  (случаи 3 и 6).

Эти результаты совпадают с результатами алгебраического исследования, проведенного в § 4 гл. II. Имеется только небольшая разница в описании случая  $b^2 - 4ac = 0$ . Именно, при алгебраическом исследовании единственный существующий в этом случае корень рассматривается как «двойной», т. е. как два совпадающих корня.

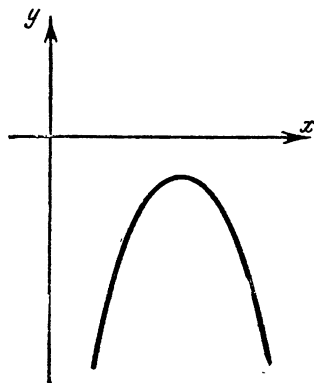


Рис. 64.

## § 9. Обратнo пропорциональная зависимость

Если значение функции изменяется обратно пропорционально значению независимой переменной, то такая функциональная зависимость называется *обратно пропорциональной зависимостью*. При обратно пропорциональной зависимости значения функции выражаются через

значения независимой переменной по формуле

$$y = \frac{k}{x},$$

где  $k$  — данный коэффициент.

Выясним вид графика обратно пропорциональной зависимости. Прежде всего построим график функции  $y = \frac{1}{x}$ . Естественной областью задания этой функции является совокупность всех действительных значений независимой переменной  $x$ , за исключением нуля. Поэтому при построении таблицы значений включаем ряд значений независимой переменной, близких к нулю, так как поведение функции вблизи нуля может быть весьма существенным при построении графика:

|     |                |                |                |                |      |                |                |                |                |               |               |               |               |     |               |               |               |               |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-----|---------------|---------------|---------------|---------------|
| $x$ | $-5$           | $-4$           | $-3$           | $-2$           | $-1$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$           | $3$           | $4$           | $5$           |
| $y$ | $-\frac{1}{5}$ | $-\frac{1}{4}$ | $-\frac{1}{3}$ | $-\frac{1}{2}$ | $-1$ | $-2$           | $-3$           | $-4$           | $-5$           | $5$           | $4$           | $3$           | $2$           | $1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{5}$ |

Нанеся вычисленные точки на чертеж и соединив их, получим график, изображенный на рис. 65. При безграничном увеличении значений  $x$  по абсолютной величине значения  $y$  становятся по абсолютной величине все меньше и меньше, приближаясь к нулю. При приближении значений  $x$  к нулю, значения  $y$  безгранично растут по абсолютной величине. График состоит из двух отдельных частей, каждая из которых имеет две бесконечные ветви. Одна из ветвей каждой части приближается к оси абсцисс, другая — к оси ординат. График функции  $y = \frac{1}{x}$  называется

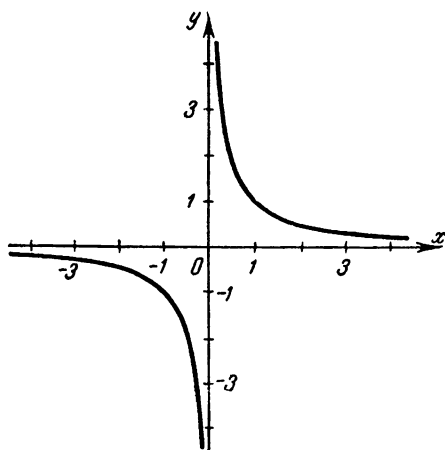


Рис. 65.

гиперболой.

Зависимость  $y = \frac{1}{x}$  можно

задать и уравнением  $xy = 1$ .

Из такой формы записи следует, что если точка  $(x_0, y_0)$  лежит на гиперболы, то и точка  $(y_0, x_0)$  лежит на ней. Очевидно, что точки  $(x_0, y_0)$  и  $(y_0, x_0)$  симметричны относительно биссектрисы правого верхнего координатного угла. Следовательно, и гиперболы симметрична относительно этой биссектрисы.



Далее, если точка  $(x_0, y_0)$  лежит на гиперболе, то и точка  $(-x_0, -y_0)$  лежит на гиперболе, ибо  $(-x_0)(-y_0) = x_0 y_0$ , и следовательно, если  $x_0 y_0 = 1$ , то и  $(-x_0)(-y_0) = 1$ . Точки  $(x_0, y_0)$  и  $(-x_0, -y_0)$  симметричны относительно начала координат. Следовательно, и гипербола симметрична относительно начала координат.

Заметим теперь, что если точки  $M$  и  $M'$  симметричны относительно некоторой прямой  $AB$ , а  $M'$  и  $M''$  симметричны относительно точки  $O$ , лежащей на этой прямой, то  $M$  и  $M''$  симметричны относительно прямой, проходящей через  $O$  и перпендикулярной к  $AB$  (рис. 66)

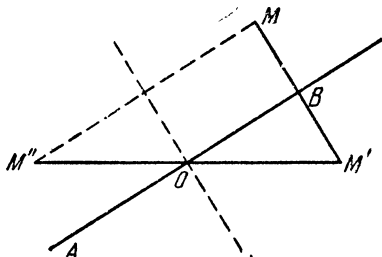


Рис. 66.

Поэтому из симметрии гиперболы относительно биссектрисы правого верхнего угла и относительно начала координат следует симметрия гиперболы и относительно биссектрисы правого нижнего угла, ибо она перпендикулярна первой биссектрисе и проходит через начало.

Таким образом, гипербола имеет две оси симметрии, из которых одна пересекает ее, другая не пересекает. Пересечение осей симметрии является *центром симметрии* гиперболы.

Рассмотрим теперь график функции  $y = \frac{k}{x}$ , где  $k$  — любое положительное число. Дадим несколько примеров графиков функции  $y = \frac{k}{x}$  при  $k = 3, 2, 1$  (рис. 67). Из этого построения видно, что графиком функции  $y = \frac{k}{x}$  является тоже гипербола, «растянутая» при  $k > 1$  и «сжатая» при  $k < 1$ .

Докажем, что график функции  $y = \frac{k}{x}$  есть действительно гипербола, т. е. что этот график совпадает с графиком  $y = \frac{1}{x}$ , но построенном в другом масштабе.

Обозначим  $\sqrt{k}$  через  $m$ . Тогда  $k = m^2$  и зависимость между  $x$  и  $y$  можно переписать в виде  $\frac{x}{m} \cdot \frac{y}{m} = 1$ . Введя, как во втором разделе § 7, вспомогательную единицу масштаба, величина которой равна  $m$  единиц основного масштаба, мы получим, что при переходе к вспомогательным координатам  $x', y'$  соотношение  $\frac{x}{m} \cdot \frac{y}{m} = 1$  превращается в  $x' y' = 1$ . Следовательно, график зависимости  $\frac{x}{m} \cdot \frac{y}{m} = 1$  в основных координатах совпадает с графиком зависимости  $x' y' = 1$  в вспомогательных координатах, т. е. является гиперболой. Эта гипербола получается из гиперболы  $xy = 1$  растяжением в  $m$  раз (при  $m > 1$ ) или сжатием в  $\frac{1}{m}$  раз (при  $m < 1$ ).

Итак, график функции  $y = \frac{k}{x}$  при положительном  $k$  является гиперболой, получающейся из гиперболы  $y = \frac{1}{x}$  растяжением в  $m = \sqrt{k}$  раз (или сжатием в  $\frac{1}{m} = \frac{1}{\sqrt{k}}$  раз).

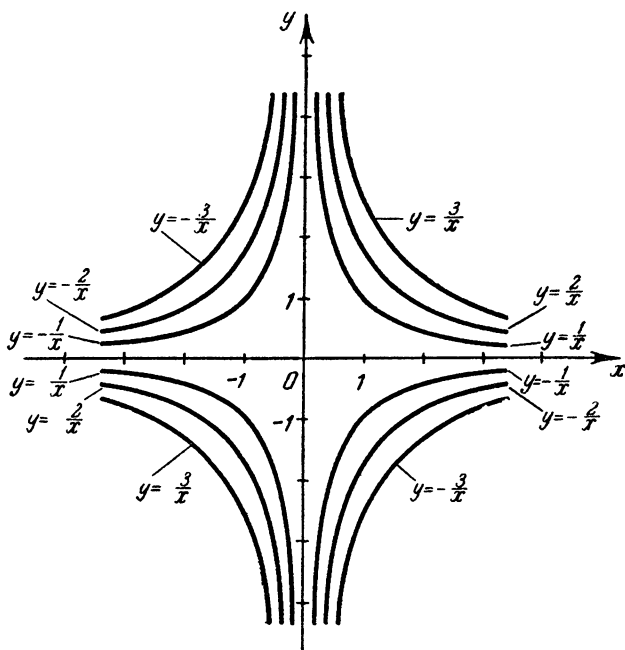


Рис. 67.

График функции  $y = \frac{k}{x}$  при отрицательном  $k$  симметричен относительно оси абсцисс с графиком  $y = \frac{k_1}{x}$ , где  $k_1 = -k > 0$ . Следовательно, график функции  $y = \frac{k}{x}$  при отрицательном  $k$  тоже является гиперболой, только расположенной в левом верхнем и правом нижнем углах. На рис. 67 изображены несколько гипербол  $y = \frac{k}{x}$ , при различных значениях для  $k$ .

## ГЛАВА IV

### СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

#### § 1. Системы двух уравнений первой и второй степени с двумя неизвестными

Общий вид многочлена второй степени от двух переменных  $u$  и  $x$ , очевидно, следующий:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

где  $a, b, c, d, e, f$  — данные числа. Общий вид системы уравнений с двумя неизвестными, состоящей из одного уравнения первой степени и одного уравнения второй степени, следующий:

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \\ mx + ny + p = 0. \end{cases}$$

Система такого вида легко решается способом подстановки. Именно, из второго уравнения можно выразить одно из неизвестных через другое и затем подставить в первое уравнение. В результате этого первое уравнение превратится в уравнение с одним неизвестным, вообще говоря, квадратное. Решив это уравнение, мы сможем определить затем и значения нового неизвестного.

При этом способе решения систем проверка полученных решений посредством подстановки в уравнение системы не обязательна и производится только для контроля правильности вычислений, ибо можно доказать, что при исключении одного неизвестного указанным способом лишних решений возникнуть не может.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + 4xy - y^2 - 3x + y - 4 = 0, \\ 2y - 3x = 1. \end{cases}$$

Решение. Исключим из системы неизвестное  $y$ . С этой целью решим второе уравнение относительно  $y$ . Получим  $y = \frac{1+3x}{2}$ . Затем подставим найденное выражение для  $y$  в первое уравнение. Получим

$$x^2 + 4x \frac{1+3x}{2} - \frac{(1+3x)^2}{4} - 3x + \frac{1+3x}{2} - 4 = 0,$$

откуда после преобразований

$$19x^2 - 4x - 15 = 0$$

и, следовательно,  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = -\frac{15}{19}$ . Соответствующие значения для  $y$  равны

$$y_1 = \frac{1+3}{2} = 2; \quad y_2 = \frac{1-\frac{45}{19}}{2} = -\frac{13}{19}.$$

*Ответ.* Система имеет два решения

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{15}{19}, \\ y_2 = -\frac{13}{19}. \end{cases}$$

Тот же прием исключения следует применять при решении систем трех уравнений с тремя неизвестными, если два уравнения имеют первую степень, третье квадратное. При этом из двух уравнений первой степени нужно выразить два неизвестных через третье неизвестное, и полученные выражения подставить в уравнение второй степени.

Таким же образом можно поступать при решении систем  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными при любом  $n$ , если все уравнения, кроме одного квадратного, имеют первую степень.

*Пример.* Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 54, \\ x - 2y + z = -1, \\ 3x - 5y + 2z = 2. \end{cases}$$

*Решение.* Перепишем два последних уравнения системы в виде

$$\begin{aligned} x - 2y &= -1 - z, \\ 3x - 5y &= 2 - 2z. \end{aligned}$$

Решая эту систему относительно  $x$  и  $y$  по обычным правилам, получим

$$\begin{cases} x = 9 + z, \\ y = 5 + z, \end{cases}$$

Подставив эти выражения в первое уравнение, получим

$$(9 + z)^2 + (5 + z)^2 + z^2 = 54,$$

откуда

$$3z^2 + 28z + 52 = 0; \quad z_1 = \frac{-14 + 2\sqrt{10}}{3}, \quad z_2 = \frac{-14 - 2\sqrt{10}}{3}.$$

Остается определить соответствующие значения для  $x$  и  $y$ , что делается подстановкой значений  $z_1$  и  $z_2$  в выражении  $x$  и  $y$  через  $z$ .

Мы получим два решения системы:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{13+2\sqrt{10}}{3}, \\ y_1 = \frac{1+2\sqrt{10}}{3}, \\ z_1 = \frac{-14+2\sqrt{10}}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{13-2\sqrt{10}}{3}, \\ y_2 = \frac{1-2\sqrt{10}}{3}, \\ z_2 = \frac{-14-2\sqrt{10}}{3}. \end{cases}$$

### Упражнения

Решить системы уравнений:

$$\begin{aligned} 1. \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19, \\ x + 2y = 8. \end{cases} & \quad 3. \begin{cases} x^2 - 2x + y^2 + 4y = 0, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases} \\ 2. \begin{cases} x^2 - xy - y^2 + x - y + 6 = 0, \\ y + 2x = 4. \end{cases} \end{aligned}$$

## § 2. Некоторые системы уравнений, решаемые особыми приемами

В гл. II, § 9 мы рассматривали системы уравнений вида

$$\begin{cases} x + y = a, \\ xy = b, \end{cases}$$

которые легко решаются при помощи формул Виета. Но, конечно, можно решать такие системы и способом исключения, описанным в предыдущем параграфе.

Часто встречающиеся системы уравнений вида

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x \pm y = b \end{cases}$$

легко решаются методом исключения, но их можно решать и иначе. Именно, возведя в квадрат второе уравнение и вычитая из него первое, мы получим новое уравнение

$$\pm 2xy = b^2 - a,$$

которое является следствием данной системы. Объединив его с уравнением

$$x + y = b,$$

мы получим систему, решаемую при помощи формул Виета.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Решение. Если  $x$  и  $y$  удовлетворяют уравнениям системы, то  $x^2 + 2xy + y^2 = 9$ , и следовательно,  $2xy = -8$ ;  $xy = -4$ . Таким образом, из данной системы следует система

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -4, \end{cases}$$

для которой получаем два решения

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Оба они удовлетворяют уравнениям исходной системы.

*Ответ.*

$$\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1, \\ y_2 = 4. \end{cases}$$

Еще проще решаются системы вида

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ x + y = b. \end{cases}$$

Действительно,  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ , и потому если допустить, что  $x$  и  $y$  удовлетворяют обоим уравнениям системы, то  $(x - y)b = a$ , и следовательно,  $x - y = \frac{a}{b}$ , что вместе с уравнением  $x + y = b$  дает систему двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, являющуюся следствием исходной системы, которую легко решить. Таким же образом решается и система вида

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a, \\ x - y = b. \end{cases}$$

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 15, \\ x - y = 3. \end{cases}$$

Решение. Если  $x$  и  $y$  удовлетворяют уравнениям системы, то

$$15 = (x - y)(x + y) = 3(x + y),$$

и следовательно,  $x + y = 5$ . Решая систему

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 3, \end{cases}$$

получим  $x = 4$ ;  $y = 1$ .

*Ответ.*  $x = 4$ ;  $y = 1$ .

Наконец отметим системы вида

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ xy = b. \end{cases}$$

Такие системы уравнений можно решить способом исключения, именно, в силу второго уравнения  $y = \frac{b}{x}$ , что при подстановке в первое уравнение дает уравнение относительно  $x$ , легко сводящееся к биквадратному.

Однако здесь следует рекомендовать другой прием. Именно, если к первому уравнению добавить, а затем вычесть удвоенное второе, то мы получим новую систему

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = a + 2b, \\ x^2 - 2xy + y^2 = a - 2b, \end{cases}$$

являющуюся следствием исходной.

Но новая система легко решается, ибо из нее следует, что

$$\begin{cases} x + y = \pm \sqrt{a + 2b}, \\ x - y = \pm \sqrt{a - 2b}, \end{cases}$$

и система распадается на 4 системы уравнений первой степени

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + y = \sqrt{a + 2b}, \\ x - y = \sqrt{a - 2b}, \end{cases} & \begin{cases} x + y = \sqrt{a + 2b}, \\ x - y = -\sqrt{a - 2b}, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -\sqrt{a + 2b}, \\ x - y = \sqrt{a - 2b}, \end{cases} & \begin{cases} x + y = -\sqrt{a + 2b}, \\ x - y = -\sqrt{a - 2b}. \end{cases} \end{aligned}$$

Следует отметить, что сопоставление результатов решения рассмотренной системы по способу исключения и при помощи указанного искусственного приема приводит к тем же соотношениям, которые были получены из сопоставления двух способов решения биквадратного уравнения.

### Упражнения

Решить системы уравнений:

$$1. \begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 + y^2 = \frac{13}{2}, \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x - y = 2, \\ x^2 - y^2 = \frac{13}{2}. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 12. \end{cases}$$

### § 3. Системы двух уравнений второй степени, не содержащие линейных членов

Решение системы двух уравнений второй степени с двумя неизвестными общего вида

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0 \end{cases}$$

представляет значительные трудности. Именно, можно доказать, что решение такой системы зачастую сводится к решению уравнения четвертой степени, а нахождение решения общего уравнения четвертой степени представляет довольно сложную задачу, не входящую в рамки курса элементарной алгебры.

Для некоторых систем частного вида возможно элементарное решение. Важным примером таких систем являются системы двух квадратных уравнений, каждое из которых не содержит членов первой степени относительно неизвестных, т. е. системы вида

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + f = 0, \\ a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + f_1 = 0. \end{cases}$$

В этом случае система решается посредством уничтожения свободных членов. Это делается так. Первое уравнение умножается на  $f_1$ , второе на  $f$  и полученные уравнения вычитаются. Составленное так новое уравнение является следствием исходной системы и имеет вид  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ , из которого следует, что

$$A\left(\frac{x}{y}\right)^2 + B\left(\frac{x}{y}\right) + C = 0$$

(если только  $y \neq 0$ ), откуда мы можем определить отношение  $\frac{x}{y}$ . Найдя это отношение, мы можем выразить  $x$  через  $y$  и затем подставить в одно из уравнений исходной системы. Получившееся в результате неполное квадратное уравнение относительно  $y$  легко решается.

Нетрудно видеть, что если  $A \neq 0$  и хотя бы один из свободных членов в исходных уравнениях отличен от 0, то сделанное выше предположение  $y \neq 0$  не нарушает общности.

Действительно, если в уравнении  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$  при  $A \neq 0$  положим  $y = 0$ , то и  $x = 0$ . Но  $x = 0$ ;  $y = 0$  не может быть решением исходной системы, если хотя бы один из ее свободных членов отличен от нуля.

Если же коэффициент  $A = 0$ , то решение вспомогательного уравнения  $Bxy + Cy^2 = 0$  только упрощается, для решения достаточно вынести за скобку  $y$  и приравнять к нулю каждый множитель.

**Пример.** Решить уравнение

$$\begin{aligned} x^2 - 3xy + 5y^2 &= 3, \\ 2x^2 + xy - 3y^2 &= 7. \end{aligned}$$

**Решение.** Умножив первое уравнение на 7 и второе на 3, получим после вычитания

$$x^2 - 24xy + 44y^2 = 0,$$

откуда

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 24\left(\frac{x}{y}\right) + 44 = 0; \quad \frac{x}{y} = 22 \quad \text{или} \quad \frac{x}{y} = 2.$$



Таким образом,  $x = 22y$  или  $x = 2y$ . Дальнейшее очевидно. Доведя решение до конца, получим четыре решения системы

$$\begin{cases} x_1 = \frac{22}{\sqrt{141}}, \\ y_1 = \frac{1}{\sqrt{141}}, \end{cases} \begin{cases} x_2 = -\frac{22}{\sqrt{141}}, \\ y_2 = -\frac{1}{\sqrt{141}}, \end{cases} \begin{cases} x_3 = 2, \\ y_3 = 1, \end{cases} \begin{cases} x_4 = -2, \\ y_4 = -1. \end{cases}$$

### Упражнения

Решить системы уравнений:

$$1. \begin{cases} x^2 - y^2 = 7, \\ x^2 + xy + y^2 = 37. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 11, \\ x^2 - xy = 6. \end{cases}$$

## § 4. Несколько приемов решения систем уравнений высших степеней

Задача о решении системы уравнений высших степеней с несколькими неизвестными в общем случае является очень трудной, часто не допускающей решения средствами элементарной алгебры. Однако во многих случаях, комбинируя известные методы решения уравнений и систем уравнений — метод сложения и вычитания, исключения неизвестного с помощью подстановки, введения нового неизвестного — удается найти путь к решению системы. Но в каждой отдельной задаче приходится использовать ее частные особенности для того, чтобы найти удачный метод решения. Рассмотрим несколько примеров.

**Пример.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 18, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

**Решение. Способ 1.** Из второго уравнения находим, что  $y = 3 - x$ . Подставив в первое уравнение, получаем

$$x^3 + (3 - x)^3 = 18$$

и, после упрощений,

$$1 - 3x + x^2 = 0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}; \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Соответствующие значения для  $y$  будут такими:

$$y_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \quad y_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Система имеет два решения.

Способ 2. Представим  $x^3 + y^3 = 18$  как

$$(x + y)^3 - 3xy(x + y) = 18.$$

Принимая во внимание второе уравнение, получим  $27 - 9xy = 18$ , откуда  $xy = 1$ .

Система

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 1 \end{cases}$$

есть следствие исходной, но и исходная есть следствие преобразованной, ибо если  $x + y = 3$ ;  $xy = 1$ , то

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 18.$$

Решая преобразованную систему при помощи формул Виета, получим те же два решения:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \\ y_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \\ y_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \end{cases}$$

$$\text{Ответ. } x_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad y_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2};$$

$$x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad y_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 343, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Решение. Исключение одной из неизвестных величин приводит к решению уравнения четвертой степени, в котором все коэффициенты отличны от нуля. Поэтому лучше избежать этого пути. Это легко сделать, введя новую неизвестную  $z = xy$ . Тогда

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 25 - 2z,$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (25 - 2z)^2 - 2z^2 = 625 - 100z + 2z^2.$$

Таким образом, для  $z$  получаем уравнение

$$2z^2 - 100z + 625 = 343,$$

откуда  $z_1 = 47$ ;  $z_2 = 3$ .

Итак, данная система расщепилась на две системы:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 47 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 3, \end{cases}$$

первая из которых не имеет действительных решений, а вторая имеет следующие решения:

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}; \quad y_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}; \quad y_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Ответ. } x_1 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}; \quad y_1 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2};$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}; \quad y_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}.$$

Указанный прием удобно применять к системам двух уравнений с двумя неизвестными, в случае если каждое из уравнений симметрично относительно  $x$  и  $y$ , т. е. если уравнения не изменяются при перемене  $x$  и  $y$  местами.

Пример. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 5, \\ xz = 10, \\ yz = 18. \end{cases}$$

Решение. Перемножив уравнения системы, получим

$$x^2 y^2 z^2 = 5 \cdot 10 \cdot 18 = 5^2 \cdot 2^3 \cdot 3^2,$$

откуда  $xyz = \pm 30$ . Но так как  $xy = 5$ , то отсюда следует, что  $5z = \pm 30$  и  $z = \pm 6$ . Теперь  $x$  и  $y$  легко определить из второго и третьего уравнений системы. Мы приходим к двум решениям:

$$x_1 = \frac{5}{3}; \quad y_1 = 3; \quad z_1 = 6 \quad \text{и} \quad x_2 = -\frac{5}{3}; \quad y_2 = -3; \quad z_2 = -6.$$

$$\text{Ответ. } x_1 = \frac{5}{3}; \quad y_1 = 3; \quad z_1 = 6;$$

$$x_2 = -\frac{5}{3}; \quad y_2 = -3; \quad z_2 = -6.$$

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} xy(x+y) = 42, \\ x^2 y^2 (x^2 + y^2) = 1078. \end{cases}$$

Решение. Возвысив обе части первого уравнения в квадрат, получим

$$x^2 y^2 (x^2 + 2xy + y^2) = 1764.$$

Вычитая из этого уравнения второе уравнение данной системы, получим  $2x^3 y^3 = 686$ , откуда  $(xy)^3 = 343$ ;  $xy = 7$ . Теперь из первого уравнения данной системы находим, что  $x + y = \frac{42}{7} = 6$ . Итак, решение данной системы свелось к решению системы

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 7, \end{cases}$$

откуда

$$x_1 = 3 + \sqrt{2}; \quad y_1 = 3 - \sqrt{2} \quad \text{и} \quad x_2 = 3 - \sqrt{2}; \quad y_2 = 3 + \sqrt{2}.$$

$$\text{Ответ. } x_1 = 3 + \sqrt{2}; \quad y_1 = 3 - \sqrt{2}; \\ x_2 = 3 - \sqrt{2}; \quad y_2 = 3 + \sqrt{2}.$$

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} (x+1)^2(y+1)^2 = 27xy, \\ (x^2+1)(y^2+1) = 10xy. \end{cases}$$

Решение. В первом уравнении раскроем скобки в каждом множителе. Затем поделим обе части обоих уравнений на  $xy$ . Получим

$$\begin{cases} \left(x + 2 + \frac{1}{x}\right)\left(y + 2 + \frac{1}{y}\right) = 27, \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = 10. \end{cases}$$

Теперь введем новые неизвестные  $x + \frac{1}{x} = z$ ;  $y + \frac{1}{y} = t$ . В новых неизвестных преобразованная система имеет такой вид:

$$\begin{cases} (z+2)(t+2) = 27, \\ zt = 10. \end{cases}$$

Эта система легко решается. Получаем:

$$z_1 = \frac{5}{2}, \quad t_1 = 4; \quad z_2 = 4, \quad t_2 = \frac{5}{2}.$$

Далее находим значения для  $x$  и  $y$  из уравнений  $x + \frac{1}{x} = z$ ;  $y + \frac{1}{y} = t$ .

Всего получим восемь решений:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 2 + \sqrt{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 2, \\ y_2 = 2 - \sqrt{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{1}{2}, \\ y_3 = 2 + \sqrt{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = \frac{1}{2}, \\ y_4 = 2 - \sqrt{3}, \end{cases} \\ &\begin{cases} x_5 = 2 + \sqrt{3}, \\ y_5 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_6 = 2 - \sqrt{3}, \\ y_6 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_7 = 2 + \sqrt{3}, \\ y_7 = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} x_8 = 2 - \sqrt{3}, \\ y_8 = \frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Многообразие приемов, которые могут применяться при решении систем уравнений высших степеней, неисчерпаемо, и тем не менее найти путь к решению данной системы удастся далеко не всегда. Важно проявлять изобретательность при решении системы в тех случаях, когда это возможно.

## Упражнения

Решить системы уравнений:

$$\begin{array}{lll}
 1. \begin{cases} z(x+y)=9, \\ x(y+z)=5, \\ y(x+z)=8. \end{cases} & 2. \begin{cases} x^4+y^4=97, \\ x-y=1. \end{cases} & 3. \begin{cases} xy+x+y=11, \\ xz+x+z=14, \\ yz+y+z=19. \end{cases} \\
 4. \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ x+y=7. \end{cases} & 5. \begin{cases} x^3+3xy^2=a, \\ 3x^2y+y^3=b. \end{cases} & 
 \end{array}$$

## § 5. Графическое решение уравнений с одним неизвестным

Как уже было сказано, алгебраические методы решения систем уравнений далеко не всегда применимы. Но для целей практики бывает важно находить решения систем уравнений хотя бы приближенно. Эта цель хорошо достигается применением графических методов. Сначала рассмотрим применение графиков к приближенному решению одного уравнения с одним неизвестным.

Пусть дано уравнение  $x^2 - 4x + 1 = 0$ . Для того чтобы графически решить такое уравнение, рассматриваем неизвестное  $x$  как независимое переменное, а левую часть уравнения как функцию этой переменной, т. е. введем в рассмотрение функцию  $y = x^2 - 4x + 1$ .

Решить предложенное уравнение — значит узнать, при каких значениях независимой переменной  $x$  функция  $y$  обращается в нуль.

Точки графика, соответствующие таким значениям независимой переменной, лежат на оси абсцисс, ибо ордината каждой такой точки равна нулю. Следовательно, интересующие нас точки графика являются точками пересечения графика с осью абсцисс, а корни уравнения  $x^2 - 4x + 1 = 0$  являются абсциссами этих точек пересечения. При этом абсцисса каждой точки пересечения графика с осью абсцисс является корнем уравнения  $x^2 - 4x + 1 = 0$ .

Строим график функции  $y = x^2 - 4x + 1$ . Он имеет вид параболы с вершиной в точке (2, -3) (рис. 68). По чертежу находим, что  $x_1 \approx 0,3$ ;  $x_2 \approx 3,7$ . В действительности

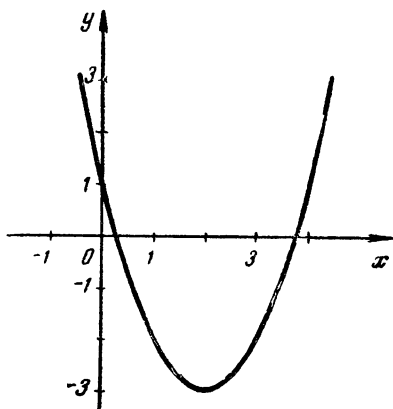


Рис. 68.

$$x_1 = 2 - \sqrt{3} = 0,268\dots,$$

$$x_2 = 2 + \sqrt{3} = 3,732\dots$$

Совершенно такие же рассуждения можно применить к любому уравнению  $y=0$ , где  $y$  есть алгебраическое выражение от неизвестной  $x$ . Именно, для графического решения такого уравнения нужно построить график выражения  $y$ , рассматриваемого как функция от переменной  $x$ , и найти точки пересечения этого графика с осью абсцисс. Абсциссы точек пересечения будут корнями уравнения. Конечно, при графическом решении уравнений корни получаются приближенно и довольно грубо, так как на чертеже произвести измерение абсцисс с высокой степенью точности невозможно.

Пример. Решить уравнение

$$x^3 - 4x + 1 = 0.$$

Решение. Строим график функции  $y = x^3 - 4x + 1$ , вычислив предварительно таблицу значений:

| $x$ | -3  | -2 | -1 | 0 | 1  | 2 | 3  |
|-----|-----|----|----|---|----|---|----|
| $y$ | -14 | 1  | 4  | 1 | -2 | 1 | 16 |

По результатам этих вычислений мы видим, что при изменении  $x$  от  $-3$  до  $-2$  функция переходит от отрицательных значений

к положительным, на участке от 0 до 1 переходит от положительных значений к отрицательным и на участке от 1 до 2 снова от отри-

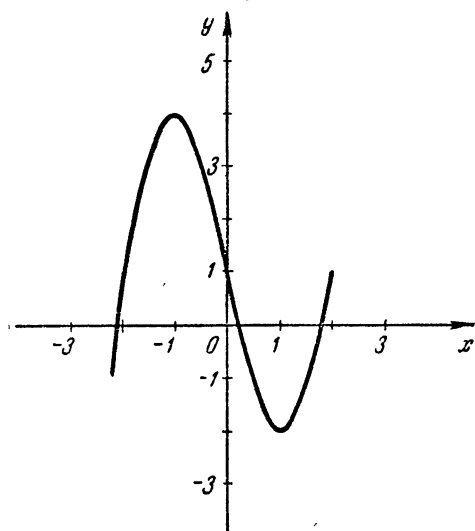


Рис. 69.

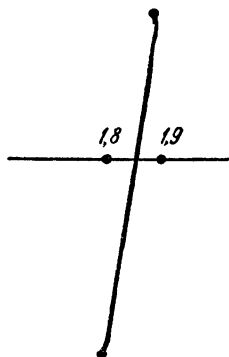


Рис. 70.

пательных значений к положительным. На этих участках и следует ожидать, что график пересечет ось абсцисс.

Проводим вычисления для некоторых промежуточных значений  $x$ , взятых на этих участках с целью уточнения хода функции:

|     |                 |                |                 |
|-----|-----------------|----------------|-----------------|
| $x$ | $-2\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$  | $1\frac{1}{2}$  |
| $y$ | $-4\frac{5}{8}$ | $-\frac{7}{8}$ | $-1\frac{5}{8}$ |

Теперь построим график по всем вычисленным точкам, соединив их плавной линией (рис. 69).

Из этого чертежа мы получаем:  $x_1 \approx -2,1$ ;  $x_2 \approx 0,3$ ;  $x_3 \approx 1,8$ .

Для того чтобы уточнить значения корней, следует построить в большем масштабе участки графика, примыкающие к корням, вычислив дополнительно значения функции на этих участках. Например, для уточнения корня  $x_3$  проведем следующее вычисление:

|     |        |       |
|-----|--------|-------|
| $x$ | 1,8    | 1,9   |
| $y$ | -0,368 | 0,259 |

Изобразим эти точки на чертеже, приняв большую единицу масштаба (рис. 70).

На таком малом участке изменения  $x$  мы вправе считать, что график очень близок к прямой линии. Исходя из этого предположения, получим  $x_3 \approx 1,86$ .

### Упражнения

Решить графически уравнения с одним неизвестным:

1.  $\frac{1}{4}x^3 - x + \frac{1}{2} = 0$ .    2.  $x^2 + 1 - \frac{1}{x} = 0$ .    3.  $x^3 - x - \frac{1}{3} = 0$ .

## § 6. Графическое решение систем двух уравнений с двумя неизвестными

Пусть дана система уравнений с двумя неизвестными  $x$  и  $y$ . Каждое из этих уравнений, взятое отдельно, определяет зависимость между величинами  $x$  и  $y$ .

Построим на одном чертеже графики этих зависимостей. Числа  $(x_0, y_0)$ , образующие решение системы, должны удовлетворять обоим уравнениям системы, а следовательно, точка с координатами  $(x_0, y_0)$  должна лежать на графиках обоих зависимостей, т. е. должна являться точкой пересечения этих графиков.

Обратно, координаты  $(x_0, y_0)$  любой точки пересечения построенных графиков удовлетворяют обоим уравнениям системы, т. е. образуют решение системы.

Таким образом, для того чтобы графически решить систему двух уравнений с двумя неизвестными, нужно построить график для каждого из уравнений и найти точки пересечения этих графиков. Координаты каждой точки пересечения образуют решение системы.

Пример. Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = 2x^2 - 2x - 3. \end{cases}$$

Решение. Алгебраическое решение этой системы затруднительно. Хотя неизвестное  $y$  и легко исключается посредством подстановки в первое уравнение его

выражения через  $x$  из второго уравнения, но в результате такого исключения получается уравнение четвертой степени относительно  $x$ , решение которого выходит за рамки элементарного курса алгебры.

Обратимся к построению графиков. Графиком зависимости  $x^2 + y^2 = 9$  является, как мы видели (гл. III, § 3, третий пример), окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 3. Графиком зависимости  $y = 2x^2 - 2x - 3$  является парабола, которую легко построить по таблице значений (рис. 71).

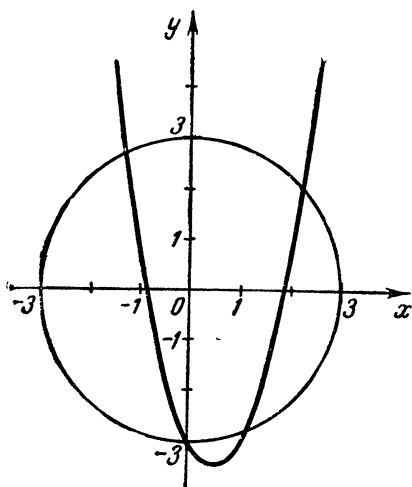


Рис. 71.

Графики пересекаются в четырех точках, координаты которых суть приблизительно  $(-1,2; 2,7)$ ;  $(0; -3)$ ;  $(1,1; -2,8)$  и  $(2,2; 2,0)$ .

Следовательно, данная система имеет четыре решения

$$\begin{cases} x_1 \approx -1,2, \\ y_1 \approx 2,7, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \approx 0, \\ y_2 \approx -3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 \approx 1,1, \\ y_3 \approx -2,8, \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 \approx 2,2, \\ y_4 \approx 2,0. \end{cases}$$

Второе решение оказывается точным. Остальные три — приближенные.

Графическое решение системы двух уравнений с двумя неизвестными почти не сложнее графического решения одного уравнения с одним неизвестным, а иногда даже проще.



Поэтому часто бывает полезно преобразовать посредством введения нового неизвестного одно уравнение с одним неизвестным в систему двух уравнений с двумя неизвестными, а затем решать эту систему графически. При таком преобразовании следует заботиться о том, чтобы построение графиков обоих уравнений полученной системы было как можно проще.

Рассмотрим несколько примеров на применение этого приема.

Пример. Решить графически уравнение

$$x^2 - x - 1 = 0.$$

Решение. Представим предложенное уравнение в виде  $x^2 = x + 1$ . Мы видим, что в левой и правой частях уравнения находятся некоторые функции от  $x$ . Решить уравнение — значит найти, при каких значениях независимого параметра обе функции принимают равные значения. Графически это означает, что нужно найти абсциссы точек пересечения графиков функций  $y = x^2$  и  $y = x + 1$ .

Действительно, если при  $x = a$   $a^2 = a + 1$ , то это значит, что точка  $(a, a^2)$  совпадает с точкой  $(a, a + 1)$  и, следовательно, принадлежит как графику функции  $y = x^2$ , так и графику функции  $y = x + 1$ .

Очевидно и обратное. Если графики функций  $y = x^2$  и  $y = x + 1$  пересекаются в точке  $(a, b)$ , то  $b = a^2 = a + 1$  и, следовательно, при  $x = a$  обе функции принимают равные значения. Все сказанное можно коротко изложить так.

Вводим новую неизвестную  $y = x^2$ . Тогда данное уравнение переходит в уравнение  $y - x - 1 = 0$ , которое вместе с введенной зависимостью дает систему

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 1, \end{cases}$$

Графиком зависимости  $y = x^2$  является парабола, графиком зависимости  $y = x + 1$  — прямая линия (рис. 72). Решение задачи дают абсциссы точек пересечения. Они равны приблизительно:  $x_1 \approx -0,6$ ;  $x_2 \approx 1,6$ .

Любое приведенное квадратное уравнение  $x^2 + px + q = 0$  может быть решено тем же образом, посредством преобразования в систему

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y + px + q = 0. \end{cases}$$

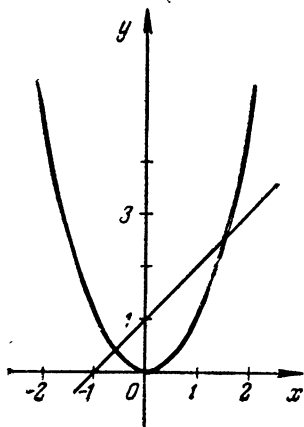


Рис. 72.

Это удобно тем, что графиком первой зависимости является одна и та же парабола, а графиком второй зависимости является прямая линия, которую очень легко построить в каждом частном случае по двум точкам. Поэтому, тщательно построив в большом масштабе параболу  $y = x^2$ , мы получаем возможность быстро решать любое приведенное квадратное уравнение.

Подобным образом для решения кубического уравнения, имеющего вид  $x^3 + px + q = 0$ , достаточно заготовить график функции  $y = x^3$ . Абсциссы точек пересечения этого графика с прямой  $y + px + q = 0$  дают корни уравнения  $x^3 + px + q = 0$ .

Пример. Превратив в систему, решить графически уравнение

$$x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Решение. Это делают приемом, указанным выше. Однако это можно сделать и иначе. Именно, переписем уравнение в виде  $x(x^2 - 4) + 1 = 0$

и положим  $x^2 - 4 = y$ . Уравнение заменится системой

$$\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ xy + 1 = 0. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения системы является парабола, графиком второго — гипербола (рис. 73). Абсциссы точек пересечения суть  $x_1 \approx -2,2$ ;  $x_2 \approx 0,3$ ;  $x_3 \approx 1,9$ .

Этим приемом можно решить любое кубическое уравнение

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

сведя его к системе

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c, \\ xy + d = 0. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения является парабола, графиком второго — гипербола.

Решение уравнения четвертой степени  $ax^4 + bx^3 + cx + d = 0$  при  $c \neq 0$  легко сводится к определению точки пересечения двух парабол. Для этого вводим новое неизвестное  $y = x^2$  и уравнение заменяем системой

$$\begin{cases} y = x^2, \\ ay^2 + by + d + cx = 0. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения является парабола с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с осью ординат. Графиком второго уравнения тоже является парабола, но только ее ось параллельна оси абсцисс. Действительно, решив второе уравнение относительно  $x$ , мы получим

$$x = -\frac{a}{c}y^2 - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c},$$

т. е.  $x$  является квадратичной функцией от  $y$ , графиком которой является парабола с осью, параллельной оси абсцисс.

Из рассмотренных примеров ясно, что каждое данное уравнение с одним неизвестным можно преобразовать в систему двух уравнений с двумя неизвестными многими способами и при выборе какого-нибудь способа следует заботиться о наиболее выгодном расположении графиков на чертеже.

### Упражнения

Решить графически системы уравнений:

$$1. \begin{cases} y^2 + x = 3, \\ x^2 + y = 1. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = x^2 - x. \end{cases}$$

Решить графически уравнения с одним неизвестным, превратив их в системы:

$$3. x^3 - 2x - 1 = 0. \quad 4. x^4 + 2x^2 - x - 3 = 0.$$

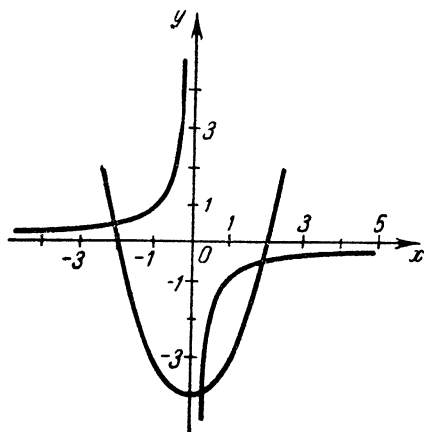


Рис. 73.

## § 7. Уточнение корня уравнения или решения системы нелинейных уравнений, исходя из грубого приближения

При графическом решении корень уравнения или решение системы уравнений определяется лишь грубо приближенно. Уточнение результата за счет увеличения масштаба не очень эффективно, так как повышение точности требует пропорционального увеличения масштаба. Например, чтобы определить новую значащую цифру после запятой в десятичном разложении корня, т. е. увеличить точность в 10 раз, нужно и масштаб увеличить в 10 раз.

Однако существует весьма хорошо действующий алгебраический способ для подобного рода уточнения. Мы не будем излагать его в общем виде, а ограничимся только рассмотрением примеров его применения.

**Пример.** Для уравнения  $x^3 - 4x + 1 = 0$  известно приближенное значение одного из корней  $x \approx 1,8$ . Требуется вычислить этот корень с большей точностью.

**Решение.** Поступаем так. Положим  $x = 1,8 + h$ , где  $h$  — новая неизвестная. Мы можем быть уверены, что  $h$  есть маленькое число, во всяком случае меньшее, чем 0,1. Подставив в уравнение вместо  $x$  его выражение через  $h$ , получим

$$5,832 + 9,72h + 5,4h^2 + h^3 - 7,2 - 4h + 1 = 0$$

или

$$-0,368 + 5,72h + 5,4h^2 + h^3 = 0.$$

Так как  $h^2$  меньше  $h$  во столько же раз, во сколько  $h$  меньше единицы, для приближенного вычисления  $h$  отбросим в полученном уравнении члены с  $h^2$  и  $h^3$ . Получим

$$-0,368 + 5,72h \approx 0, \quad h \approx \frac{0,368}{5,72} \approx 0,06.$$

Итак,

$$x \approx 1,8 + 0,06 = 1,86.$$

Для дальнейшего уточнения мы можем еще раз применить тот же прием. Положим  $x \approx 1,86 + h_1$ . Для  $h_1$  получим, отбрасывая члены, содержащие  $h_1^2$  и  $h_1^3$ , приближенное уравнение

$$-0,005144 + 6,3788h_1 = 0.$$

(При этом нет надобности вычислять коэффициенты при  $h_1^2$  и  $h_1^3$ , ибо соответствующие члены мы все равно отбрасываем.) Отсюда  $h_1 \approx 0,0008$  и, следовательно,  $x \approx 1,8608$ .

Продолжая этот прием, мы можем получить значение корня уравнения с любой степенью точности.

В общем виде идея метода такова. Если  $x_0$  есть приближенное значение корня данного уравнения, мы полагаем в уравнении  $x = x_0 + h$  и в полученном уравнении относительно  $h$  отбрасываем члены, содержащие  $h$  выше, чем в первой степени, и решаем приближенно получившееся уравнение первой степени относительно  $h$ . Тогда число  $x_1 = x_0 + h$  оказывается, вообще говоря, значительно лучшим приближением к корню, чем исходное приближение  $x_0$ . В случае надобности процесс можно повторить.

**Пример.** Для одного решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = 2x^2 - 2x - 3 \end{cases}$$

известны приближенные значения  $x \approx 2,2$ ,  $y \approx 2,0$ . Найти решение с большей точностью.

**Решение.** Будем действовать тем же способом, как при уточнении корня одного уравнения с одним неизвестным. Именно, положим  $x = 2,2 + h$ ;  $y = 2,0 + k$  и, подставив в уравнение, отбросим все члены, содержащие  $h^2$ ,  $k^2$ ,  $hk$ , так как эти величины значительно меньше самих  $h$  и  $k$ . Получим

$$4,84 + 4,4h + 4 + 4k \approx 9,$$

$$2 + k \approx 9,68 + 8,8h - 4,4 - 2h - 3.$$

Решив эту систему, получим  $h \approx -0,03$ ,  $k \approx 0,07$ . Таким образом, уточненными значениями для  $x$  и  $y$  являются значения

$$x \approx 2,2 - 0,03 = 2,17,$$

$$y \approx 2,0 + 0,07 = 2,07.$$

Для дальнейшего уточнения можно повторить тот же процесс.

### Упражнения

1. Определить с точностью до 0,0001 все корни уравнения  $x^3 - 4x + 1 = 0$ , исходя из приближений, найденных графически.

2. Определить с точностью до 0,01 все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = 2x^2 - 2x - 3, \end{cases}$$

исходя из приближений, найденных графически.

---

## ГЛАВА V

### ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЧИСЕЛ

#### § 1. Основные определения

В этой главе мы познакомимся с одним из основных понятий математики — с понятием *последовательности*. Простейшим примером последовательности служит последовательность всех натуральных чисел

$$1, 2, 3, 4, \dots, \quad (1)$$

расположенных в порядке возрастания. Другими примерами являются:

а) последовательность всех чисел, обратных натуральным

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \quad (2)$$

расположенных в порядке убывания;

б) последовательность всех нечетных чисел первого десятка

$$1, 3, 5, 7, 9, \quad (3)$$

расположенных в порядке возрастания.

Каждое число, входящее в последовательность, называется *членом последовательности*.

Последовательности могут быть как *бесконечными*, число членов которых бесконечно, так и *конечными*, число членов которых конечно. Например, последовательность (1) бесконечная, последовательность (3) конечная.

Член последовательности, находящийся на первом месте, называется *первым членом* этой последовательности, член последовательности, находящийся на втором месте, называется *вторым членом* последовательности и т. д. Таким образом, каждый член последовательности имеет свой номер, который указывает место этого члена в последовательности.

Если последовательность задана и известен номер места, которое занимает число в этой последовательности, то известно и само число. Например, в последовательности (1) на тысячном месте находится 1000. В последовательности (2) на двадцатом месте находится  $\frac{1}{20}$ .

В последовательности (1) все члены различны между собой. То же самое можно сказать о последовательностях (2) и (3). Примерами последовательностей, среди членов которых имеются равные друг другу числа, являются:

а) последовательность

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots, \quad (4)$$

в которой на месте с нечетным номером находится 1, а на месте с четным номером находится 0;

б) последовательность

$$5, 5, 5, 5, \dots, \quad (5)$$

на каждом месте которой находится число 5.

Последовательности (1), (2), (3), (4), (5) были заданы посредством описания их словами. Другой способ задания последовательности состоит в том, что дают формулу ее *общего члена*. С этой целью члены последовательности обозначаются буквами. Например, так:  $u_1$  — первый член,  $u_2$  — второй член и т. д. Таким образом последовательность имеет вид

$$u_1, u_2, u_3, \dots$$

Если теперь указать как  $u_n$  выражается через свой номер  $n$ , последовательность будет задана. Член  $u_n$  называется *общим членом последовательности*.

Например, общий член последовательности (1) определяется формулой

$$u_n = n;$$

общий член последовательности (2) определяется формулой

$$u_n = \frac{1}{n};$$

общий член последовательности (4) определяется формулой

$$u_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}.$$

общий член последовательности (5) определяется формулой

$$u_n = 5.$$

Иногда последовательность обозначается знаком

$$\{u_n\}.$$

Например,  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  — последовательность всех чисел, обратных натуральным.

Если формула общего члена последовательности известна, можно по этой формуле вычислить любой член последовательности, не вы-

числя при этом предыдущих. Бывают случаи, когда формула общего члена последовательности неизвестна, но известно правило. пользуясь которым, можно вычислить любой ее член. В таких случаях последовательность считается также заданной. Например, правило приближенного извлечения квадратного корня из чисел известно, поэтому можно считать заданной последовательность

$$1; 1,4; 1,41; \dots$$

десятичных приближенных значений  $\sqrt{2}$  с точностью до 1; 0,1; 0,01; ... с недостатком.

При любом способе задания последовательности каждый член ее определяется номером занимаемого им места. Поэтому возможно такое определение последовательности: *последовательность — это функция натурального аргумента*. Каждый член последовательности является соответствующим значением функции. Например, последовательность  $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$  получится, если в выражении  $\frac{1}{n}$  давать аргументу  $n$  значения 1, 2, 3, ...

Последовательность называется *возрастающей*, если каждый последующий член ее не меньше предыдущего, т. е. если

$$u_{k+1} \geq u_k.$$

Последовательность называется *строго возрастающей*, если каждый последующий член ее больше предыдущего, т. е. если

$$u_{k+1} > u_k.$$

Например, последовательность всех простых чисел, расположенных в порядке их возрастания:

$$2, 3, 5, 7, 11, \dots$$

есть возрастающая последовательность (строго возрастающая).

Последовательность называется *убывающей*, если каждый последующий член ее не больше предыдущего, т. е. если

$$u_{k+1} \leq u_k.$$

Последовательность называется *строго убывающей*, если каждый последующий член ее меньше предыдущего, т. е. если

$$u_{k+1} < u_k.$$

Например, последовательность всех чисел, обратных простым, расположенная в порядке их убывания, т. е.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \dots$$

есть убывающая последовательность (строго убывающая).

Последовательность называется *ограниченной*, если все члены ее по абсолютной величине меньше некоторого числа. Например, последовательность

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

общий член которой  $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ , — ограниченная. Все члены этой последовательности по абсолютной величине меньше единицы.

Последовательность называется *неограниченной*, если для любого числа  $M$  найдется такой член последовательности, который по абсолютной величине больше  $M$ . Например, последовательность

$$-1, 2, -3, 4, -5, 6, \dots$$

общий член которой  $u_n = (-1)^n n$ , — неограниченная.

Последовательность называется *постоянной*, если все члены ее равны между собой. Например, последовательность

$$5, 5, 5, \dots$$

общий член которой  $u_n = 5$ , — постоянная.

### Упражнения

Выписать несколько первых членов последовательности, общий член которой

$$1. u_n = 1. \quad 2. u_n = 2n - 1. \quad 3. u_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n. \quad 4. u_n = (-1)^{n+1} 2^n.$$

5. Доказать, что общий член последовательности, первый член которой единица, а каждый последующий, начиная со второго, на единицу больше удвоенного предшествующего, определяется формулой

$$u_n = 2^n - 1.$$

## § 2. Арифметическая прогрессия

Последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом, постоянным для этой последовательности, называется *арифметической прогрессией*.

В арифметической прогрессии разность между последующим и предыдущим членами постоянна для всей прогрессии. Она называется *разностью прогрессии* и обозначается буквой  $d$ . Общий вид арифметической прогрессии:

$$u_1, u_1 + d, u_1 + 2d, \dots$$

Например, последовательность натуральных чисел

$$1, 2, 3, \dots$$



— арифметическая прогрессия. Здесь каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с единицей, т. е. здесь  $d=1$ . Последовательность нечетных положительных чисел

$$1, 3, 5, \dots$$

— арифметическая прогрессия. Здесь  $d=2$ . Последовательность нечетных отрицательных чисел

$$-1, -3, -5, -7, \dots$$

— арифметическая прогрессия. Здесь  $d=-2$ .

Если  $d > 0$ , члены прогрессии образуют возрастающую последовательность, и прогрессия называется *возрастающей*. Например, арифметическая прогрессия

$$-5, -1, 3, 7, 11$$

— возрастающая. Разность этой прогрессии равна 4.

Если  $d < 0$ , члены прогрессии образуют убывающую последовательность, и прогрессия называется *убывающей*. Например, арифметическая прогрессия

$$15, 12, 9, 6$$

— убывающая. Разность этой прогрессии равна  $-3$ .

Если  $d=0$ , все члены прогрессии равны между собой. Такие прогрессии не представляют интереса.

Как и всякая последовательность, арифметическая прогрессия может быть *конечной* или *бесконечной*.

**Теорема 1.** *Общий член  $u_n$  арифметической прогрессии, разность которой  $d$ , определяется формулой*

$$u_n = u_1 + d(n-1), \quad (1)$$

*т. е. любой член арифметической прогрессии равен первому члену, сложенному с произведением разности на число предшествующих членов.*

**Доказательство.** Доказательство проводится методом математической индукции. Для первого члена утверждение справедливо, так как при  $n=1$  формула (1) дает  $u_1 = u_1$ . Допустим, что утверждение справедливо для  $k$ -го члена, где  $k$  — некоторое натуральное число, т. е.

$$u_k = u_1 + d(k-1). \quad (2)$$

Докажем, что тогда утверждение справедливо и для следующего  $(k+1)$ -го члена, т. е.

$$u_{k+1} = u_1 + dk.$$

Действительно,

$$u_{k+1} = u_k + d.$$

Отсюда на основании равенства (2)

$$u_{k+1} = u_1 + d(k-1) + d = u_1 + dk.$$

Теорема доказана.

*Теорема 2. В конечной арифметической прогрессии сумма членов, равноотстоящих от крайних членов, равна сумме крайних членов.*

*Доказательство.* Дана арифметическая прогрессия

$$u_1, u_2, \dots, u_{n-1}, u_n, \quad (3)$$

разность которой  $d$ . Прежде всего заметим, что  $k$ -й член, считая с конца, есть  $u_{n-k+1}$ . Требуется доказать, что

$$u_k + u_{n-k+1} = u_1 + u_n.$$

Имеем

$$u_k = u_1 + d(k-1). \quad (4)$$

Напишем члены прогрессии (3) в обратном порядке

$$u_n, u_{n-1}, \dots, u_2, u_1. \quad (5)$$

В прогрессии (5) разность равна  $-d$ , и потому

$$u_{n-k+1} = u_n + (-d)(k-1). \quad (6)$$

Складывая почленно равенства (4) и (6), получим

$$u_k + u_{n-k+1} = u_1 + d(k-1) + u_n + (-d)(k-1) = u_1 + u_n.$$

*Теорема 3. Сумма членов конечной арифметической прогрессии равна произведению полусуммы крайних членов на число членов, т. е.*

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}.$$

*Доказательство.* Имеем

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n,$$

$$S_n = u_n + u_{n-1} + \dots + u_2 + u_1.$$

Складывая почленно оба равенства, получаем

$$2S_n = (u_1 + u_n) + (u_2 + u_{n-1}) + \dots + (u_{n-1} + u_2) + (u_n + u_1).$$

В каждой из  $n$  скобок имеем либо сумму крайних членов, либо сумму членов, равноотстоящих от крайних. А потому на основании предыдущей теоремы

$$2S_n = (u_1 + u_n)n,$$

отсюда

$$S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}.$$



Сложим эти  $n$  равенств почленно. Получим

$$(2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + (n+1)^3 = 1^3 + (2^3 + 3^3 + \dots + n^3) + 3S_2 + 3S_1 + n.$$

После взаимного уничтожения в левой и правой части равенства одинаковых сумм  $2^3 + 3^3 + \dots + n^3$  получим

$$(n+1)^3 = 3S_2 + 3S_1 + (n+1).$$

Заменим  $S_1$  ее значением по формуле (7)

$$3S_1 = (n+1)^3 - 3 \frac{n(n+1)}{2} - (n+1),$$

$$3S_2 = (n+1) \left[ (n+1)^3 - \frac{3}{2}n - 1 \right] = n(n+1) \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

Окончательно

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

### Упражнения

1. Показать, что

$$S_2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

## § 3. Геометрическая прогрессия

Последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число, постоянное для этой последовательности, называется *геометрической прогрессией*.

В геометрической прогрессии частное от деления последующего члена на предыдущий постоянно для всей последовательности. Оно называется *знаменателем прогрессии* и обозначается буквой  $q$ . Общий вид геометрической прогрессии

$$u_1, u_1q, u_1q^2, \dots$$

Например, последовательность

$$2, 2^2, 2^3, \dots,$$

общий член которой  $u_n = 2^n$ , — геометрическая прогрессия. Здесь каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на 2, т. е. здесь  $q = 2$ . Последовательность

$$\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \dots,$$

общий член которой  $u_n = \frac{5}{2^n}$ , — геометрическая прогрессия. Здесь  $q = \frac{1}{2}$ . Последовательность

$$-3, 9, -27, \dots,$$

общий член которой  $u_n = (-3)^n$ , — геометрическая прогрессия. Здесь  $q = -3$ .

Если члены прогрессии образуют возрастающую последовательность, прогрессия называется *возрастающей*.

Если члены прогрессии образуют убывающую последовательность, прогрессия называется *убывающей*.

Так, если первый член прогрессии положителен и  $q > 1$ , то прогрессия — возрастающая. Например, геометрическая прогрессия

$$2, 6, 18, 54, \dots$$

— возрастающая.

Если первый член прогрессии положителен и  $0 < q < 1$ , то прогрессия убывающая. Например, геометрическая прогрессия

$$10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \dots$$

— убывающая.

Если первый член прогрессии отрицателен и  $q > 1$ , то прогрессия — убывающая. Например, геометрическая прогрессия

$$-2, -6, -18, -54, \dots$$

— убывающая.

Если первый член прогрессии отрицателен и  $0 < q < 1$ , то прогрессия возрастающая. Например, геометрическая прогрессия

$$-10, -5, -\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{8}, \dots$$

— возрастающая.

Если  $q = 1$ , все члены прогрессии равны между собой. Если  $q = 0$ , все члены прогрессии, начиная со второго, равны нулю. Случаи, когда  $q = 1$  или  $q = 0$ , не представляют интереса.

Если  $q < 0$ , члены прогрессии поочередно меняют знак и прогрессия в этом случае не является ни возрастающей, ни убывающей.

**Теорема.** *Общий член  $u_n$  геометрической прогрессии, знаменатель которой  $q$ , определяется формулой*

$$u_n = u_1 q^{n-1}. \quad (1)$$

**Доказательство.** Доказательство проводится методом математической индукции. Для второго члена утверждение справедливо, так как при  $n = 2$  формула (1) дает  $u_2 = u_1 q$ . Допустим, что утверждение справедливо для  $k$ -го члена, где  $k$  — некоторое натуральное число, большее единицы, т. е.

$$u_k = u_1 q^{k-1}. \quad (2)$$

Докажем, что тогда утверждение справедливо и для следующего  $(k + 1)$ -го члена, т. е.

$$u_{k+1} = u_1 q^k.$$

Действительно,

$$u_{k+1} = u_k q.$$

Отсюда на основании равенства (2)

$$u_{k+1} = u_1 q^k.$$

Теорема доказана для любого натурального  $n \geq 2$ .

Если условиться считать, что  $q^0 = 1$ , как это и будет сделано в дальнейшем (см. гл. VI), теорема справедлива и для  $n = 1$ .

*Теорема. Сумма членов конечной геометрической прогрессии, знаменатель которой отличен от единицы, может быть вычислена по формуле*

$$S_n = \frac{u_n q - u_1}{q - 1}.$$

Доказательство. Пусть

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n. \quad (3)$$

Умножив обе части равенства (3) на  $q$ , получим

$$S_n q = u_1 q + u_2 q + \dots + u_{n-1} q + u_n q.$$

Так как по определению

$$u_1 q = u_2, \quad u_2 q = u_3, \quad \dots \quad u_{n-1} q = u_n,$$

то

$$S_n q = u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_n q. \quad (4)$$

Вычитая из равенства (4) почленно равенство (3), получим

$$S_n (q - 1) = u_n q - u_1,$$

отсюда

$$S_n = \frac{u_n q - u_1}{q - 1}.$$

*Следствие. Сумма членов конечной геометрической прогрессии, знаменатель которой отличен от единицы, может быть вычислена по формуле*

$$S_n = \frac{u_1 (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Доказательство. По доказанному

$$S_n = \frac{u_n q - u_1}{q - 1},$$

но  $u_n = u_1 q^{n-1}$ . Следовательно,

$$S_n = \frac{u_1 (q^n - 1)}{q - 1}.$$

Пример. Определить сумму 6 членов следующей прогрессии:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots$$

Решение. Здесь  $u_1 = \frac{1}{4}$ ;  $q = 2$ . Следовательно,

$$S_6 = \frac{\frac{1}{4}(2^6 - 1)}{2 - 1} = 15 \frac{3}{4}.$$

Прием, который мы применили для подсчета суммы членов геометрической прогрессии, применяется и для подсчета других сумм, члены которых не образуют прогрессии.

Пример. Вычислить следующую сумму:

$$S = 1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1}. \quad (5)$$

Решение. Умножим обе части равенства (5) на  $q$ :

$$Sq = q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + nq^n. \quad (6)$$

Вычитая из равенства (5) почленно равенство (6), получим

$$S(1 - q) = (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) - nq^n.$$

Если  $q \neq 1$ , то  $1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$ . Поэтому

$$S = \frac{1 - q^n}{(1 - q)^2} - \frac{nq^n}{1 - q}.$$

Если  $q = 1$ , то

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\text{Ответ. Если } q \neq 1, \text{ то } S = \frac{1 - q^n}{(1 - q)^2} - \frac{nq^n}{1 - q}.$$

$$\text{Если } q = 1, \text{ то } S = \frac{n(n+1)}{2}.$$

### Упражнения

1. Доказать, что

$$1 + 4q + 9q^2 + \dots + n^2 q^{n-1} = \frac{2q(1 - q^{n-1})}{(1 - q)^2} + \frac{1 - (2n - 1)q^n}{(1 - q)^2} - \frac{n^2 q^n}{1 - q},$$

если  $q \neq 1$ .

## § 4. Геометрическое представление числовой последовательности

Каждое вещественное число изображается точкой на числовой оси. Последовательность чисел изображается последовательностью точек. Если задана числовая последовательность, то тем самым задана и изображающая ее последовательность точек и наоборот.

Каждому свойству числовой последовательности соответствует определенное свойство изображающей ее последовательности точек и наоборот. В силу этого вместо числовой последовательности можно рассматривать соответствующую ей последовательность точек. Например, если числовая последовательность ограничена, соответствующая ей последовательность точек расположена вся на отрезке конечной длины.

Принято для обозначения точек употреблять те же знаки, которыми обозначаются соответствующие им числа. Например, точка 2 есть точка, изображающая число 2. Такой же смысл имеют выражения: точка  $-\frac{1}{2}$ , точка  $\sqrt{2}$ , точка  $a$ .

### § 5. Предел числовой последовательности

Числовые последовательности имеют очень широкое применение в математике и в ее приложениях. Главным образом применяются те (бесконечные) последовательности, которые имеют предел.

Прежде чем дать определение понятия «предел», рассмотрим следующие примеры.

1. Рассмотрим последовательность

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots,$$

общий член которой  $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ . Она изображена на рис. 74. Наблюдая за расположением точек последовательности, легко заметить,

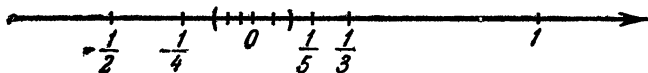


Рис. 74.

что они все ближе и ближе подходят к нулю, накапливаются около нуля.

Пусть  $\varepsilon$  — любое положительное число. Возьмем на числовой оси отрезок длиной  $2\varepsilon$  с центром в точке 0. Найдется такой номер  $N$ , что всякая точка последовательности с номером, большим  $N$ , будет находиться внутри этого отрезка.

Число  $N$ , конечно, зависит от числа  $\varepsilon$ . Чем меньше  $\varepsilon$ , тем вообще больше будет  $N$ . Если, например,  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ , за  $N$  можно принять 10.

Действительно, точки

$$\frac{1}{11}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{13}, -\frac{1}{14}, \dots$$

все находятся внутри отрезка  $\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$ .



Конечно, за  $N$  можно здесь принять и любое целое число, большее 10. Например, можно считать, что  $N=100$ , так как точки

$$\frac{1}{101}, -\frac{1}{102}, \frac{1}{103}, -\frac{1}{104}, \dots$$

опять все находятся внутри отрезка  $\left(-\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$ .

Если  $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ , за  $N$  можно принять 1000 (а также любое целое число, большее 1000).

2. Рассмотрим последовательность

$$2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \dots$$

общий член которой  $u_n = \frac{n+1}{n}$ , изображается на числовой оси последовательностью точек, накапливающихся около 1 (рис. 75). Возьмем на числовой оси отрезок длиной  $2\varepsilon$  с центром в точке 1. Здесь

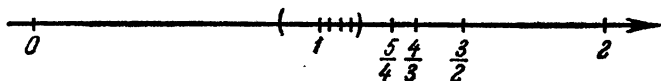


Рис. 75.

также найдется такой номер  $N$  ( $N$  и здесь, конечно, зависит от  $\varepsilon$ ), что всякая точка последовательности с номером, большим  $N$ , будет находиться внутри этого отрезка или, что все равно, на расстоянии, меньшем  $\varepsilon$  от 1.

Пусть, например,  $\varepsilon = \frac{1}{25}$ . Все точки  $\frac{27}{26}, \frac{28}{27}, \frac{29}{28}, \dots$  находятся от 1 на расстоянии, меньшем чем  $\frac{1}{25}$ . Так, первая из этих точек находится от 1 на расстоянии  $\frac{1}{26}$ , вторая на расстоянии  $\frac{1}{27}$  и т. д. Таким образом, при  $\varepsilon = \frac{1}{25}$  за  $N$  можно принять 25 (а также любое целое число, большее чем 25).

Отличие рассматриваемой последовательности от последовательности, рассмотренной в первом примере, заключается только в том, что здесь точки последовательности накапливаются не около 0, а около 1 и что все точки последовательности расположены справа от 1, в то время как в примере (1) они располагались справа и слева от 0.

3. Рассмотрим последовательность

$$1, 4, 9, 16, \dots,$$

общий член которой  $u_n = n^2$ . Она изображается на числовой оси последовательностью точек, которые нигде не накапливаются (рис. 76).

Возьмем на числовой оси отрезок длиной 1 с центром в произвольной точке. Здесь не удастся указать такой номер  $N$ , что

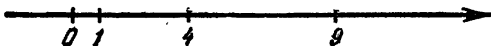


Рис. 76.

всякая точка с номером, большим  $N$ , будет лежать внутри этого отрезка.

4. Рассмотрим последовательность

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots,$$

общий член которой  $u_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$ . Она изображается последовательностью точек  $A_1, A_2, \dots$  (рис. 77). Точки с нечетными номерами

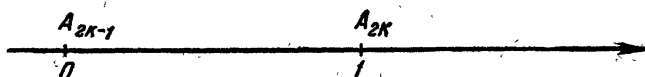


Рис. 77.

совпадают с нулем, а точки с четными номерами совпадают с единицей.

Возьмем на числовой оси отрезок длиной  $\frac{1}{2}$  с центром в произвольной точке. Здесь не удастся указать такой номер  $N$ , что всякая точка с номером, большим  $N$ , будет лежать внутри этого отрезка. Всегда либо точки, совпадающие с нулем, либо точки, совпадающие с единицей, либо и те и другие будут лежать вне такого отрезка, а номера у этих точек могут быть сколь угодно большие. Здесь каждый раз при переходе к следующему значению точка совершает скачок от нуля к единице или наоборот.

**Определение.** Число  $a$  называется пределом последовательности, если для каждого положительного числа  $\epsilon$ , сколь бы мало оно ни было, существует такой номер  $N$ , что все точки последовательности, у которых номер больше  $N$ , будут находиться от  $a$  на расстоянии, меньшем чем  $\epsilon$ .

Для того чтобы точка  $b$  находилась на числовой оси на расстоянии, меньшем  $\epsilon$ , от точки  $a$ , необходимо и достаточно, чтобы

$$|b - a| < \epsilon.$$

На основании этого определение предела можно сформулировать так:  
Число  $a$  называется пределом последовательности

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots,$$

если для каждого положительного числа  $\varepsilon$ , сколь бы мало оно ни было, существует такой номер  $N$ , что все значения  $u_n$  у которых номер  $n > N$ , удовлетворяют неравенству

$$|u_n - a| < \varepsilon.$$

Это же определение можно сформулировать и так:

Число  $a$  называется пределом последовательности

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots,$$

если члены последовательности, начиная с некоторого места, отличаются от  $a$  сколь угодно мало.

Тот факт, что  $a$  является пределом последовательности

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

записывают так:

$$u_n \rightarrow a, \text{ если } n \rightarrow \infty,$$

или так:

$$\lim u_n = a.$$

Знак  $\infty$  читается «бесконечность». Выражение  $n \rightarrow \infty$  читается « $n$  стремится к бесконечности» и означает, что  $n$  растет неограниченно.

Определение. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*.

Если число  $a$  является пределом последовательности, то говорят, что последовательность *сходится* к  $a$ .

Пример. Доказать, что  $\lim \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$ .

Доказательство. Очевидно, что

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}.$$

Пусть  $\varepsilon$  — произвольное положительное число. Для того чтобы  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , достаточно, чтобы  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Поэтому за  $N$  можно принять любое натуральное число, большее или равное  $\frac{1}{\varepsilon}$ .

Пример. Доказать, что  $\lim \frac{n+2}{n} = 1$ .

Доказательство. Ясно, что

$$\left| \frac{n+2}{n} - 1 \right| = \frac{2}{n}.$$

Пусть  $\varepsilon$  — произвольное положительное число. Для того чтобы  $\frac{2}{n} < \varepsilon$ , достаточно, чтобы  $n > \frac{2}{\varepsilon}$ . Поэтому за  $N$  можно принять любое натуральное число, большее или равное  $\frac{2}{\varepsilon}$ .

## Упражнения

Для каждой из указанных ниже последовательностей найти предел или установить, что предела нет. В случае существования предела найти  $N$ , если

$$\varepsilon = 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{30}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}.$$

$$1. u_n = -n. \quad 2. u_n = (-1)^n n. \quad 3. u_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n}.$$

$$4. u_n = 4. \quad 5. u_n = (-1)^n.$$

6. Последовательность десятичных приближенных значений  $\sqrt{2}$  с точностью до  $(0,1)^n$  с недостатком, т. е. последовательность 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421; 1,414213; 1,4142135; ...

## § 6. Теоремы о пределах

**Теорема 1.** *Последовательность не может иметь двух пределов.*

**Доказательство.** Предположим, что последовательность

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$$

имеет два предела  $a$  и  $b$ , причем  $b > a$ . Возьмем на числовой оси два равных отрезка  $K_a$  и  $K_b$  с центрами в точках  $a$  и  $b$  столь малой длины, чтобы они не имели общих точек (рис. 78). Например, длины  $\frac{b-a}{2}$ .

Так как  $a$  — предел последовательности, существует такой номер  $N_1$ , что все точки последовательности, номера которых больше  $N_1$ ,

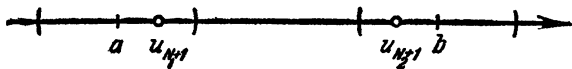


Рис. 78.

находятся внутри отрезка  $K_a$ . Так как  $b$  тоже предел последовательности, существует такой номер  $N_2$ , что все точки последовательности, номера которых больше  $N_2$ , находятся внутри отрезка  $K_b$ .

Возьмем  $N$  столь большим, чтобы оно было больше  $N_1$  и  $N_2$ . Тогда все точки  $u_n$ , номера которых больше  $N$ , должны лежать и внутри отрезка  $K_a$  и внутри отрезка  $K_b$ . Это, однако, невозможно.

**Теорема 2.** *Предел последовательности не меняется от того, что в начале ее приписано или исключено конечное число членов.*

**Доказательство.** Пусть последовательность

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \quad (1)$$

имеет пределом число  $a$ . Припишем к последовательности (1) в начале ее, например, 100 каких-нибудь членов. Получим последовательность

$$v_1, v_2, \dots, v_n, \dots \quad (2)$$

При этом  $u_1 = v_{101}$ ;  $u_2 = v_{102}$  и т. д. Вообще  $u_n = v_{100+n}$ .

Возьмем на числовой оси произвольный отрезок с центром в  $a$ , тогда найдется такой номер  $N$ , что всякая точка  $u_n$ , номер которой больше  $N$ , будет лежать внутри этого отрезка. Это означает, что внутри этого отрезка будут лежать все точки последовательности (2), номера которых больше чем  $100 + N$ , т. е. число  $a$  — предел последовательности (2). Точно так же можно доказать, что из сходимости к числу  $a$  последовательности (2) вытекает сходимость к этому же числу и последовательности (1).

**Следствие.** Если, начиная с некоторого номера, соответственные члены двух последовательностей (т. е. члены с одинаковыми номерами) равны и одна из них имеет предел, то и другая имеет тот же предел.

**Доказательство.** Пусть последовательность  $\{u_n\}$  имеет пределом  $a$  и члены ее, начиная с  $(k+1)$ -го, равны соответствующим членам последовательности  $\{v_n\}$ , т. е.  $u_{k+1} = v_{k+1}$ ;  $u_{k+2} = v_{k+2}$  и т. д. Требуется доказать, что

$$\lim v_n = a.$$

Исключим из последовательностей  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$  первые  $k$  членов. Получим две последовательности

$$u_{k+1}, u_{k+2}, \dots, \quad (3)$$

$$v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, \quad (4)$$

которые будут совпадать всеми своими членами.

Последовательность (3) на основании теоремы 2 имеет пределом  $a$ . Значит, и последовательность (4) тоже имеет пределом  $a$ .

А тогда на основании теоремы 2

$$\lim v_n = a.$$

Полученный результат называется теоремой о предельном переходе в равенстве и коротко может быть сформулирован так:

Если, начиная с некоторого номера,  $u_n = v_n$  и  $\lim u_n$  существует, то существует и  $\lim v_n$  и

$$\lim u_n = \lim v_n.$$

Например, последовательности, общие члены которых

$$u_n = \frac{1}{2^n}; \quad v_n = \frac{1}{2^{n+5}}; \quad w_n = 2^5 \cdot \frac{1}{2^n},$$

т. е. последовательности

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

$$\frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}, \dots$$

$$16, 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \dots,$$

имеют один и тот же предел, равный нулю. Если из первой последовательности исключить первые пять членов, а из последней — первые десять членов, они будут совпадать всеми своими членами со второй.

**Теорема 3.** *Если каждый член сходящейся последовательности не менее соответствующего члена другой сходящейся последовательности, то и предел первой не менее предела второй.*

**Доказательство.** Пусть

$$\lim u_n = a; \quad \lim v_n = b$$

и, кроме того,  $u_n \geq v_n$  при всех  $n$ . Требуется доказать, что  $a \geq b$ .

Допустим, что  $a < b$ . Построим изображения обеих последовательностей на одной оси (рис. 79). Возьмем на числовой оси два равных отрезка  $K_a$  и



Рис. 79.

$K_b$  с центрами в точках  $a$  и  $b$  столь малой длины, чтобы они не имели общих точек. Например, длины  $\frac{b-a}{2}$ .

Существует такой номер  $N_1$ , что при всех  $n > N_1$  точки  $u_n$  будут лежать внутри отрезка  $K_a$ . Точно так же существует такой номер  $N_2$ , что при всех  $n > N_2$  точки  $v_n$  будут лежать внутри отрезка  $K_b$ .

Возьмем  $N$  столь большим, чтобы оно было больше и  $N_1$  и  $N_2$ . Тогда все точки  $u_n$ , номера которых больше  $N$ , должны лежать внутри отрезка  $K_a$ , а соответствующие им точки  $v_n$  — внутри отрезка  $K_b$ . Это, однако, невозможно, так как ни одна точка  $u_n$  не может лежать левее соответствующей точки  $v_n$ .

Эта теорема называется теоремой о предельном переходе в неравенстве.

**Замечание.** Не следует думать, что из строгого неравенства

$$u_n > v_n$$

которому удовлетворяют соответствующие члены двух сходящихся последовательностей, вытекает, что  $\lim u_n > \lim v_n$ . В теореме 3 доказано, что

$$\lim u_n \geq \lim v_n.$$

Например, пусть

$$u_n = -\frac{1}{n}; \quad v_n = \frac{1}{n}.$$

Тогда при всех  $n$

$$u_n < v_n.$$

Однако

$$\lim u_n = \lim v_n = 0.$$

**Теорема 4.** Если члены некоторой последовательности заключены между соответствующими членами двух последовательностей, сходящихся к одному пределу, то и эта последовательность сходится к тому же пределу.

**Доказательство.** Имеем  $u_n \geq v_n \geq w_n$  при всех  $n$ . Кроме того,

$$\lim u_n = \lim w_n = a.$$

Построим изображения всех трех последовательностей на одной оси.

Возьмем на числовой оси произвольный отрезок  $K$  с центром в  $a$ . Существует, такой номер  $N_1$ , что точки  $u_n$ , номера которых больше  $N_1$ , лежат внутри отрезка  $K$ . Существует такой номер  $N_2$ , что все точки  $w_n$ , номера которых больше  $N_2$ , лежат внутри того же отрезка. Возьмем  $N$  столь большим, чтобы оно было больше  $N_1$  и  $N_2$ . Внутри отрезка  $K$  должны лежать и все точки  $u_n$  и все точки  $w_n$ , номера которых больше  $N$ .

По условию, всякая точка  $v_n$  лежит между соответствующими точками  $u_n$  и  $w_n$ . Значит, при  $n > N$  все точки  $v_n$  должны находиться внутри отрезка  $K$ . Это и означает, что

$$\lim v_n = a.$$

Например, при всех  $n$

$$1 + \frac{1}{n} \geq 1 + \frac{(-1)^n}{n} \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Кроме того,

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1; \quad \lim \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Значит,

$$\lim \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1.$$

**Теорема 5.** Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

**Доказательство.** Пусть  $\lim u_n = a$ . Возьмем на числовой оси произвольный отрезок с центром в  $a$ . Начиная с некоторого номера  $N$ , все точки последовательности лежат внутри этого отрезка и лишь конечное число точек лежит вне его.

Из точек, лежащих вне построенного отрезка, выберем ту, которая отстоит от  $a$  на наибольшем расстоянии  $d$ . Теперь возьмем на числовой оси отрезок с центром в  $a$  и длиной больше  $2d$ . Внутри этого отрезка должны лежать все точки последовательности.

Теорема доказана.

**Замечание.** Обратная теорема не верна, т. е. не всякая ограниченная последовательность имеет предел. Например, последовательность

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots,$$

общий член которой

$$\frac{1 + (-1)^{n+1}}{2},$$

ограничена, а предела не имеет.

## § 7. Арифметические операции над последовательностями

Даны две последовательности

$$u_1, u_2, \dots, u_n, \dots \quad (1)$$

и

$$v_1, v_2, \dots, v_n, \dots \quad (2)$$

Составим суммы

$$w_1 = u_1 + v_1; \quad w_2 = u_2 + v_2; \quad \dots; \quad w_n = u_n + v_n; \dots$$

Совокупность чисел

$$w_1, w_2, \dots, w_n, \dots \quad (3)$$

есть последовательность. Действительно, если известен номер  $n$ , то известны и  $u_n$  и  $v_n$ , а тогда известна и их сумма  $w_n$ .

**Определение.** Суммой двух или нескольких последовательностей называется такая последовательность, каждый член которой является суммой соответствующих членов слагаемых последовательностей.

**Пример.** Сложить последовательности

$$1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \frac{10}{6}, \dots$$

и

$$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \dots$$

общие члены которых  $\frac{2n}{n+1}$  и  $\frac{n-1}{n+1}$ .

**Решение.** Суммой является последовательность

$$1, \frac{5}{3}, \frac{8}{4}, \frac{11}{5}, \frac{14}{6}, \dots$$

общий член которой равен сумме общих членов слагаемых последовательностей

$$\frac{2n}{n+1} + \frac{n-1}{n+1} = \frac{3n-1}{n+1}.$$

$$\text{Ответ. } 1, \frac{5}{3}, \frac{8}{4}, \frac{11}{5}, \frac{14}{6} \dots$$

Равенство  $\{u_n\} + \{v_n\} = \{u_n + v_n\}$  выражает определение суммы двух последовательностей. Точно так же равенства

$$\{u_n\} - \{v_n\} = \{u_n - v_n\}; \quad \{u_n\} \cdot \{v_n\} = \{u_n v_n\}; \quad \frac{\{u_n\}}{\{v_n\}} = \left\{ \frac{u_n}{v_n} \right\}$$



выражают определения *разности*, *произведения* и *частного* двух последовательностей. Разумеется, что частное  $\frac{\{u_n\}}{\{v_n\}}$  имеет смысл только тогда, когда  $v_n$  отлично от нуля при всех  $n$ . Например,

$$\begin{aligned}\left\{\frac{n+1}{n}\right\} + \left\{\frac{n+2}{n}\right\} &= \left\{\frac{2n+3}{n}\right\}; & \{1\} + \left\{\frac{1}{n}\right\} + \left\{-\frac{2}{n}\right\} &= \left\{1 - \frac{1}{n}\right\}; \\ \left\{\frac{n+1}{n}\right\} - \left\{\frac{n}{n+1}\right\} &= \left\{\frac{2n+1}{n(n+1)}\right\}; & \left\{\frac{n+1}{n^2}\right\} \cdot \left\{\frac{n}{n+1}\right\} &= \left\{\frac{1}{n}\right\}; \\ \{n\} : \{n+1\} &= \left\{\frac{n}{n+1}\right\}.\end{aligned}$$

Очевидно, что общий член суммы двух или нескольких последовательностей равен сумме их общих членов, общий член разности двух последовательностей равен разности их общих членов и т. д.

Для вывода теорем этого параграфа потребуется следующая теорема:

*Абсолютная величина суммы двух слагаемых не превосходит суммы абсолютных величин слагаемых, т. е.*

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \quad (4)$$

**Доказательство.** Если  $a$  и  $b$  одного знака или хоть одно из них равно нулю, то

$$|a + b| = |a| + |b|.$$

Если  $a$  и  $b$  разных знаков, то

$$|a + b| < |a| + |b|.$$

Методом математической индукции можно доказать, что теорема справедлива для любого числа слагаемых.

**Теорема 1.** *Сумма двух последовательностей, сходящихся к нулю, есть последовательность, сходящаяся к нулю.*

**Доказательство.** Пусть

$$\lim \alpha_n = 0, \quad \lim \beta_n = 0.$$

Возьмем на числовой оси отрезок с центром в 0 произвольной длины  $2\varepsilon$ . Существует такой номер  $N_1$ , что все точки  $\alpha_n$ , номера которых больше  $N_1$ , лежат внутри построенного отрезка, т. е.

$$|\alpha_n| < \varepsilon. \quad (5)$$

Точно так же существует такой номер  $N_2$  такой, что все точки  $\beta_n$ , номера которых больше  $N_2$ , лежат внутри того же отрезка, т. е.

$$|\beta_n| < \varepsilon. \quad (6)$$

Возьмем  $N$  столь большим, чтобы оно было больше и  $N_1$  и  $N_2$ . Тогда при  $n > N$  будут одновременно выполняться неравенства (5) и (6). Значит, при  $n > N$  выполняется неравенство

$$|\alpha_n| + |\beta_n| < 2\varepsilon,$$

но

$$|\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n|,$$

значит,

$$|\alpha_n + \beta_n| < 2\varepsilon.$$

Так как  $2\varepsilon$  может быть сколь угодно малым, последнее неравенство означает, что

$$\lim (\alpha_n + \beta_n) = 0.$$

Методом математической индукции можно доказать, что теорема справедлива для любого числа слагаемых.

**Теорема 2.** Если последовательность  $\{u_n\}$  имеет пределом число  $a$ , то последовательность  $\{u_n + b\}$  имеет пределом число  $a + b$ , т. е. если

$$\lim u_n = a,$$

то

$$\lim (u_n + b) = a + b.$$

**Доказательство.** Прибавление к каждому члену последовательности  $\{u_n\}$  числа  $b$  означает смещение всей последовательности на длину  $b$  вправо, если  $b > 0$ , и на длину  $|b|$  влево, если  $b < 0$ . При этом и предел  $a$  смещается на направленный отрезок  $b$  и занимает положение  $a + b$ .

**Теорема 3.** Для того чтобы последовательность  $\{u_n\}$  имела пределом число  $a$ , необходимо и достаточно, чтобы последовательность  $\{u_n - a\}$  сходилась к нулю, т. е. для того чтобы

$$\lim u_n = a,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim (u_n - a) = 0.$$

**Необходимость.** Пусть  $\lim u_n = a$ . Тогда

$$\lim (u_n - a) = a - a = 0.$$

**Достаточность.** Пусть  $\lim (u_n - a) = 0$ . Тогда

$$\lim u_n = \lim [(u_n - a) + a] = 0 + a = a.$$

**Следствие.** Если последовательность  $\{u_n\}$  имеет пределом число  $a$ , то общий член ее  $u_n$  можно представить в виде суммы

$$u_n = a + \alpha_n$$

причем  $\lim \alpha_n = 0$ .

Для доказательства достаточно в равенстве  $u_n = (u_n - a) + a$  положить  $u_n - a = \alpha_n$ .

**Пример.**  $\lim \frac{n+1}{n} = 1$ ;  $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$ ;  $\lim \frac{1}{n} = 0$ .

**Теорема 4.** *Предел суммы двух сходящихся последовательностей равен сумме их пределов, т. е. если*

$$\lim u_n = a \text{ и } \lim v_n = b,$$

то

$$\lim (u_n + v_n) = a + b.$$

**Доказательство.** Для доказательства достаточно показать, что

$$\lim [(u_n + v_n) - (a + b)] = 0.$$

Положим

$$u_n = a + \alpha_n; \quad v_n = b + \beta_n,$$

тогда  $\lim \alpha_n = \lim \beta_n = 0$ . Имеем (теорема 1):

$$\lim [(u_n + v_n) - (a + b)] = \lim (\alpha_n + \beta_n) = 0.$$

Методом математической индукции можно доказать, что теорема справедлива для любого числа слагаемых.

**Пример.** Пусть  $\{u_n\}$  — последовательность десятичных приближенных значений  $\sqrt{2}$  с недостатком с точностью до  $(0,1)^n$ , т. е. это последовательность

$$1,4; 1,41; 1,414; \dots$$

Пусть  $\{v_n\}$  — последовательность десятичных приближенных значений  $\sqrt{3}$  с недостатком с точностью до  $(0,1)^n$ , т. е.  $\{v_n\}$  — последовательность

$$1,7; 1,73; 1,732; \dots$$

Тогда последовательность  $\{u_n + v_n\}$ , т. е. последовательность

$$3,1; 3,14; 3,146; \dots$$

имеет пределом  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

**Теорема 5.** *Произведение последовательности, сходящейся к нулю, и ограниченной последовательности есть последовательность, сходящаяся к нулю.*

**Доказательство.** Пусть  $\{a_n\}$  — последовательность, сходящаяся к нулю, а  $\{u_n\}$  — ограниченная последовательность. Требуется доказать, что последовательность  $\{a_n u_n\}$  сходится к нулю.

Так как по условию последовательность  $\{u_n\}$  ограничена, существует такое положительное число  $A$ , что при всех  $n$

$$|u_n| < A. \quad (7)$$

Пусть  $\varepsilon$  — произвольное положительное число. Возьмем на числовой оси отрезок с центром в 0 длины  $\frac{2\varepsilon}{A}$ . Существует такой номер  $N$ , что все точки  $a_n$ , номера которых больше  $N$ , лежат внутри этого отрезка, т. е.

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{A}. \quad (8)$$

Абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин сомножителей. Значит,

$$|\alpha_n u_n| = |\alpha_n| \cdot |u_n|.$$

На основании неравенств (7) и (8) заключаем, что при  $n > N$  справедливо неравенство

$$|\alpha_n u_n| < \varepsilon.$$

Так как  $\varepsilon$  может быть сколько угодно малым, последнее неравенство означает, что  $\lim \alpha_n u_n = 0$ .

**Следствие 1.** *Произведение последовательности, сходящейся к нулю, на постоянную последовательность есть последовательность, сходящаяся к нулю.*

Для доказательства достаточно указать на то, что постоянная последовательность ограничена.

**Следствие 2.** *Произведение двух последовательностей, сходящихся к нулю, есть последовательность, сходящаяся к нулю.*

Для доказательства достаточно указать на то, что последовательность, сходящаяся к нулю, как и всякая сходящаяся последовательность, ограничена.

**Пример.** Последовательность  $\left\{\frac{1}{n}\right\}$  сходится к нулю, последовательность  $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$  ограничена, значит, последовательность  $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2n}\right\}$  сходится к нулю. При нечетных  $n$  члены последовательности  $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2n}\right\}$  равны нулю, и, таким образом, среди членов последовательности имеется бесконечное количество членов, равных пределу последовательности.

**Теорема 6.** *Предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению их пределов, т. е. если*

$$\lim u_n = a \text{ и } \lim v_n = b,$$

то

$$\lim (u_n v_n) = ab.$$

**Доказательство.** Для доказательства достаточно показать, что

$$\lim (u_n v_n - ab) = 0.$$

Положим

$$u_n = a + \alpha_n; \quad v_n = b + \beta_n$$

тогда

$$\lim \alpha_n = 0; \quad \lim \beta_n = 0.$$

Имеем

$$u_n v_n - ab = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) - ab = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n.$$

На основании теоремы о пределе суммы последовательностей

$$\lim (u_n v_n - ab) = \lim a\beta_n + \lim b\alpha_n + \lim \alpha_n \beta_n.$$

Каждое слагаемое в правой части последнего равенства равно нулю. Поэтому

$$\lim (u_n v_n - ab) = 0.$$

Методом математической индукции можно доказать, что теорема справедлива для любого числа сомножителей.

**Пример.** Пусть  $\{u_n\}$  — последовательность десятичных приближенных значений  $\sqrt{2}$  с недостатком с точностью до  $(0,1)^n$ , т. е. последовательность

$$1,4; 1,41; 1,414; \dots$$

Пусть  $\{v_n\}$  — последовательность десятичных приближенных значений  $\sqrt{3}$  с недостатком с точностью до  $(0,1)^n$ , т. е. последовательность

$$1,7; 1,73; 1,732; \dots$$

Тогда последовательность  $\{u_n v_n\}$ , т. е. последовательность

$$2,38; 2,4393; 2,449048; \dots$$

имеет пределом своим  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ .

**Пример.** Последовательность  $\{u_n\}^2$  (см. предыдущий пример), т. е. последовательность

$$1,96; 1,9881; 1,999396; \dots$$

имеет пределом своим  $(\sqrt{2})^2 = 2$ .

**Теорема 7.** Предел частного двух сходящихся последовательностей равен частному их пределов, если только предел делителя отличен от нуля, т. е. если

$$\lim u_n = a, \quad \lim v_n = b, \quad b \neq 0,$$

то

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{a}{b}.$$

**Доказательство.** Для доказательства достаточно показать, что

$$\lim \left( \frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b} \right) = 0.$$

Положим

$$u_n = a + \alpha_n; \quad v_n = b + \beta_n,$$

тогда

$$\lim \alpha_n = \lim \beta_n = 0.$$

Имеем

$$\frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{(b + \beta_n)b} = \frac{b\alpha_n - a\beta_n}{b^2 v_n} = (b\alpha_n - a\beta_n) \frac{1}{bv_n}.$$

Последовательность  $\{bv_n\}$  на основании теоремы 6 имеет пределом  $b^2$ .

Возьмем на числовой оси отрезок с центром в  $b^2$  и длиной  $b^2$  (рис. 80). Существует такой номер  $N$ , что все точки  $bv_n$ , номера которых больше  $N$ , лежат внутри построенного отрезка.

Таким образом, при  $n > N$

$$\frac{b^2}{2} < bv_n,$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{bv_n} < \frac{2}{b^2}.$$

Последнее неравенство означает, что последовательность  $\left\{\frac{1}{bv_n}\right\}$  ограничена.

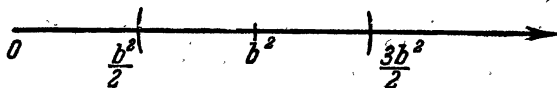


Рис. 80.

Кроме того, последовательность  $\{ba_n - a\beta_n\}$  сходится к нулю, а потому последовательность

$$\left\{\frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b}\right\} = \{ba_n - a\beta_n\} \cdot \left\{\frac{1}{bv_n}\right\}$$

сходится к нулю, т. е.

$$\lim \left(\frac{u_n}{v_n} - \frac{a}{b}\right) = 0.$$

## § 8. Монотонные последовательности

Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными*, а также *монотонно возрастающими*, *монотонно убывающими*. При этом возможно как строгое, так и нестрогое возрастание или убывание. Весьма важное значение имеет следующая теорема.

**Теорема 1.** *Всякая монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.*

Теорема дается здесь без доказательства, мы лишь разъясним ее геометрический смысл.

Пусть  $\{u_n\}$  — монотонно возрастающая последовательность. Это значит, что переход от каждой точки последовательности к следующей производится посредством некоторого передвижения вправо по числовой оси (рис. 81). Если последовательность возрастает нестрого,

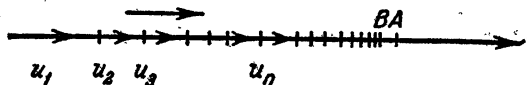


Рис. 81.

то возможно, что  $u_k = u_{k+1}$ , и таким образом, переход от  $u_k$  к  $u_{k+1}$  производится без продвижения по числовой оси.

Если последовательность  $\{u_n\}$  при этом ограничена, то существует такая точка  $A$ , правее которой не может находиться ни одна точка последовательности. Точка  $A$  является преградой, через которую точка последовательности перешагнуть не может.

Теорема утверждает, что существует точка  $B$ , к которой последовательность сходится. Эта точка  $B$  может совпадать с  $A$ , а может находиться и левее  $A$ .

Точно так же разъясняется смысл утверждения в случае, когда последовательность убывает и ограничена.

Последовательность называется *ограниченной сверху*, если все члены последовательности меньше некоторого числа. Последовательность называется *ограниченной снизу*, если все члены последовательности больше некоторого числа.

Всякая монотонная возрастающая последовательность ограничена снизу. Действительно, все члены последовательности больше любого числа, меньшего, чем ее первый член.

Всякая монотонная убывающая последовательность ограничена сверху. Действительно, все члены последовательности меньше любого числа, большего, чем ее первый член.

На основании этого теорему 1 можно сформулировать так:

*Всякая монотонная возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел.*

*Всякая монотонная убывающая и ограниченная снизу последовательность имеет предел.*

**Теорема 2.** *Если последовательность  $\{u_n\}$  монотонно возрастает и ограничена сверху, последовательность  $\{v_n\}$  монотонно убывает и ограничена снизу и при этом их разность  $\{v_n - u_n\}$  сходится к нулю, то обе последовательности  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$  имеют общий предел.*

**Доказательство.** На основании теоремы о монотонной ограниченной последовательности каждая из последовательностей  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$  имеет предел. Остается только доказать, что их пределы совпадают.

Пусть

$$\lim u_n = a; \quad \lim v_n = b.$$

Тогда

$$\lim (v_n - u_n) = b - a.$$

По условию,  $\lim (v_n - u_n) = 0$ . Значит,  $a = b$ .

**Следствие.** *Если монотонно возрастающая последовательность  $\{u_n\}$  и монотонно убывающая последовательность  $\{v_n\}$  имеют общий предел, то предел этот является единственным числом, которое не меньше любого члена возрастающей последовательности и не больше любого члена убывающей последовательности.*

**Доказательство.** Пусть

$$\lim u_n = a; \quad \lim v_n = a.$$

Так как последовательность  $\{u_n\}$  возрастает,  $u_n \leq a$  при любом  $n$ . Так как последовательность  $\{v_n\}$  убывает,  $v_n \geq a$  при любом  $n$ . Таким образом, число  $a$  не меньше любого члена последовательности  $\{u_n\}$  и не больше любого члена последовательности  $\{v_n\}$ .

Допустим, что число  $b$  обладает тем же свойством, т. е. при любом  $n$   $u_n \leq b$ ;  $v_n \geq b$ . Тогда на основании теоремы 3 § 6

$$\lim u_n \leq b; \quad \lim v_n \geq b.$$

Но

$$\lim u_n = \lim v_n = a,$$

а потому

$$a \leq b \text{ и } a \geq b, \text{ т. е. } a = b.$$

Этот результат был изложен в § 11 гл. I. Там же дана геометрическая иллюстрация этого вопроса.

Пример. Пусть  $\{u_n\}$  есть последовательность десятичных приближенных значений  $\sqrt{2}$  с недостатком с точностью до  $(0,1)^n$ , т. е. последовательность

$$1,4; 1,41; 1,414; \dots$$

Пусть  $\{v_n\}$  — последовательность десятичных приближенных значений  $\sqrt{2}$  с избытком с точностью до  $(0,1)^n$ , т. е. последовательность

$$1,5; 1,42; 1,415; \dots$$

Последовательность  $\{u_n\}$  монотонно возрастает, а последовательность  $\{v_n\}$  монотонно убывает. Любой член последовательности  $\{v_n\}$  больше любого члена последовательности  $\{u_n\}$ , а потому последовательность  $\{u_n\}$  ограничена сверху, а последовательность  $\{v_n\}$  ограничена снизу. Наконец

$$\lim (v_n - u_n) = \lim (0,1)^n = 0.$$

Все сказанное дает право утверждать, что последовательности  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$  имеют общий предел. Этот предел и называется *значением*  $\sqrt{2}$ .

Таким образом, точным значением  $\sqrt{2}$  является единственное число, которое больше всех приближенных значений  $\sqrt{2}$ , вычисленных с недостатком, и меньше всех приближенных значений  $\sqrt{2}$ , вычисленных с избытком.

## § 9. Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии

Рассмотрим предварительно следующие две теоремы.

Теорема 1. Если  $h > 0$  и натуральное  $n > 1$ , то

$$(1 + h)^n > 1 + nh.$$

Доказательство. Доказательство проведем методом математической индукции. При  $n = 2$  утверждение справедливо, так как

$$(1 + h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h. \quad (1)$$



Предположим, что утверждение справедливо при  $n=k$ , где  $k$  — некоторое натуральное число, т. е.

$$(1+h)^k > 1+kh. \quad (2)$$

Докажем, что тогда утверждение справедливо и при  $n=k+1$ , т. е.

$$(1+h)^{k+1} > 1+(k+1)h.$$

Умножив обе части неравенства (2) на положительное число  $1+h$ , получим

$$(1+h)^{k+1} > 1+(k+1)h+kh^2 > 1+(k+1)h.$$

**З а м е ч а н и е.** Теорема доказана в предположении, что  $h > 0$ . Как видно из доказательства, теорема справедлива и при более общих предположениях. Именно, достаточно, чтобы  $h$  было больше  $-1$ , но отлично от нуля. (При  $h=0$  неравенство (1) несправедливо.)

**Теорема 2.** Если  $|q| > 1$  и  $n \rightarrow \infty$ , то  $|q|^n \rightarrow +\infty$ , т. е.  $|q|^n$  неограниченно возрастает.

Если  $0 < |q| < 1$  и  $n \rightarrow \infty$ , то  $|q|^n \rightarrow 0$ , т. е.  $|q|^n$  неограниченно убывает.

**Доказательство.** Пусть  $|q| > 1$  и  $M$  — сколь угодно большое положительное число. Положим  $|q| = 1+h$ , тогда  $h > 0$ .

На основании предыдущей теоремы

$$(1+h)^n > 1+nh$$

или, что все равно,

$$|q|^n > 1+n(|q|-1).$$

Для того чтобы  $|q|^n$  было больше  $M$ , достаточно, чтобы

$$1+n(|q|-1) > M.$$

Последнее неравенство выполняется при всех  $n$ , больших чем  $\frac{M-1}{|q|-1}$ .

Таким образом, при  $n > \frac{M-1}{|q|-1}$

$$|q|^n > M.$$

Это и означает, что  $|q|^n$  неограниченно возрастает. Первая часть утверждения доказана.

Пусть  $0 < |q| < 1$ . Положим  $q = \frac{1}{q_1}$ , тогда  $|q_1| > 1$ . Пусть теперь  $\varepsilon$  — сколь угодно малое положительное число. По доказанному, существует такое  $N$ , что при  $n > N$

$$|q_1|^n > \frac{1}{\varepsilon},$$

а тогда  $\frac{1}{|q_1|^n} < \varepsilon$ , т. е.

$$|q|^n < \varepsilon.$$

Последнее неравенство и означает, что  $|q|^n$  неограниченно убывает. Вторая часть утверждения доказана.

Сумма первых  $n$  членов бесконечной геометрической прогрессии

$$u_1, u_1q, u_1q^2, \dots \quad (3)$$

может быть вычислена по формуле

$$S_n = \frac{u_1 - u_1q^n}{1 - q}. \quad (4)$$

Придавая в этой формуле числу  $n$  значения 1, 2, 3, 4, ..., получим бесконечную последовательность

$$S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots, \quad (5)$$

общий член которой задан формулой (4). Суммы  $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$  называются *частичными суммами* бесконечной геометрической прогрессии.

Если  $|q| > 1$ , то  $|S_n|$  при возрастании  $n$  растет неограниченно. Действительно,

$$S_n = \frac{u_1}{1 - q} - \frac{u_1q^n}{1 - q} = \frac{u_1}{1 - q} - \frac{u_1}{1 - q} q^n.$$

Выражение  $\frac{u_1}{1 - q}$  при всех  $n$  сохраняет одно и то же значение, а  $q^n$  при возрастании  $n$  растет по абсолютной величине неограниченно.

В связи с этим растет неограниченно  $\left| \frac{u_1}{1 - q} q^n \right|$ , а вместе с тем и  $|S_n|$ .

Это означает, что при  $|q| > 1$  последовательность (5) предела не имеет. Не имеет предела последовательность (5) также и при  $q = 1$  и  $q = -1$ . В первом случае

$$S_n = u_1 + u_1 + \dots + u_1 = nu_1,$$

и следовательно,  $|S_n|$  при возрастании  $n$  растет неограниченно. Во втором случае общий член последовательности (5) имеет вид

$$S_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2} u_1,$$

а сама последовательность (5) имеет вид  $u_1, 0, u_1, 0, \dots$

Следующая теорема показывает, что при  $|q| < 1$  последовательность (5) имеет предел:

**Теорема 3.** *Предел последовательности частичных сумм бесконечной геометрической прогрессии, знаменатель которой по абсолютной величине меньше единицы, равен частному от деления первого члена на разность между единицей и знаменателем прогрессии.*

Доказательство.

$$\lim S_n = \lim \left( \frac{u_1}{1 - q} - \frac{u_1}{1 - q} q^n \right) = \lim \frac{u_1}{1 - q} - \lim \left( \frac{u_1}{1 - q} q^n \right).$$

Так как  $\lim q^n = 0$ , а величина  $\frac{u_1}{1-q}$  постоянна, то

$$\lim S_n = \frac{u_1}{1-q}$$

**Определение.** Предел последовательности частичных сумм членов бесконечной прогрессии называется *суммой членов* этой прогрессии.

Это определение дает возможность доказанную теорему 3 сформулировать иначе:

**Теорема 4.** Сумма членов бесконечной геометрической прогрессии, знаменатель которой по абсолютной величине меньше единицы, равна частному от деления первого члена на разность между единицей и знаменателем прогрессии.

**Пример.** Найти сумму членов геометрической прогрессии

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$$

**Решение.** Здесь  $u_1 = 1$ ,  $q = \frac{1}{2}$ , а потому  $S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$ .

**Замечание.** Геометрическую прогрессию, знаменатель которой по абсолютной величине меньше единицы, коротко, но неточно, называют *бесконечно убывающей* прогрессией. В действительности, такая прогрессия будет убывающей в смысле определения, данного в § 3, если первый член ее положителен и  $0 < q < 1$ .

## § 10. Обращение десятичной периодической дроби в обыкновенную

Из арифметики известно, что при обращении некоторых обыкновенных дробей  $\frac{p}{q}$  в десятичные получается бесконечная десятичная периодическая дробь.

Изложенное в этой главе дает возможность решить задачу, обратную той, которая решалась в арифметике: найти обыкновенную дробь, при обращении которой в десятичную получилась данная периодическая дробь.

**Пример.** Дана периодическая дробь  $0, (12)$ . Найти обыкновенную дробь, при обращении которой в десятичную получилась данная периодическая дробь.

**Решение.** Эта дробь может быть представлена в виде суммы

$$0,12 + 0,0012 + 0,000012 + \dots,$$

т. е. в виде суммы членов бесконечной геометрической прогрессии

$$0,12; 0,0012; 0,000012; \dots$$

На основании результатов § 9 эта сумма равна

$$\frac{0,12}{1-0,01} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}.$$

$$\text{Ответ. } 0,(12) = \frac{4}{33}.$$

Те же рассуждения, которые приведены в примере, можно провести в общем виде, рассматривая бесконечную десятичную периодическую дробь

$$A, (\overline{a_1 a_2 \dots a_k}),$$

где  $a_1, a_2, \dots, a_k$  обозначают цифры, а  $\overline{a_1 a_2 \dots a_k}$  — число, записанное этими цифрами. Тогда получится такой общий результат:

$$A, (\overline{a_1 a_2 \dots a_k}) = A + \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{99 \dots 9}_k}.$$

$$\text{Например, } 3,(221) = 3\frac{221}{999}.$$

**Пример.** Найти обыкновенную дробь, при обращении которой в десятичную получилась периодическая дробь  $0,1(2)$ .

**Решение.** Дробь  $0,1(2)$  может быть представлена в виде суммы

$$0,1 + 0,02 + 0,002 + 0,0002 + \dots$$

Так как члены этой суммы, начиная со второго, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем  $0,1$ , имеем

$$0,1(2) = 0,1 + \frac{0,02}{1-0,1} = \frac{11}{90}$$

$$\text{Ответ. } 0,1(2) = \frac{11}{90}.$$

Можно доказать, что для обращения смешанной периодической дроби в обыкновенную справедлива формула

$$A, \overline{a_1 a_2 \dots a_k} (\overline{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}) = A + \frac{\overline{a_1 a_2 \dots a_k \beta_1 \beta_2 \dots \beta_s} - \overline{a_1 a_2 \dots a_k}}{\underbrace{99 \dots 9}_s \underbrace{00 \dots 0}_k}.$$

$$\text{Пример. } 0,1(2) = \frac{12-1}{90} = \frac{11}{90}.$$

$$\text{Пример. } 0,23(146) = \frac{23146-23}{99900} = \frac{23123}{99900}.$$

## ГЛАВА VI

### ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ПОКАЗАТЕЛЕ СТЕПЕНИ

#### § 1. Введение

При введении понятия о степени подразумевалось, что показатель степени — целое положительное число. Все правила действий над степенями были выведены в этом предположении.

В математике наряду со степенями с целыми положительными показателями рассматриваются также и степени с нулевым, отрицательным и дробным показателями. Более того, исследование некоторых вопросов, имеющих очень большое значение, требует рассмотрения степеней с иррациональными показателями.

В этой главе будет введено понятие о степени с любым вещественным показателем и будет показано, что все правила действий над степенями, выведенные для целых положительных показателей, сохраняются и для любых вещественных показателей.

#### § 2. Понятие о степени с нулевым и отрицательным показателем

**Определение.** Если  $a \neq 0$ , то  $a^0 = 1$ . *Нулевая степень* числа, отличного от нуля, равна единице.

Например,  $2^0 = 1$ ;  $(0,75)^0 = 1$ ;  $(-\sqrt{3})^0 = 1$ . Выражение  $0^0$  смысла не имеет.

**Определение.** Если  $a \neq 0$  и  $q$  — целое положительное число, то

$$a^{-q} = \frac{1}{a^q}.$$

*Целая отрицательная степень* числа, отличного от нуля, равна единице, деленной на степень того же числа с показателем, равным абсолютной величине отрицательного показателя.

Например,

$$3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}; \quad (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8};$$
$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3} = -8; \quad 10^{-4} = 0,0001.$$

*Теорема. При любых целых положительных  $m$  и  $n$  справедливо правило деления степеней*

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

*Доказательство.* Если  $m > n$ , утверждение в доказательстве не нуждается.

Если  $m = n$ , справедливость утверждения вытекает из определения нулевого показателя.

Если  $m < n$ , справедливость утверждения вытекает из определения целого отрицательного показателя.

Теорема доказана.

Определение нулевого и отрицательного показателей возникло в связи с желанием обобщить установленное ранее правило деления степеней одной и той же величины. Это правило

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

было выведено в предположении, что  $m$  и  $n$  — целые положительные числа и что  $m > n$ .

Допустим, что правило деления степеней можно применять и тогда, когда показатель степени делимого равен показателю степени делителя и когда показатель степени делимого меньше показателя степени делителя.

Пусть  $m = n$ , тогда

$$a^m : a^n = a^m : a^m = a^{m-m} = a^0. \quad (1)$$

С другой стороны,

$$a^m : a^m = 1. \quad (2)$$

Сравнение результатов (1) и (2) показывает, что  $a^0 = 1$ .

Пусть  $m < n$ , т. е.  $n = m + q$ , где  $q$  — положительное число. Тогда имеем

$$a^m : a^{m+q} = a^{m-(m+q)} = a^{-q}. \quad (3)$$

С другой стороны, посредством сокращения получаем

$$a^m : a^{m+q} = \frac{1}{a^q}. \quad (4)$$

Сравнение результатов (3) и (4) показывает, что целесообразно считать

$$a^{-q} = \frac{1}{a^q},$$

где  $q$  — целое положительное число.

Рассуждения, которые приведены выше, не являются, конечно, доказательствами того, что  $a^0 = 1$ ;  $a^{-q} = \frac{1}{a^q}$ . Эти рассуждения проведены только для того, чтобы показать, что принимаемые нами опре-

деления нулевого и отрицательного показателя подсказаны нам опытом деления степеней с одним и тем же основанием и единственно возможны, если мы желаем сохранить правило деления степеней для случая, когда показатель степени делимого не превосходит показателя степени делителя.

Замечание. Не следует думать, что введением отрицательного показателя дробное выражение  $\frac{1}{a^q}$  превращается в целое  $a^{-q}$ . Выражение  $a^{-q}$  является лишь другой формой записи выражения  $\frac{1}{a^q}$ .

### § 3. Понятие о степени с дробным показателем

Определение. Если  $a > 0$  и числа  $m$  и  $n$  натуральные, то

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Пример.  $2^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$ ;  $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4$ .

Определение дробного показателя возникло в связи с желанием обобщить правило извлечения корня на случай, когда показатель подкоренного количества не делится на показатель корня. Правило

$$\sqrt[n]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n}}$$

было выведено в предположении, что  $m$  и  $n$  натуральные и  $m$  делится на  $n$ . Теперь это правило можно применять и тогда, когда  $m$  и  $n$  — любые натуральные числа.

Известно, что рациональная дробь может быть представлена в различных видах. Например,  $\frac{1}{2}$  может быть представлена как  $\frac{2}{4}$ ;  $\frac{3}{6}$  и т. п. Выражение с дробным показателем не зависит от того, в каком виде представлен показатель. Пусть

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q}, \quad \text{т. е.} \quad mq = pn. \quad (1)$$

Тогда

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{mq}}, \quad (2)$$

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q]{a^{pn}}. \quad (3)$$

В силу (1) правые части равенств (2) и (3) тождественны. Поэтому

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}.$$

Определение дробного показателя не распространяется на степени с отрицательными основаниями, так как тогда выражения с дробными показателями не обладали бы столь простым и важным свойством, которое указано.

Пример. Допустим, что определение дробного показателя распространено на степени с отрицательным основанием. Тогда

$$(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{-1} = -1.$$

В то же время

$$(-1)^{\frac{2}{2}} = \sqrt[2]{(-1)^2} = \sqrt[2]{1} = 1.$$

Замечание. Не следует думать, что введением дробного показателя иррациональное выражение  $\sqrt[n]{a^m}$  превращается в рациональное  $a^{\frac{m}{n}}$ . Если выражение  $\sqrt[n]{a^m}$  иррациональное, то и выражение  $a^{\frac{m}{n}}$  тоже иррациональное. Выражение  $a^{\frac{m}{n}}$  является лишь другой формой записи выражения  $\sqrt[n]{a^m}$ .

#### § 4. Понятие о степени с дробным отрицательным показателем

Определение. Если  $a$  — положительное число, то

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}},$$

где  $m$  и  $n$  — любые натуральные числа.

То есть дробная отрицательная степень положительного числа равна единице, деленной на степень того же числа с показателем, равным абсолютной величине отрицательного показателя. Например,

$$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}.$$

Теорема. При любом целом  $x$

$$\sqrt[n]{a^x} = a^{\frac{x}{n}}.$$

Доказательство. Если  $x > 0$ , справедливость утверждения вытекает из определения дробного показателя.



Если  $x=0$ , то

$$\sqrt[n]{a^x} = \sqrt[n]{1} = 1.$$

С другой стороны,

$$a^{\frac{x}{n}} = a^{\frac{0}{n}} = a^0 = 1.$$

Пусть  $x < 0$ . Положим  $x = -m$ ;  $m > 0$ . Имеем:

$$\sqrt[n]{a^x} = \sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}} = a^{\frac{x}{n}}.$$

### § 5. Действия над степенями с рациональными показателями

В этом параграфе буквы  $m, n, p, q$  обозначают целые положительные числа, буква  $r$ , а также  $r_1$  — любые рациональные числа.

**Теорема 1.** *Произведение степеней с одинаковыми основаниями равно степени с тем же основанием и с показателем, равным сумме показателей.*

Короче: *при умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней складываются, т. е.*

$$a^r a^{r_1} = a^{r+r_1}.$$

**Доказательство.** Переместительный закон умножения справедлив для любых действительных чисел. При любых рациональных  $r$  и  $r_1$  степени  $a^r$  и  $a^{r_1}$  — действительные числа, поэтому

$$a^r a^{r_1} = a^{r_1} a^r.$$

Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть следующие случаи:

**Случай 1.**  $r=0$ ;  $r_1$  — любое рациональное число. Имеем

$$a^r a^{r_1} = a^0 a^{r_1} = 1 \cdot a^{r_1} = a^{r_1} = a^{0+r_1} = a^{r+r_1}.$$

**Случай 2.**  $r = \frac{m}{n}$ ;  $r_1 = \frac{p}{q}$ . Имеем

$$\begin{aligned} a^r a^{r_1} &= a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \sqrt[nq]{a^{pn}} = \\ &= \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{r+r_1}. \end{aligned}$$

**Случай 3.**  $r = \frac{m}{n}$ ;  $r_1 = -\frac{p}{q}$ . Имеем

$$\begin{aligned} a^r a^{r_1} &= a^{\frac{m}{n}} a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}} \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{pn}}} = \\ &= \sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{pn}}} = \sqrt[nq]{a^{mq-pn}} = a^{\frac{mq-pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Случай 4.  $r = -\frac{m}{n}$ ;  $r_1 = -\frac{p}{q}$ ; имеем

$$a^r a^{r_1} = a^{-\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n} \frac{p}{q}}}.$$

На основании доказанного в случае 2

$$\frac{1}{a^{\frac{m}{n} \frac{p}{q}}} + \frac{1}{a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}}.$$

Значит,

$$a^r a^{r_1} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}} = a^{-\left(\frac{m}{n} + \frac{p}{q}\right)} = a^{r+r_1}.$$

Методом математической индукции можно показать, что теорема верна для любого количества множителей.

Пример.  $a^{-\frac{3}{5}} a^{-\frac{2}{5}} = a^{-\frac{1}{5}}.$

Пример.  $a^{-\frac{3}{5}} a^{-\frac{2}{5}} = a^{-1}.$

**Теорема 2.** Частное от деления степеней с одинаковыми основаниями равно степени с тем же основанием и с показателем, равным разности показателей делимого и делителя.

Короче: при делении степеней с одинаковыми основаниями показатели степеней вычитаются, т. е.

$$a^r : a^{r_1} = a^{r-r_1}.$$

Доказательство. На основании правила умножения степеней

$$a^{r_1} a^{r-r_1} = a^r.$$

Отсюда по определению деления

$$a^r : a^{r_1} = a^{r-r_1}$$

Пример.  $a^{-\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}} = a^{-1},$

Пример.  $(a^m : a^n) : a^p = a^{m-n} : a^p = a^{m-n-p}.$

**Теорема 3.** Степень произведения двух чисел равна произведению степеней сомножителей, т. е.

$$(ab)^r = a^r b^r.$$

Доказательство. Возможны три случая:

Случай 1.  $r = 0$ . Имеем

$$(ab)^r = (ab)^0 = 1; \quad a^r b^r = a^0 b^0 = 1.$$

Следовательно,

$$(ab)^r = a^r b^r.$$

Случай 2.  $r = \frac{m}{n}$ . Имеем

$$(ab)^r = (ab)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{b^m} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}} = a^r b^r.$$

Случай 3.  $r = -\frac{m}{n}$ . Имеем

$$(ab)^r = (ab)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{(ab)^{\frac{m}{n}}}.$$

На основании доказанного в случае 2

$$\frac{1}{(ab)^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}}.$$

Значит,

$$(ab)^r = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{b^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}} b^{-\frac{m}{n}} = a^r b^r.$$

Методом математической индукции можно показать, что теорема верна для любого количества множителей.

**Теорема 4.** *Степень дроби равна частному от деления степени числителя с показателем, равным показателю дроби на степень знаменателя с показателем, равным показателю дроби.*

Короче: *степень дроби равна частному от деления степени числителя на степень знаменателя, т. е.*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

**Доказательство.** Возможны три случая:

Случай 1.  $r = 0$ . Имеем

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1; \quad \frac{a^r}{b^r} = \frac{a^0}{b^0} = 1.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

Случай 2.  $r = \frac{m}{n}$ . Имеем

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}} = \frac{a^r}{b^r}.$$

Случай 3.  $r = -\frac{m}{n}$ . Имеем

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}}.$$

На основании доказанного в случае 2

$$\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}}.$$

Значит,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{1}{\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}} = \frac{a^{-\frac{m}{n}}}{b^{-\frac{m}{n}}} = \frac{a^r}{b^r}.$$

Пример.  $\frac{8^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2.$

**Теорема 5.** *Результат возведения степени в степень равен степени с тем же основанием и с показателем, равным произведению показателей, участвующих в действии.*

Короче: при возведении степени в степень показатели перемножаются, т. е.

$$(a^r)^{r_1} = a^{rr_1}.$$

**Доказательство.** Возможны шесть случаев:

Случай 1.  $r = 0$ . Имеем

$$(a^r)^{r_1} = (a^0)^{r_1} = 1^{r_1} = 1 = a^0 = a^{rr_1}.$$

Случай 2.  $r_1 = 0$ . Имеем

$$(a^r)^{r_1} = (a^r)^0 = 1 = a^0 = a^{rr_1}.$$

Случай 3.  $r > 0$ ;  $r_1 > 0$ . Положим  $r = \frac{m}{n}$ ;  $r_1 = \frac{p}{q}$ . Тогда

$$(a^r)^{r_1} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{a^{mp}}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{rr_1}.$$

Случай 4.  $r < 0$ ;  $r_1 > 0$ . Положим  $r = -r_2$ ,  $r_2 > 0$ . Тогда

$$(a^r)^{r_1} = (a^{-r_2})^{r_1} = \left(\frac{1}{a^{r_2}}\right)^{r_1}.$$

На основании теоремы 4 и доказанного в случае 3

$$\left(\frac{1}{a^r}\right)^{r_1} = \frac{1}{(a^r)^{r_1}} = \frac{1}{a^{rr_1}}.$$

Значит,

$$(a^r)^{r_1} = \frac{1}{a^{r_2 r_1}} = a^{-r_2 r_1} = a^{rr_1}.$$

Случай 5.  $r > 0$ ;  $r_1 < 0$ . Положим  $r_1 = -r_2$ ,  $r_2 > 0$ . Тогда

$$(a^r)^{r_1} = (a^r)^{-r_2} = \frac{1}{(a^r)^{r_2}}.$$

На основании доказанного в случае 3

$$\frac{1}{(a^r)^{r_2}} = \frac{1}{a^{rr_2}}.$$

Значит,

$$(a^r)^{r_1} = \frac{1}{a^{rr_2}} = a^{-rr_2} = a^{rr_1}.$$

Случай 6.  $r < 0$ ;  $r_1 < 0$ . Положим  $r = -r_2$ ,  $r_1 = -r_3$ ,  $r_2 > 0$ ,  $r_3 > 0$ .

Тогда

$$(a^r)^{r_1} = (a^{-r_2})^{-r_3} = \frac{1}{(a^{-r_2})^{r_3}}.$$

На основании доказанного в случае 4

$$\frac{1}{(a^{-r_2})^{r_3}} = \frac{1}{a^{-r_2 r_3}}.$$

Значит,

$$(a^r)^{r_1} = \frac{1}{a^{-r_2 r_3}} = a^{r_2 r_3} = a^{rr_1}.$$

Следствие.  $(a^r)^{r_1} = (a^{r_1})^r$ .

Пример.  $\left(a^{\frac{1}{2}} b^{-\frac{1}{3}}\right)^6 = a^3 b^{-2}.$

Пример.  $\left(a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}}\right)^{-6} = a^3 b^{-2}.$

Из доказанных теорем вытекает, что для степеней с любыми рациональными показателями справедливы следующие правила, которые были ранее установлены для степеней с натуральными показателями:

- 1) правило умножения степеней;
- 2) правило деления степеней;
- 3) правило возведения произведения в степень;
- 4) правило возведения дроби в степень;
- 5) правило возведения степени в степень.

Пример. Вычислить при  $a=2,5$  и  $b=20$

$$A = \frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[12]{b^7}} \left( \frac{-\frac{1}{a^2}}{\sqrt[3]{b}} \right)^{\frac{1}{3}} \left( \frac{a^{-\frac{3}{8}}}{b^{-\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{4}{3}}.$$

Решение.

$$A = \frac{a^{\frac{1}{4}} a^{-\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{9}} a^{-\frac{1}{2}}}{b^{\frac{7}{12}} a^{\frac{1}{4}} b^{-\frac{1}{4}} b^{-\frac{8}{9}}} = \frac{a^{-\frac{1}{6}} a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{9}} b^{\frac{8}{9}}}{b^{\frac{7}{12}} b^{-\frac{1}{4}}} = \frac{a^{-\frac{2}{3}} b}{b^{\frac{1}{3}}} = \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

При  $a=2,5$ ;  $b=20$  имеем  $A = \left(\frac{20}{2,5}\right)^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} = 4$ .

Ответ.  $A=4$ .

## § 6. Степень с рациональным показателем

Теорема 1. Пусть  $r$  рационально, тогда

- 1) если  $a > 1$  и  $r > 0$ , то  $a^r > 1$ ;
- 2) если  $0 < a < 1$  и  $r > 0$ , то  $a^r < 1$ ;
- 3) если  $a > 1$  и  $r < 0$ , то  $a^r < 1$ ;
- 4) если  $0 < a < 1$  и  $r < 0$ , то  $a^r > 1$ .

Доказательство. 1) Пусть  $a > 1$  и  $r = \frac{m}{n}$ , где  $m$  и  $n$  — натуральные числа. Тогда

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \quad (1)$$

Так как  $a > 1$ , то  $a^m > 1$  и  $\sqrt[n]{a^m} > 1$ .

2) Пусть  $a < 1$  и  $r = \frac{m}{n}$ . Положим  $a = \frac{1}{a_1}$ , тогда  $a_1 > 1$ . Имеем

$$a^r = \frac{1}{a_1^r} < 1,$$

так как по доказанному в п. 1)  $a_1^r > 1$ .

3) Пусть  $a > 1$  и  $r = -\frac{m}{n}$ , тогда

$$a^r = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} < 1,$$

так как по доказанному в п. 1)  $a^{\frac{m}{n}} > 1$ .

4) Пусть  $a < 1$  и  $r = -\frac{m}{n}$ , тогда

$$a^r = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} > 1,$$

так как  $a^{\frac{m}{n}} < 1$  (по доказанному в п. 2)).

Теорема 2. Если  $a > 1$  и рациональное  $r$  больше рационального  $r_1$ , то  $a^r > a^{r_1}$ , если же  $0 < a < 1$ , то  $a^r < a^{r_1}$ , т. е. если

$a > 1$ , то при возрастании  $r$  возрастает и степень  $a^r$ , а если  $0 < a < 1$ , то при возрастании  $r$  степень  $a^r$  убывает.

Доказательство. Пусть  $a > 1$  и  $r > r_1$ . Рассмотрим разность

$$a^r - a^{r_1} = a^{r_1} (a^{r-r_1} - 1). \quad (2)$$

Так как  $r - r_1 > 0$ , то  $a^{r-r_1} > 1$  и, следовательно,  $a^r - a^{r_1} > 0$ , т. е.  $a^r > a^{r_1}$ .

Пусть  $a < 1$  и  $r > r_1$ . Рассмотрим разность

$$a^r - a^{r_1} = a^{r_1} (a^{r-r_1} - 1).$$

Так как  $r - r_1 > 0$ , то  $a^{r-r_1} < 1$  и  $a^r - a^{r_1} < 0$ , т. е.  $a^r < a^{r_1}$ .

Теорема 3. Если  $c > 0$ , то последовательность  $\{\sqrt[n]{c}\}$  имеет пределом единицу, т. е.

$$\lim \sqrt[n]{c} = 1.$$

Доказательство. Имеем последовательность

$$c, \sqrt{c}, \sqrt[3]{c}, \sqrt[4]{c}, \dots, \sqrt[n]{c}, \dots \quad (3)$$

При  $c = 1$  утверждение проверяется легко. Остается рассмотреть два случая:  $c > 1$  и  $c < 1$ .

Предположим сначала, что  $c > 1$ . Тогда каждый член последовательности (3) больше единицы. Обозначим

$$c = 1 + h_1; \sqrt{c} = 1 + h_2; \sqrt[3]{c} = 1 + h_3; \dots; \sqrt[n]{c} = 1 + h_n; \dots$$

Тогда последовательность (3) может быть переписана так:

$$1 + h_1; 1 + h_2; 1 + h_3; \dots; 1 + h_n; \dots \quad (4)$$

где  $h_n > 0$  при любом  $n$ .

Пусть теперь  $n > 1$ , тогда (см. теорему 1 § 9 гл. V)

$$(1 + h_n)^n > 1 + nh_n.$$

Но  $(1 + h_n)^n = c$ , значит,

$$c > 1 + nh_n \text{ или } h_n < \frac{c-1}{n}.$$

Последнее неравенство показывает, что по любому заданному положительному  $\epsilon$  можно указать столь большой номер  $N$ , что при всех  $n > N$  число  $h_n$  будет меньше  $\epsilon$ . Действительно, чтобы  $h_n$  было меньше  $\epsilon$ , достаточно, чтобы  $\frac{c-1}{n} < \epsilon$ , т. е.  $n > \frac{c-1}{\epsilon}$ . Таким образом, за  $N$  можно принять любое целое число, большее  $\frac{c-1}{\epsilon}$ . Отсюда вытекает, что  $\lim h_n = 0$ , а тогда

$$\lim \sqrt[n]{c} = 1 + \lim h_n = 1.$$

Пусть теперь подкоренное выражение  $c_1$  меньше единицы. Положим  $c_1 = \frac{1}{c}$ . Тогда последовательность

$$c_1, \sqrt{c_1}, \sqrt[3]{c_1}, \dots, \sqrt[n]{c_1}, \dots \quad (5)$$

примет такой вид:

$$\frac{1}{c}, \frac{1}{\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt[3]{c}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[n]{c}}, \dots \quad (6)$$

или, что все равно,

$$\frac{1}{1+h_1}, \frac{1}{1+h_2}, \frac{1}{1+h_3}, \dots, \frac{1}{1+h_n}, \dots \quad (7)$$

Последовательность (4), составленная из знаменателей последовательности (7), как показано, стремится к единице, значит, и последовательность (7) стремится к единице, т. е. опять

$$\lim \sqrt[n]{c_1} = 1.$$

## § 7. Понятие о степени с иррациональным показателем

Пусть  $a$  — какое-нибудь положительное число и  $\alpha$  — иррациональное. Какой смысл следует придать выражению  $a^\alpha$ ?

Чтобы сделать изложение более наглядным, проведем его на частном примере. Именно, положим  $a=2$  и  $\alpha=1,624121121112\dots$ . Здесь  $\alpha$  — бесконечная десятичная дробь, составленная по такому закону: начиная с четвертого десятичного знака, для изображения  $\alpha$  употребляются только цифры 1 и 2, и при этом количество цифр 1, записываемых подряд перед цифрой 2, все время увеличивается на одну. Дробь  $\alpha$  непериодическая, так как иначе количество цифр 1, записываемых подряд в его изображении, было бы ограниченным. Следовательно,  $\alpha$  — *иррациональное* число.

Итак, какой же смысл следует придать выражению

$$2^{1,6241211211121112\dots}?$$

Чтобы ответить на этот вопрос, составим последовательности значений  $\alpha$  с недостатком и избытком с точностью до  $(0,1)^n$ . Получим

$$1,6; 1,62; 1,624; 1,6241; \dots \quad (1)$$

$$1,7; 1,63; 1,625; 1,6242; \dots \quad (2)$$

Составим соответствующие последовательности степеней числа 2:

$$2^{1,6}; 2^{1,62}; 2^{1,624}; 2^{1,6241}; \dots \quad (3)$$

$$2^{1,7}; 2^{1,63}; 2^{1,625}; 2^{1,6242}; \dots \quad (4)$$

Последовательность (3) возрастает, так как возрастает последовательность (1) (теорема 2 § 6).

Последовательность (4) убывает, так как убывает последовательность (2).

Каждый член последовательности (3) меньше каждого члена последовательности (4), и, таким образом, последовательность (3) ограничена сверху, а последовательность (4) ограничена снизу.

На основании теоремы о монотонной ограниченной последовательности каждая из последовательностей (3) и (4) имеет предел. Если



теперь окажется, что разность последовательностей (4) и (3) сходится к нулю, то из этого будет вытекать, что обе эти последовательности имеют общий предел.

Разность первых членов последовательностей (3) и (4)

$$2^{1,7} - 2^{1,6} = 2^{1,6} (2^{0,1} - 1) < 4 (10^{\sqrt{2}} - 1).$$

Разность вторых членов

$$2^{1,63} - 2^{1,62} = 2^{1,62} (2^{0,01} - 1) < 4 (10^{\frac{1}{10}\sqrt{2}} - 1) \text{ и т. д.}$$

Разность  $n$ -х членов

$$2^{1,62} \dots (2^{\overbrace{0,0000 \dots 01}^n} - 1) < 4 (10^{\frac{1}{n}\sqrt{2}} - 1).$$

На основании теоремы 3 § 6

$$\lim 10^{\frac{1}{n}\sqrt{2}} = 1.$$

Итак, последовательности (3) и (4) имеют общий предел. Этот предел является единственным вещественным числом, которое больше всех членов последовательности (3) и меньше всех членов последовательности (4), его и целесообразно считать точным значением  $2^{\alpha}$ .

Из сказанного вытекает, что и вообще целесообразно принять следующее определение:

**Определение.** Если  $a > 1$ , то *степенью числа  $a$  с иррациональным показателем  $\alpha$*  называется такое действительное число, которое больше всех степеней этого числа, показатели которых есть рациональные приближения  $\alpha$  с недостатком, и меньше всех степеней этого числа, показатели которых — рациональные приближения  $\alpha$  с избытком.

Если  $a < 1$ , то степенью числа  $a$  с иррациональным показателем  $\alpha$  называется такое действительное число, которое больше всех степеней этого числа, показатели которых — рациональные приближения  $\alpha$  с избытком, и меньше всех степеней этого числа, показатели которых — рациональные приближения  $\alpha$  с недостатком.

Если  $a = 1$ , то степенью его с иррациональным показателем  $\alpha$  является 1.

Пользуясь понятием предела, это определение можно сформулировать так:

*Степенью положительного числа с иррациональным показателем  $\alpha$*  называется предел, к которому стремится последовательность рациональных степеней этого числа при условии, что последовательность показателей этих степеней стремится к  $\alpha$ , т. е.

$$a^{\alpha} = \lim_{r_n \rightarrow \alpha} a^{r_n}.$$

Пример. Вычислить с точностью до 0,1 число  $2^\alpha$ , если  $\alpha = 1,624121121112 \dots$  ( $\alpha$  то же, что и выше).

Решение. Для приближенного вычисления  $2^\alpha$  заметим, что

$$2^{1,6} < 2^\alpha < 2^{1,625} \quad \text{или} \quad 2^{\frac{8}{5}} < 2^\alpha < 2^{\frac{13}{8}}.$$

Далее,

$$2^{13} = 8192; \quad \sqrt{8192} < 90,51; \\ \sqrt[4]{8192} < \sqrt[4]{90,51} < 9,52; \quad \sqrt[8]{8192} < \sqrt[8]{9,52} < 3,09.$$

Таким образом,  $2^\alpha < 3,09$ .

Испытаем находим, что  $(3,03)^8 = 255,3954324543 < 256$ . Поэтому  $3,03 < \sqrt[8]{256} < 2^\alpha$ . Выходит, что

$$3,03 < 2^\alpha < 3,09.$$

Число  $2^\alpha$  вычислено с точностью до 0,06.

## § 8. Некоторые свойства степени с любым вещественным показателем

Теорема 1.

- 1) Если  $a > 1$  и  $\alpha > 0$ , то  $a^\alpha > 1$ ;
- 2) если  $0 < a < 1$  и  $\alpha > 0$ , то  $a^\alpha < 1$ ;
- 3) если  $a > 1$  и  $\alpha < 0$ , то  $a^\alpha < 1$ ;
- 4) если  $0 < a < 1$  и  $\alpha < 0$ , то  $a^\alpha > 1$ .

Доказательство. 1) Это утверждение доказано для случая, когда  $\alpha$  рационально (теорема 1 § 6).

Пусть  $\alpha$  иррациональное. Рассмотрим последовательность  $\{\alpha_n\}$  десятичных приближений  $\alpha$  с недостатком с точностью до  $(0,1)^n$ . Среди членов этой последовательности должны находиться и положительные числа, так как если бы  $\alpha_n \leq 0$  при всех  $n$ , то и  $\lim \alpha_n \leq 0$ , т. е. и  $\alpha \leq 0$ .

Пусть  $\alpha_n > 0$ , тогда  $a^{\alpha_n} > 1$  (теорема 1 § 6). Но  $a^\alpha > a^{\alpha_n}$ . Значит,

$$a^\alpha > 1.$$

2) Положим  $a = \frac{1}{a_1}$ , тогда  $a_1 > 1$ . По доказанному  $a_1^\alpha > 1$ , значит,

$$\frac{1}{a_1^\alpha} = a^\alpha < 1.$$

3) Пусть  $a > 1$ ;  $\alpha < 0$ . Положим  $\alpha = -\beta$ , тогда  $\beta > 0$ . Рассмотрим

$$a^\alpha = a^{-\beta} = \frac{1}{a^\beta}.$$

По доказанному в п. (1)  $a^\beta > 1$ . Значит,

$$\frac{1}{a^\beta} = a^\alpha < 1.$$

4) Пусть  $a < 1$ ;  $\alpha < 0$ . Положим  $\alpha = -\beta$ . Тогда

$$a^\alpha = a^{-\beta} = \frac{1}{a^\beta} > 1,$$

так как  $a^\beta < 1$  (по доказанному в п. 2).

**Теорема 2.** Если  $a > 1$  и число  $\alpha$  больше  $\beta$ , то  $a^\alpha > a^\beta$ , т. е. при  $a > 1$  функция  $a^x$  возрастает.

Если  $0 < a < 1$  и  $\alpha > \beta$ , то  $a^\alpha < a^\beta$ , т. е. при  $0 < a < 1$  функция  $a^x$  убывает.

**Доказательство.** Пусть  $a > 1$  и  $\alpha > \beta$ . Рассмотрим разность

$$a^\alpha - a^\beta = a^\beta (a^{\alpha-\beta} - 1).$$

Так как  $\alpha - \beta > 0$ , то  $a^{\alpha-\beta} > 1$  и, следовательно,  $a^\alpha - a^\beta > 0$ .

Пусть  $0 < a < 1$  и  $\alpha > \beta$ . Рассмотрим

$$a^\alpha - a^\beta = a^\beta (a^{\alpha-\beta} - 1).$$

Так как  $\alpha - \beta > 0$ , то  $a^{\alpha-\beta} < 1$ , и  $a^\alpha - a^\beta < 0$ .

---

## ГЛАВА VII

### ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ И ЛОГАРИФМЫ

#### § 1. Определение показательной функции

**Определение.** Показательной функцией от независимого переменного  $x$  называется выражение  $a^x$ , где  $a$  — данное число.

Если  $a$  положительно, функция  $a^x$  определена (т. е. имеет смысл) при любых вещественных значениях  $x$  или, как принято говорить,

при положительных  $a$  функция  $a^x$  определена при всех значениях  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Если  $a$  отрицательно, функция  $a^x$  определена только при целых значениях  $x$  и не имеет смысла, когда  $x$  дробное или иррациональное (см. определение дробного показателя в гл. VI).

Если  $a=0$ , функция  $a^x$  определена только при  $x > 0$ , именно при всех положительных значениях  $x$   $0^x = 0$ . При  $x=0$ , а

также при  $x < 0$  выражение  $0^x$  не имеет смысла.

В дальнейшем функция  $a^x$  будет изучаться только при положительных  $a$ .

Интересными и полезными для приложений являются случаи, когда  $a \neq 1$ .

Если  $a=1$ , то  $a^x=1$  при всех значениях  $x$ . Графиком функции  $1^x$  служит прямая, параллельная  $Ox$ , проходящая через точку  $(0, 1)$  (рис. 82).

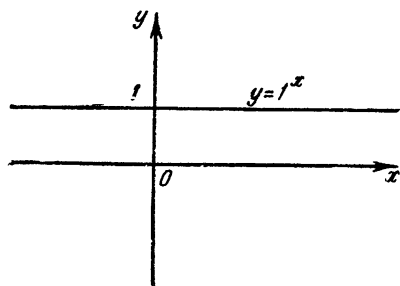


Рис. 82.

#### § 2. Свойства функции $a^x$

1. Если  $a > 0$ , функция  $a^x$  определена при всех значениях  $x$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

2. При всех значениях  $x$  функция  $a^x > 0$ .

3. При  $a > 1$  функция  $a^x$  возрастает. При  $a < 1$  функция  $a^x$  убывает (теорема 2 § 8 гл. VI).

4. Если  $a$  положительно и отлично от единицы и  $a^{x_1} = a^{x_2}$ , то  $x_1 = x_2$ , т. е. если степени одного и того же положительного отличного от единицы основания равны, то равны и показатели степеней. Докажем это.

Предположим, что  $x_1 > x_2$ . Тогда при  $a > 1$   $a^{x_1} > a^{x_2}$ , а при  $a < 1$   $a^{x_1} < a^{x_2}$ . Точно так же доказывается, что нельзя предполагать, что  $x_1 < x_2$ .

5. Если  $a > 1$ , то при неограниченном возрастании показателя  $x$  функция  $a^x$  неограниченно возрастает, а при неограниченном убывании показателя  $x$  функция  $a^x$  принимает значения, сколь угодно близкие к нулю.

Если  $a < 1$ , то при неограниченном возрастании показателя  $x$  функция  $a^x$  принимает значения, сколь угодно близкие к нулю, а при неограниченном убывании показателя  $x$  функция  $a^x$  неограниченно возрастает. Это свойство можно формулировать так:

Если  $a > 1$ , то  $a^x \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow +\infty$  и  $a^x \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ .

Если  $a < 1$ , то  $a^x \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow +\infty$  и  $a^x \rightarrow +\infty$  при  $x \rightarrow -\infty$ .

Доказательство. Пусть  $a > 1$  и  $M$  — сколь угодно большое положительное число. Как показано в теореме 2 § 9 гл. V,  $a^n > M$  при всех

$n > \frac{M-1}{a-1}$ . Пусть теперь

$$x \geq n > \frac{M-1}{a-1}.$$

При всех значениях  $x$ , удовлетворяющих этому неравенству,  $a^x > M$ .

Пусть теперь  $m$  — сколь угодно малое положительное число. По доказанному найдется такое  $x$ , что  $a^x > \frac{1}{m}$  или, что все равно,  $\frac{1}{a^x} < m$ , т. е.

$$a^{-x} < m.$$

Первая часть утверждения доказана.

Пусть теперь  $a < 1$ . Положим  $a = \frac{1}{a_1}$ , тогда  $a_1 > 1$ . Так как  $a^{x_1}$  возрастает от значений, сколь угодно близких к нулю, до сколь угодно больших, обратная величина

$$\frac{1}{a^{x_1}} = a^x$$

убывает от значений, сколь угодно больших до значений, сколь угодно близких к нулю. Вторая часть утверждения доказана.

6. Если  $a$  положительно и отлично от единицы, то каково бы ни было положительное число  $N$ , существует и притом только одно такое значение  $x$ , что

$$a^x = N.$$

Иными словами, если  $a$  положительно и отлично от единицы и  $N$  — данное положительное число, уравнение  $a^x = N$  имеет решение и притом только одно.

**Доказательство.** Докажем сначала, что уравнение имеет решение.

Одно из двух: или существует такое рациональное число  $r$ , что  $a^r = N$ , или такого числа не существует. Если имеет место первое, то для таких  $N$  утверждение доказано. Если имеет место второе, покажем, что существует такое иррациональное число  $a$ , что  $a^n = N$ .

Пусть  $a > 1$ . Существует такое целое  $n$ , что  $a^n > N$ . С другой стороны, существует такое целое  $n_1$ , что  $a^{n_1} < N$ . Выпишем все целые числа от  $n_1$  до  $n$ :

$$n_1, n_1 + 1, \dots, n.$$

Рассмотрим последовательность степеней

$$a^{n_1}, a^{n_1+1}, \dots, a^n. \quad (1)$$

Сравнивая члены последовательности (1) с числом  $N$ , можно найти такие два соседних члена  $a^p$  и  $a^{p+1}$  последовательности (1), что число  $N$  будет заключено между ними, т. е.

$$a^p < N < a^{p+1}.$$

Составим теперь последовательность

$$a^p, a^{p+\frac{1}{10}}, a^{p+\frac{2}{10}}, \dots, a^{p+\frac{9}{10}}, a^{p+1}. \quad (2)$$

Сравнивая члены последовательности (2) с числом  $N$ , можно найти таких два соседних члена  $a^{p+\frac{q_1}{10}}$  и  $a^{p+\frac{q_1+1}{10}}$  последовательности (2), что

$$a^{p+\frac{q_1}{10}} < N < a^{p+\frac{q_1+1}{10}}.$$

Составим последовательность

$$a^{p+\frac{q_1}{10}}, a^{p+\frac{q_1}{10}+\frac{1}{100}}, a^{p+\frac{q_1}{10}+\frac{2}{100}}, \dots, a^{p+\frac{q_1}{10}+\frac{9}{100}}, a^{p+\frac{q_1+1}{10}}. \quad (3)$$

Сравнивая члены последовательности (3) с числом  $N$ , опять найдем таких два соседних члена  $a^{p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}}$  и  $a^{p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2+1}{100}}$ , что

$$a^{p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}} < N < a^{p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2+1}{100}}.$$

Продолжая неограниченно процесс деления промежутка на 10 равных частей и сравнивая всякий раз число  $N$  с получающимися при этом степенями числа  $a$ , получим две последовательности показателей

$$p; p + \frac{q_1}{10}; p + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2}{100}, \dots, \quad (4)$$

$$p+1; p + \frac{q_1+1}{10}; p + \frac{q_1}{10} + \frac{q_2+1}{100}, \dots \quad (5)$$

и две последовательности степеней

$$a^p; a^{p+\frac{q_1}{10}}; a^{p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{100}}, \dots \quad (6)$$

$$a^{p+1}; a^{p+\frac{q_1+1}{10}}; a^{p+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2+1}{100}}, \dots \quad (7)$$

Последовательность (4) — возрастающая и ограниченная сверху любым членом последовательности (5). Последовательность (5) — убывающая и ограниченная снизу любым членом последовательности (4). Разность последовательностей (5) и (4) сходится к нулю. Следовательно, существует единственное число  $a$ , которое больше всех членов последовательности (4) и меньше всех членов последовательности (5).

Точно так же существует единственное число, которое больше всех членов последовательности (6) и меньше всех членов последовательности (7). Этим числом по построению последовательности является число  $N$ . По определению степени с иррациональным показателем, этим числом является  $a^x$ . Значит,  $a^x = N$ .

Пусть теперь  $a < 1$ . Положим  $a = \frac{1}{a_1}$ , тогда  $a_1 > 1$ . Уравнение

$$a_1^x = \frac{1}{N}$$

имеет решение при любом положительном  $N$ . Это же решение удовлетворяет уравнению

$$a^x = N.$$

Докажем, что решение единственно. Предположим, что уравнение имеет два решения:  $x = x_1$  и  $x = x_2$ , причем  $x_1 > x_2$ . Тогда имеем:

$$a^{x_1} = N; \quad a^{x_2} = N,$$

$$a^{x_1} = a^{x_2}.$$

Но это невозможно, так как при  $a > 1$   $a^{x_1} > a^{x_2}$ , а при  $a < 1$   $a^{x_1} < a^{x_2}$ .

### § 3. График показательной функции

Пусть  $a > 1$ , тогда график функции  $y = a^x$  имеет вид, указанный на рис. 83. В соответствии со свойствами функции  $a^x$ , изложенными в § 2, график этой функции обладает следующими свойствами:

1. Весь график расположен в верхней полуплоскости, т. е. там, где ординаты положительны (свойство 2 § 2).

2. Всякая прямая, параллельная оси  $Oy$ , пересекает график и притом только в одной точке (свойства 1 и 4 § 2).

3. Из двух точек графика выше расположена та, которая лежит правее, т. е. по мере продвижения слева направо график поднимается вверх (свойство 3 § 2).

4. На графике имеются точки, лежащие выше любой прямой, параллельной оси  $Ox$ . На графике имеются точки, лежащие ниже любой прямой, проведенной в верхней полуплоскости параллельно оси  $Ox$ .

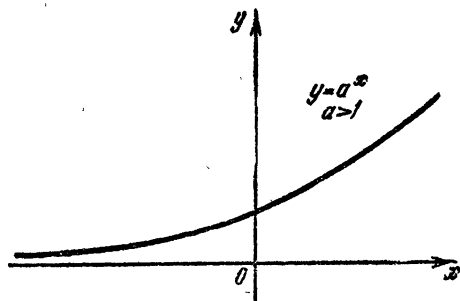


Рис. 83.

В левой своей части график, если наблюдать за ним справа налево, все ближе подходит к оси  $Ox$ , как бы стремясь коснуться ее. Однако график нигде не касается оси  $Ox$  (свойства 5 и 2 § 2).

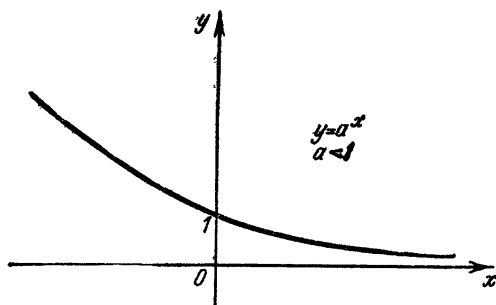


Рис. 84.

5. Всякая прямая, параллельная оси  $Ox$  и лежащая в верхней полуплоскости, пересекает график и притом только в одной точке (свойство 6 § 2).

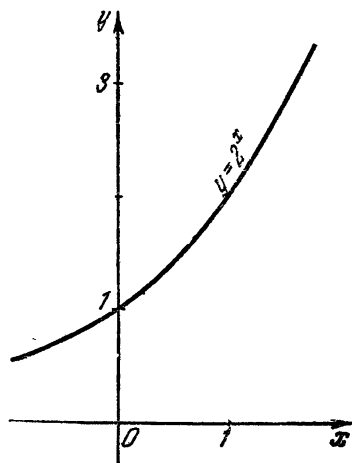


Рис. 85.

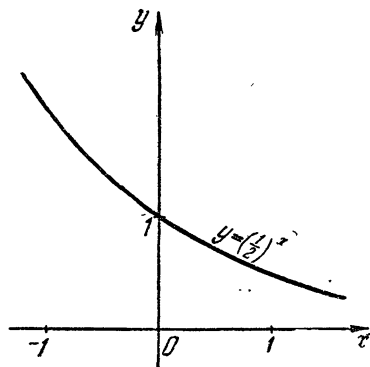


Рис. 86.

6. При всех  $a$  график проходит через точку  $(0, 1)$ . Это объясняется тем, что при любом положительном  $a$

$$a^0 = 1.$$

Если  $a < 1$ , график функции  $y = a^x$  имеет вид, указанный на рис. 84.



Рис. 83 и 84 представляют собой лишь схемы графиков функции  $y = a^x$  при  $a > 1$  и при  $a < 1$ , так как численное значение  $a$  неизвестно.

Если величине  $a$  придать какое-нибудь определенное значение, график функции  $y = a^x$  можно построить по точкам, составив предварительно таблицу значений функции при некоторых значениях  $x$ .

На рис. 85 изображен график функции  $y = 2^x$ . График построен при помощи следующей таблицы значений функции  $y$  при некоторых значениях аргумента  $x$ :

|       |     |      |   |      |      |      |   |      |      |      |   |
|-------|-----|------|---|------|------|------|---|------|------|------|---|
| $x$   | —1  | —0,5 | 0 | 0,25 | 0,5  | 0,75 | 1 | 1,25 | 1,5  | 1,75 | 2 |
| $2^x$ | 0,5 | 0,71 | 1 | 1,19 | 1,41 | 1,68 | 2 | 2,38 | 2,83 | 3,36 | 4 |

Таблица составлена посредством приближенного извлечения  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[4]{2}$ ,  $\sqrt[8]{2}$ ,  $\sqrt[16]{2}$  и т. д.

На рис. 86 изображен график функции  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ . График построен при помощи следующей таблицы:

|                              |      |    |       |      |       |   |      |     |
|------------------------------|------|----|-------|------|-------|---|------|-----|
| $x$                          | —1,5 | —1 | —0,75 | —0,5 | —0,25 | 0 | 0,5  | 1   |
| $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ | 2,83 | 2  | 1,68  | 1,41 | 1,19  | 1 | 0,71 | 0,5 |

#### § 4. Определение логарифма

**Определение.** Логарифмом числа  $N$  по основанию  $a$  называется показатель степени, в которую надо возвести  $a$ , чтобы получить  $N$ .

Для обозначения логарифма употребляется знак  $\log$ . Тот факт, что число  $x$  является логарифмом числа  $N$  по основанию  $a$ , записывается так:

$$\log_a N = x.$$

По определению  $N = a^{\log_a N}$ . Например,  $\log_2 8 = 3$ , так как  $2^3 = 8$ ;  $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ , так как  $2^{-3} = \frac{1}{8}$ ;  $\log_{10} 100 = 2$ ;  $\log_{100} 10 = \frac{1}{2}$ .

#### § 5. Логарифмическая функция

Пусть  $a > 0$  и отлично от единицы. Возьмем произвольное положительное число  $y$ . Как показано (п. 6 § 2), уравнение

$$a^x = y$$

имеет единственное решение. Это значит, что всякое положительное число  $y$  по любому основанию (положительному и отличному от единицы) имеет единственный логарифм

$$x = \log_a y.$$

Это утверждение называется *теоремой о существовании логарифма*.

Придавая числу  $y$  различные положительные значения, будем получать различные значения  $x = \log_a y$  и при этом каждому положительному значению  $y$  будет соответствовать одно и только одно значение  $x$ . Это означает, что  $x$  является функцией от  $y$ , определенной и однозначной для всех положительных значений  $y$ . Функция эта называется *логарифмической*.

Логарифмическая функция  $x = \log_a y$  связана с показательной функцией  $y = a^x$  следующим образом.

Показательная функция дает описание изменения степени числа  $a$  в зависимости от изменения показателя степени; логарифмическая функция дает описание изменения показателя степени в зависимости от изменения степени числа  $a$ .

Иными словами, показательная функция дает описание изменения числа в зависимости от изменения его логарифма по основанию  $a$ ; логарифмическая функция дает описание изменения логарифма числа по основанию  $a$  в зависимости от изменения числа.

Таблица значений показательной функции при данном основании  $a$  является одновременно и таблицей значений логарифмической функции при том же основании  $a$ .

График показательной функции  $y = a^x$  является одновременно и графиком логарифмической функции  $x = \log_a y$  (см. рис. 83 и 84), только в одном случае значения независимого переменного отло-

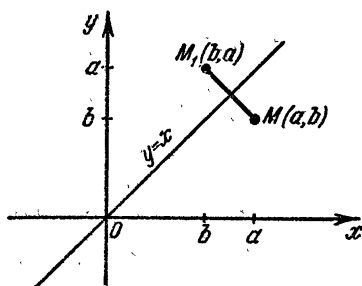


Рис. 87.

жены на горизонтальной оси, а значения функции — на вертикальной; в другом случае, наоборот, значения функции отложены на горизонтальной оси, а значения независимого переменного — на вертикальной.

Показательная функция при основании  $a$  и логарифмическая функция при том же основании представляют пример двух обратных друг другу функций.

Обычно принято значения независимого переменного обозначать

буквой  $x$  и откладывать на горизонтальной оси, а значения функции обозначать буквой  $y$  и откладывать на вертикальной оси.

Если придерживаться этого правила, то для функции  $y = a^x$  обратной будет функция  $y = \log_a x$ , а графиком функции  $y = \log_a x$  будет служить кривая, получаемая из графика функции  $y = a^x$  (рис. 83, 84) посредством преобразования симметрии относительно прямой  $y = x$ , т. е. посредством переноса каждой точки  $M(a, b)$  в точку  $M_1(b, a)$  (рис. 87).

## Упражнения

На рис. 88 изображен график функции  $y = \log_{10} x$ . (На оси  $Oy$  за единицу масштаба принят отрезок в 10 раз больший, чем на оси  $Ox$ ).

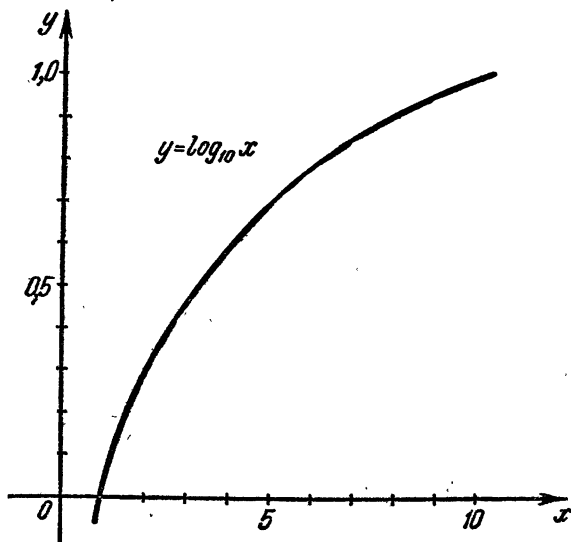


Рис. 88.

Пользуясь этим графиком, определить  
 1.  $\log_{10} 5,6$ . 2.  $\log_{10} 8,3$ . 3.  $x$ , если 1)  $\log_{10} x = 0,8$ ; 2)  $\log_{10} x = 2,8$ ;  
 3)  $\log_{10} x = -0,2$ .

## § 6. Свойства логарифмов чисел

Свойства логарифмов чисел при основании, большем единицы:

1. Всякое положительное число имеет логарифм и притом только один. Это свойство вытекает из свойства 6 показательной функции.

2. Отрицательные числа и число 0 не имеют логарифмов. Это свойство вытекает из свойства 2 показательной функции.

3. Логарифм единицы равен нулю. Это вытекает из того, что при любом положительном  $a$   $a^0 = 1$ .

4. Если  $N_1 > N_2$ , то и  $\log_a N_1 > \log_a N_2$ , т.е. большее число имеет и больший логарифм. Это вытекает из свойства 3 показательной функции.

5. Логарифмы чисел, больших единицы, положительны; логарифмы чисел, меньших единицы, отрицательны. Это вытекает из свойств 3 и 4.

6. Если число растет неограниченно, то и логарифм его растет неограниченно. Если число, оставаясь положительным, стремится к нулю, логарифм его становится отрицательным и сколь угодно большим по абсолютной величине.

Это свойство вытекает из свойства 5 показательной функции и условно записывается так:

$$\log_a + \infty = +\infty; \log_a 0 = -\infty.$$

7. Логарифм основания равен единице.

Свойства логарифмов чисел при положительном основании, меньшем единицы:

1. Всякое положительное число имеет логарифм и притом только один.

2. Отрицательные числа и число 0 не имеют логарифмов.

3. Логарифм единицы равен нулю.

4. Бóльшее число имеет меньший логарифм.

5. Логарифмы чисел, бóльших единицы, отрицательны; логарифмы чисел, меньших единицы, положительны.

6.  $\log_a + \infty = -\infty$  (условная запись);  $\log_a 0 = +\infty$  (условная запись).

7. Логарифм основания равен единице.

## § 7. Теоремы о логарифмах

**Теорема 1.** *Логарифм произведения двух или нескольких чисел равен сумме логарифмов сомножителей.*

**Доказательство.** Пусть  $N_1, N_2, \dots, N_k$  — произвольные положительные числа. По определению логарифма, имеем

$$\begin{aligned} N_1 &= a^{\log_a N_1}; \\ N_2 &= a^{\log_a N_2}; \\ &\dots\dots\dots \\ N_k &= a^{\log_a N_k}. \end{aligned}$$

Перемножив эти равенства почленно, получим

$$N_1 N_2 \dots N_k = a^{\log_a N_1 + \log_a N_2 + \dots + \log_a N_k}. \quad (1)$$

С другой стороны, по определению логарифма,

$$N_1 N_2 \dots N_k = a^{\log_a N_1 N_2 \dots N_k}. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) имеем

$$\log_a N_1 N_2 \dots N_k = \log_a N_1 + \log_a N_2 + \dots + \log_a N_k.$$

**Теорема 2.** *Логарифм частного равен разности логарифмов делимого и делителя.*

**Доказательство.** Пусть  $N_1$  и  $N_2$  — произвольные положительные числа. По определению логарифма,

$$\begin{aligned} N_1 &= a^{\log_a N_1}, \\ N_2 &= a^{\log_a N_2}. \end{aligned}$$

Разделив эти равенства почленно, получим

$$\frac{N_1}{N_2} = a^{\log_a N_1 - \log_a N_2}. \quad (3)$$

С другой стороны, по определению логарифма,

$$\frac{N_1}{N_2} = a^{\log_a \frac{N_1}{N_2}}. \quad (4)$$

Из равенств (3) и (4) имеем:

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2.$$

**Теорема 3.** *Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания.*

**Доказательство.** Пусть  $N$  — произвольное положительное число и  $a$  — любое вещественное число. По определению логарифма,

$$N = a^{\log_a N}.$$

Возведя обе части равенства в степень  $\alpha$ , получим

$$N^\alpha = a^{\alpha \log_a N}. \quad (5)$$

С другой стороны, по определению логарифма,

$$N^\alpha = a^{\log_a N^\alpha}. \quad (6)$$

Из равенств (5) и (6) имеем

$$\log_a N^\alpha = \alpha \log_a N.$$

**Теорема 4.** *Логарифм корня равен логарифму подкоренного выражения, деленному на показатель корня.*

**Доказательство.** Пусть  $N$  — произвольное положительное число,  $n$  — натуральное. Тогда, используя теорему 3, получим

$$\log_a \sqrt[n]{N} = \log_a N^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log_a N.$$

Теорема доказана.

Доказанные теоремы служат основой для вычислений при помощи логарифмов.

Пусть требуется найти произведение двух чисел  $N_1$  и  $N_2$ . Пользуясь графиком логарифмической функции или таблицей ее значений, определяют  $\log_a N_1$  и  $\log_a N_2$ . Далее, сложением логарифмов определяют логарифм искомого произведения (теорема 1)

$$\log_a N_1 + \log_a N_2 = \log_a N_1 N_2.$$

Остается по графику логарифмической функции или по таблице ее значений по  $\log_a N_1 N_2$  найти число  $N_1 N_2$ .

Точно так же при делении, возведении в степень и извлечении корня используются теоремы 2, 3, 4 соответственно.

#### Упражнения

1. Доказать, что  $\log_a a \cdot \log_a b = 1$ .

## § 8. Логарифмирование и потенцирование выражений

Пользуясь теоремами 1—4 § 7, часто удается свести логарифм сложного выражения к результату простых действий над логарифмами входящих в него более простых выражений.

Такое преобразование логарифма называется *логарифмированием* выражения.

Например, пусть надо вычислить

$$A = \frac{a^3 \sqrt[5]{b^3}}{c \sqrt{de^3}}.$$

Применяя теорему о логарифме частного, имеем

$$\log A = \log a^3 \sqrt[5]{b^3} - \log c \sqrt{de^3}.$$

Далее, на основании теорем о логарифме произведения, степени и корня последовательно имеем

$$\log a^3 \sqrt[5]{b^3} = \log a^3 + \log \sqrt[5]{b^3} = 3 \log a + \frac{2}{5} \log b.$$

Точно так же

$$\begin{aligned} \log c \sqrt{de^3} &= \log c + \log \sqrt{de^3} = \log c + \frac{1}{2} \log de^3 = \\ &= \log c + \frac{1}{2} (\log d + 3 \log e) = \log c + \frac{1}{2} \log d + \frac{3}{2} \log e. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\log A = 3 \log a + \frac{2}{5} \log b - \log c - \frac{1}{2} \log d - \frac{3}{2} \log e.$$

Таким образом, вычисление логарифма  $A$  сведено к вычислению логарифмов  $a, b, c, d, e$ .

Логарифм суммы не может быть просто выражен через логарифмы слагаемых. Иногда логарифм суммы преобразуется так:

$$\log(a+b) = \log \left[ a \left( 1 + \frac{b}{a} \right) \right] = \log a + \log \left( 1 + \frac{b}{a} \right).$$

Такое преобразование используется в так называемых *гауссовых логарифмах*.

При решении некоторых вопросов приходится ввести преобразование, обратное логарифмированию, т. е. приходится результат действий над логарифмами нескольких выражений преобразовывать в логарифм одного выражения. Такое преобразование логарифмов называется *потенцированием* выражения.

Пример. Найти  $A$ , если

$$\log A = \frac{2}{3} \log(a+b) - \frac{1}{3} \log(a-b) + \frac{2}{3} \log a - \frac{1}{3} \log b.$$

Решение. На основании теоремы о логарифме степени имеем:

$$\log A = \log \sqrt[3]{(a+b)^2} - \log \sqrt[3]{a-b} + \log \sqrt[3]{a^2} - \log \sqrt[3]{b}.$$

На основании теоремы о логарифме произведения

$$\log A = \log \sqrt[3]{a^3(a+b)^3} - \log \sqrt[3]{b(a-b)^3}.$$

На основании теоремы о логарифме частного

$$\log A = \log \sqrt[3]{\frac{a^3(a+b)^3}{b(a-b)^3}}.$$

Так как из равенства логарифмов двух чисел следует равенство этих чисел (см. свойство 4 § 6), то

$$A = \sqrt[3]{\frac{a^3(a+b)^3}{b(a-b)^3}}.$$

Пример. Найти  $A$ , если известно, что

$$\log_a A = \log_a c + b.$$

Решение.

$$\log_a A = \log_a c + b; \quad \log_a A = \log_a c + \log_a a^b; \quad \log_a A = \log_a ca^b; \\ A = ca^b.$$

Отвеч.  $A = ca^b$ .

В этом параграфе, за исключением последнего примера, употребляется знак логарифма без указания основания, по которому берутся логарифмы. Объясняется это тем, что все изложенное здесь справедливо для логарифмов по любому основанию.

## § 9. Десятичные логарифмы

За основание логарифмов обычно принимается число 10, так как 10 лежит в основе употребительной системы счисления. Логарифмы чисел по основанию 10 называются *десятичными*. Для упрощения записи десятичных логарифмов основание обычно не указывается и знак  $\log$  заменяют знаком  $\lg$ , т. е. вместо  $\log_{10} N$  пишут  $\lg N$ .

Десятичные логарифмы обладают всеми свойствами логарифмов при основании, большем единицы, и, кроме того, следующими:

1. Если число является степенью 10 с натуральным показателем, то десятичный логарифм его равен количеству нулей в изображении этого числа.

Действительно,  $\lg 10^n = n$ .

2. Если число является степенью числа 0,1 с натуральным показателем, то десятичный логарифм его равен целому отрицательному числу, абсолютная величина которого равна количеству нулей, входящих в десятичное изображение этого числа, в том числе и нуля целых.

Действительно,  $\lg (0,1)^n = n \lg 0,1 = -n$ . Например,  $\lg 1000 = 3$ ;  $\lg 0,0001 = -4$ .

3. Если число умножить на  $10^n$ , логарифм его увеличится на  $n$ .

Действительно, пусть  $\lg N = x$ , тогда

$$\lg 10^n N = \lg 10^n + \lg N = x + n.$$

4. Если число разделить на  $10^n$ , логарифм его уменьшится на  $n$ .

5. Если в десятичной дроби перенести запятую на  $n$  знаков вправо, логарифм ее увеличится на  $n$ . Если в десятичной дроби перенести запятую на  $n$  знаков влево, логарифм ее уменьшится на  $n$ .

6. Логарифмы рациональных чисел вообще иррациональны. Исключение составляют лишь числа, являющиеся степенью числа 10 с целым показателем.

Доказательство. 1. Пусть натуральное  $N$  имеет рациональный логарифм  $\frac{m}{n}$ , где  $m$  и  $n$  — натуральные числа. Тогда

$$10^{\frac{m}{n}} = N; \quad 10^m = N^n. \quad (1)$$

Если  $N$  делится на простое число  $p$ , отличное от 2 и 5, равенство (1) невозможно, так как  $10^m$  на  $p$  не делится. Остается предполагать, что  $N = 2^q \cdot 5^t$ , где  $q$  и  $t$  — целые неотрицательные числа. Докажем, что  $q = t$  и, следовательно,  $N$  есть степень числа 10 с целым показателем.

Допустим, что  $q > t$ . Тогда

$$N = 2^{q-t} \cdot 10^t.$$

Равенство (1) принимает вид

$$10^m = 2^{n(q-t)} \cdot 10^{nt}. \quad (2)$$

Если  $m = nt$ , равенство (2) невозможно, так как оно приводит к равенству

$$1 = 2^{n(q-t)},$$

где  $q > t$ . Точно так же равенство (2) невозможно как при  $m < nt$ , так и при  $m > nt$ . Итак,

$$q \leq t.$$

Рассуждая точно так же, можно показать, что  $q$  не может быть меньше  $t$ .

2. Пусть  $N$  — неправильная несократимая дробь, т. е.  $N = \frac{a}{b}$ , где  $a$  и  $b$  натуральные,  $a > b > 1$  и  $a$  взаимно просто с  $b$ . Предположим опять, что логарифм  $N$  равен  $\frac{m}{n}$ . Тогда

$$10^{\frac{m}{n}} = \frac{a}{b}; \quad 10^m = \left(\frac{a}{b}\right)^n. \quad (3)$$

Так как степень несократимой дроби с натуральным показателем есть опять несократимая дробь, равенство (3) невозможно.

3. Пусть  $N$  — правильная несократимая дробь, т. е.  $N = \frac{b}{a}$ ,  $b < a$ ,  $a$  и  $b$  взаимно просты. Так как  $N < 1$ , логарифм его отрицателен. Предположим, что логарифм  $N$  равен  $-\frac{m}{n}$ . Тогда

$$10^{-\frac{m}{n}} = \frac{b}{a},$$



отсюда

$$10^m = \left(\frac{a}{b}\right)^n. \quad (4)$$

По доказанному в п. 2 равенство (4) возможно только тогда, когда  $b = 1$ . Равенство (4) принимает такой вид:

$$10^m = a^n.$$

По доказанному в п. 1 последнее равенство возможно только тогда, когда  $a$  есть степень числа 10 с целым неотрицательным показателем. Выходит, что

$$N = \frac{1}{10^k},$$

где  $k$  — целое неотрицательное число.

## § 10. Характеристика и мантисса

Если действительное число не является целым, то его можно представить в виде суммы целого числа и положительного числа, меньшего единицы. Например,

$$2,5 = 2 + 0,5; \quad -3,7 = -4 + 0,3.$$

Поэтому и логарифм любого положительного числа  $N$  можно представить так:

$$\lg N = A + \alpha,$$

где  $A$  — целое число и  $0 \leq \alpha < 1$ . Целая часть логарифма называется его *характеристикой*, а число  $\alpha$  — его *мантиссой*.

Пример. Найти характеристику  $\lg 279,8$ .

Решение. Так как  $100 < 279,8 < 1000$ , то

$$\lg 100 < \lg 279,8 < \lg 1000,$$

т. е.  $2 < \lg 279,8 < 3$ . Выходит, что

$$\lg 279,8 = 2 + \alpha,$$

где  $0 < \alpha < 1$ . Характеристика  $\lg 279,8$  равна 2.

Пример. Найти характеристику  $\lg 0,0045$ .

Решение. Так как  $0,001 < 0,0045 < 0,01$ , то

$$\lg 0,001 < \lg 0,0045 < \lg 0,01,$$

т. е.  $-3 < \lg 0,0045 < -2$ . Выходит, что

$$\lg 0,0045 = -3 + \alpha,$$

где  $0 < \alpha < 1$ . Характеристика  $\lg 0,0045$  равна  $-3$ .

**Теорема 1.** *Характеристика логарифма числа, большего единицы, на единицу меньше числа цифр в целой части числа.*

**Доказательство.** Пусть число  $N$  имеет в целой части  $n$  цифр. Тогда

$$10^{n-1} \leq N < 10^n,$$

так как  $10^{n-1}$  есть наименьшее целое  $n$ -значное число, а  $10^n$  есть  $(n+1)$ -значное число. Значит,

$$n-1 \leq \lg N < n,$$

т. е.

$$\lg N = (n-1) + \alpha,$$

где  $0 \leq \alpha < 1$ . Характеристика  $\lg N$  равна  $n-1$ .

**Теорема 2.** *Характеристика логарифма числа, меньшего единицы, содержит столько отрицательных единиц, сколько нулей пишется в десятичном изображении этого числа до первой цифры, отличной от нуля, считая и нуль целых.*

**Доказательство.** Пусть в десятичном изображении числа  $N$  пишется  $n$  нулей до первой цифры, отличной от нуля, т. е.

$$N = \underbrace{0,00\dots 0a\dots}_{n \text{ цифр}}$$

$a$  — цифра, отличная от нуля. Тогда  $(0,1)^n \leq N < (0,1)^{n-1}$ . Значит,

$$\lg (0,1)^n \leq \lg N < \lg (0,1)^{n-1},$$

т. е.

$$-n \leq \lg N < -(n-1).$$

Выходит, что

$$\lg N = -n + \alpha,$$

где  $0 \leq \alpha < 1$ . Характеристика  $\lg N$  равна  $-n$ .

**Пример.** Найти характеристики логарифмов чисел

$$2,7; 38,7; 356,5; 1127,56; 0,43; 0,00026.$$

*Ответ.* 0; 1; 2; 3; —1; —4.

Принята такая запись логарифмов чисел, меньших единицы:

$$-3,7 = \bar{4},3; \quad -0,275 = \bar{1},725.$$

т. е. логарифмы чисел, меньших единицы, представляют в виде суммы целого отрицательного числа (характеристика) и неотрицательного числа, меньшего единицы (мантисса).

## § 11. Понятие о вычислении логарифмов

Для использования логарифмов при вычислениях необходимо, чтобы в распоряжении вычислителя имелись достаточно подробные таблицы значений логарифмической функции, вычисленные с определенной, достаточной для практических целей, точностью.

Математика располагает различными средствами для составления таких таблиц. Однако рассмотрение этих способов вычисления логарифмов выходит за пределы школьной программы.

Можно указать способ, далеко не совершенный, но весьма простой по идее, из рассмотрения которого будет видно, что логарифм любого натурального числа может быть вычислен с любой точностью.

Пусть требуется вычислить логарифм натурального числа  $N$  с точностью до  $\frac{1}{k}$ . Возведем  $N$  в  $k$ -ю степень и определим количество цифр  $t$  получаемого при этом числа. Тогда

$$\lg N^k = (t-1) + \alpha; \quad 0 \leq \alpha < 1,$$

отсюда

$$\lg N = \frac{t-1}{k} + \frac{\alpha}{k}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{t-1}{k} \leq \lg N < \frac{t}{k}.$$

Например,  $2^{10} = 1024$ , значит,  $\lg 2^{10} = 3, \dots$  Отсюда  $\lg 2 = 0,3 \dots$

На следующем примере будет показан более совершенный способ вычисления логарифмов.

**Пример.** Вычислить  $\lg 2$ .

**Решение.** Обозначив искомый логарифм буквой  $x$ , имеем

$$10^x = 2.$$

Так как  $10^0 < 2 < 10$ , то  $0 < x < 1$ . Положим  $x = \frac{1}{y}$ , где  $y > 1$ . Тогда

$\frac{1}{y} = 2$  или  $10 = 2^y$ . Так как  $2^3 < 10 < 2^4$ , то

$$3 < y < 4.$$

Положим  $y = 3 + \frac{1}{z}$ , где  $z > 1$ . Тогда

$$2^{3+\frac{1}{z}} = 10; \quad 2^{\frac{1}{z}} = \frac{10}{2^3} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}; \quad 2 = \left(\frac{5}{4}\right)^z.$$

Так как  $\frac{125}{64} < 2 < \frac{625}{256}$  или, что все равно,  $\left(\frac{5}{4}\right)^3 < 2 < \left(\frac{5}{4}\right)^4$ , то

$$3 < z < 4.$$

Дальнейшие вычисления по этой схеме затруднительны. Имеем

$$x = \frac{1}{y} = \frac{1}{3 + \frac{1}{z}},$$

где  $3 < z < 4$ . Положим  $z = 3$ , тогда

$$x = \frac{1}{3 + \frac{1}{3}} = 0,3.$$

Положим  $z = 4$ , тогда

$$x = \frac{1}{3 + \frac{1}{4}} = \frac{4}{13} = 0,307 \dots$$

Так как  $3 < z < 4$ ,  $x$  заключен между 0,3 и 0,307 ..., т. е.

$$0,30 < x < 0,308.$$

Посредством весьма несложных вычислений найдено значение  $\lg 2$  с двумя верными знаками после запятой. Более точные вычисления показывают, что  $\lg 2 = 0,30103$  с точностью до 0,00001.

## § 12. Интерполирование

Предположим, что логарифм числа  $N$  не указан в таблице. Найдем в таблице логарифмы ближайших к  $N$  чисел  $N_1$  и  $N_2$ , из которых  $N_1 < N$ , а  $N_2 > N$ . Будем считать, что приращения логарифмов пропорциональны приращениям логарифмируемых чисел. Тогда имеем

$$\frac{\lg N - \lg N_1}{\lg N_2 - \lg N_1} = \frac{N - N_1}{N_2 - N_1},$$

откуда  $\lg N$  легко определяется.

Этот способ приближенного вычисления, при котором по двум табличным значениям приближенно определяется промежуточное значение, называется *интерполированием*.

**Пример.** Найти  $\lg 474,7$ , если  $\lg 474 = 2,6758$ , а  $\lg 475 = 2,6767$ .

**Решение.** При увеличении числа на единицу логарифм его увеличился на 0,0009, так как  $2,6767 - 2,6758 = 0,0009$ . На сколько увеличится логарифм, если число увеличится на 0,7? Предполагая, что приращения логарифмов пропорциональны приращениям логарифмируемых чисел, имеем

$$\frac{x}{0,0009} = \frac{0,7}{1}; \quad x = 0,0006.$$

Таким образом, логарифм должен увеличиться на 0,0006, т. е.

$$\lg 474,7 = \lg 474 + 0,0006 = 2,6758 + 0,0006 = 2,6764.$$

Действительно, по пятизначным таблицам логарифмов видно, что

$$\lg 474,7 = 2,67642.$$

Мы получили правильный результат.

## § 13. Употребление четырехзначных логарифмических таблиц

К таблицам логарифмов приложены объяснения, в которых показано, как следует пользоваться таблицами для отыскания логарифмов чисел и отыскания чисел по их логарифмам. Здесь поэтому нет надобности давать еще раз эти объяснения. Ограничимся рассмотрением примера. Пусть надо вычислить

$$A = \frac{12 \cdot \sqrt[3]{175,2}}{\sqrt[4]{5678}}.$$

Прежде всего следует, не вдаваясь в точные вычисления, определить, какой следует ожидать ответ. Так как  $125 < 175,2 < 216$ , то

$$\sqrt[3]{175,2} \approx 5,5.$$

Так как  $70 < \sqrt[4]{5678} < 80$ , то

$$\sqrt[4]{5678} \approx 8,5.$$

Таким образом,

$$A \approx \frac{12 \cdot 5,5}{8,5} \approx 8.$$

Мы видим, что ответ следует ожидать приблизительно равный 8.

$$\lg A = \lg 12 + \frac{1}{3} \lg 175,2 - \frac{1}{4} \lg 5678.$$

$$\begin{array}{r} \lg 12 = 1,0792. \\ \lg 175,2 = 2,2435. \\ \frac{1}{3} \lg 175,2 = 0,7478. \\ \lg 5678 = 3,7542. \\ \frac{1}{4} \lg 5678 = 0,9385. \end{array} \quad \begin{array}{r} + 1,0792 \\ + 0,7478 \\ \hline 1,8270 \end{array} \quad \begin{array}{r} - 1,8270 \\ - 0,9385 \\ \hline 0,8885 \end{array}$$

$$\lg A = 0,8885; \quad A = 7,736.$$

#### § 14. Действия над логарифмами с отрицательными характеристиками

При вычислениях при помощи таблиц логарифмов часто приходится производить сложение и вычитание логарифмов, умножение логарифма на натуральное число, деление логарифма на натуральное число.

Эти действия производятся по обычным схемам с учетом незначительной особенности, вызванной тем, что характеристика логарифма может быть отрицательной.

Сложение.

$$\begin{array}{r} \bar{2},3758 \\ + \bar{3},7189 \\ \hline \bar{4},0947 \end{array}$$

Подробнее:

$$\begin{aligned} \bar{2},3758 + \bar{3},7189 &= (-2 + 0,3758) + (-3 + 0,7189) = \\ &= -5 + 1,0947 = \bar{4},0947. \end{aligned}$$

Вычитание.

$$\begin{array}{r} \bar{3},7239 \\ - \bar{4},8241 \\ \hline 0,8998 \end{array}$$

Так как мантисса вычитаемого больше мантиссы уменьшаемого, к мантиссе уменьшаемого мысленно прибавляется единица, а от характеристики отнимается единица.

Подробнее:

$$\bar{3},7239 - \bar{4},8241 = (-4 + 1,7239) - (-4 + 0,8241) = 0,8998.$$

Умножение.  $\bar{3},2373 \cdot 5 = \bar{14},1865$ . Подробнее:

$$3,2373 \cdot 5 = (-3 + 0,2373) \cdot 5 = -15 + 1,1865 = \bar{14},1865.$$

Деление.  $\bar{6},2344 : 2 = \bar{3},1172$ .

Если бы потребовалось  $\bar{6},2344$  разделить на 4, следовало бы к характеристике прибавить  $-2$ , а к мантиссе  $+2$ , т. е.

$$\bar{6},2344 : 4 = (-8 + 2,2344) : 4 = -2 + 0,5586 = \bar{2},5586.$$

Пример. Вычислить

$$A = \sqrt[5]{\frac{842,7 \cdot 0,00379}{(0,03)^3 \cdot (279)^2}}.$$

Приближенная оценка:

$$A \approx \sqrt[5]{\frac{800 \cdot 0,004}{(0,03 \cdot 300)^3 \cdot 0,03}} = \sqrt[5]{\frac{8 \cdot 0,4}{81 \cdot 0,03}} \approx \sqrt[5]{\frac{32}{24}} \approx 1.$$

Вычисление.

$$\lg A = \frac{1}{5} \lg 842,7 + \frac{1}{5} \lg 0,00379 - \frac{3}{5} \lg 0,03 - \frac{2}{5} \lg 279.$$

$$\lg 842,7 = 2,9257.$$

$$\frac{1}{5} \lg 842,7 = 0,5851.$$

$$\lg 0,00379 = \bar{3},5786.$$

$$\frac{1}{5} \lg 0,00379 = \bar{1},5157.$$

$$\lg 0,03 = \bar{2},4771.$$

$$\frac{3}{5} \lg 0,03 = \frac{3 \cdot \bar{2},4771}{5} = \frac{\bar{5},4313}{5} = \bar{1},0863.$$

$$\lg 279 = 2,4456.$$

$$\frac{2}{5} \lg 279 = 0,4 \cdot 2,4456 = 0,97824 \approx 0,9782.$$

$$\begin{array}{r} + 0,5851 \\ + \frac{1,5157}{0,1008} \\ + \frac{\bar{1},0863}{0,0645} \\ - 0,1008 \\ - 0,0645 \\ - 0,0363 \end{array}$$

$$\lg A = 0,0363; \quad A = 1,087.$$

## § 15. Понятие об устройстве логарифмической линейки

Расскажем сначала, как при [помощи двух линеек можно производить сложение и вычитание чисел.

Возьмем линейку произвольной длины и разобьем ее делениями на 30 равных частей. У каждого деления поставим отметку 0, 1, 2, ..., 30 (рис. 89).

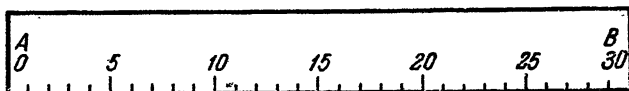


Рис. 89.

Возьмем еще одну линейку такой же длины и разобьем ее на 30 равных частей так же, как и первую. Отметки на линейках должны быть расположены так, чтобы у одной из них они были нанесены на нижнем краю, а у другой — на ее верхнем краю (рис. 90).

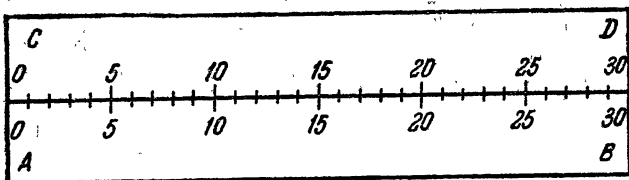


Рис. 90.

При помощи этих двух линеек можно производить сложение и вычитание чисел.

Предположим, что мы хотим к числу 12 прибавить число 17. Отметку 12 на линейке *AB* поставим против отметки 0 на линейке *CD*. Затем найдем на линейке *CD* отметку 17 и прочтем противстоящую ей отметку 29 на линейке *AB*. Эта отметка 29 и дает нам искомую сумму (рис. 91).

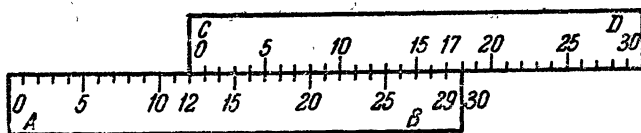


Рис. 91.

Точно так же производится вычитание. Предположим, что мы хотим от 28 отнять 13. Против отметки 28 на линейке *AB* устанавливаем отметку 13 на линейке *CD*. Против отметки 0 на линейке *CD* находится отметка 15 на линейке *AB*. Эта отметка 15 и дает нам искомую разность (рис. 92).

По такой же схеме ведутся вычисления и на логарифмической линейке. Различие лишь заключается в том, что при работе на логарифмической линейке складываются и вычитаются не числа, а их логарифмы.

Возьмем линейку *MN* произвольной длины и примем ее за единицу. У точки *M* поставим отметку 1, а у точки *N* — отметку 10. Это означает, что точка *M* изображает  $\lg 1$ , а точка *N* изображает  $\lg 10$ .

Отметку 2 мы ставим у точки  $M_2$ , находящейся от точки  $M$  на расстоянии приблизительно  $0,3 MN$ . Это означает, что точка  $M_2$  изображает  $\lg 2$  ( $\lg 2 = 0,301$ ).

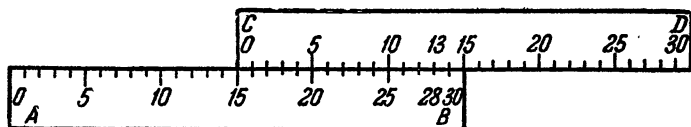


Рис. 92.

Отметку 3 мы ставим у точки  $M_3$ , находящейся от точки  $M$  на расстоянии приблизительно  $0,48 MN$ . Это означает, что точка  $M_3$  изображает  $\lg 3$  ( $\lg 3 = 0,477$ ).

По этому же правилу ставим и остальные отметки. Получается линейка (рис. 93), на которой нанесена логарифмическая шкала.

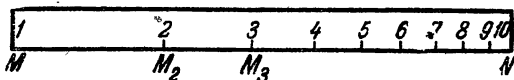


Рис. 93.

Возьмем еще одну линейку такой же длины, как и  $MN$ , и нанесем на ней точно такую же шкалу, как и на  $MN$ . Отметки на линейках и здесь должны быть расположены так, чтобы у одной из них они были нанесены на нижнем краю, а у другой — на ее верхнем краю (рис. 94).

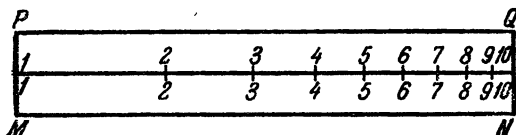


Рис. 94.

Из способа построения шкал на линейках  $MN$  и  $PQ$  вытекает, что сложение, произведенное при помощи линеек с логарифмическими шкалами, означает сложение логарифмов и, следовательно, может быть использовано для умножения чисел, логарифмы которых складывались.

Вычитание, произведенное при помощи линеек с логарифмическими шкалами, означает вычитание логарифмов и, следовательно, может быть использовано для деления чисел, логарифмы которых вычитались.

Из сказанного вытекают следующие правила умножения и деления чисел на логарифмической линейке.

**Правило умножения.** Для того чтобы при помощи двух одинаковых линеек  $MN$  и  $PQ$  с логарифмическими шкалами перемножить два числа  $m$  и  $n$ , нужно на линейке  $MN$  отыскать деление с отметкой  $m$  и поставить это деление против отметки 1 или 10 на линейке  $PQ$ . Затем на линейке  $PQ$  отыскать деление с отметкой  $n$  и прочесть на линейке  $MN$  противостоящую отметку, которая и даст искомое произведение.

**Правило деления.** Для того чтобы при помощи двух одинаковых линеек с логарифмическими шкалами разделить число  $m$  на  $n$ , нужно отметку  $m$  на линейке  $MN$  поставить против отметки  $n$  на линейке  $PQ$ . Частное будет дано отметкой на линейке  $MN$ , находящейся против отметки 1 или 10 на линейке  $PQ$ .



На рис. 95 показано умножение 2 на 3. На рис. 96 показано умножение 8 на 5. На этих же рисунках показано и деление 6 на 3 (рис. 95) и деление 40 на 5 (рис. 96).

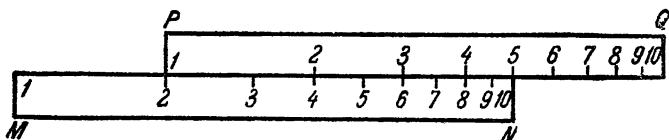


Рис. 95.

Устройство логарифмической линейки изложено здесь очень кратко и только для того, чтобы помочь учащемуся сделать первые шаги для ознакомления с этим простейшим счетным прибором. Для того

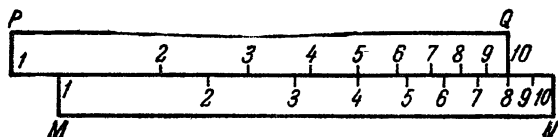


Рис. 96.

чтобы научиться быстро считать на логарифмической линейке, нужно упражняться и попутно ознакомиться с подробным описанием линейки и правилами ее использования.

Для приближенных вычислений логарифмическая линейка, длина шкалы которой 25 см, может заменить таблицы трехзначных логарифмов.

## § 16. Решение некоторых трансцендентных уравнений

Мы рассматривали уравнения первой степени, квадратные, би-квадратные, иррациональные. Все эти уравнения относятся к классу алгебраических уравнений.

Помимо алгебраических уравнений, рассматриваются уравнения неалгебраические, или *трансцендентные*.

Мы рассмотрим некоторые трансцендентные уравнения: уравнения, содержащие неизвестное в показателе степени (*показательные уравнения*), и уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма (*логарифмические уравнения*).

Пример. Решить уравнение  $4^x = 2^{\frac{x+1}{x}}$ .

Решение. Предположим, что уравнение имеет решение. Тогда

$$2^{2x} = 2^{\frac{x+1}{x}}.$$

Так как степени числа 2 равны, то должны быть равны и показатели степеней

$$2x = \frac{x+1}{x}.$$

Отсюда

$$2x^2 - x - 1 = 0; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Проверка показывает, что оба решения удовлетворяют уравнению.

$$\text{Ответ. } x_1 = 1; \quad x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Пример. Решить уравнение  $3^{x+3} - 3^{x-1} = 80$ .

Решение. Допустим, что уравнение имеет решение. Тогда

$$3^{x-1}(3^4 - 1) = 80; \quad 3^{x-1} \cdot 80 = 80;$$

$$3^{x-1} = 1; \quad 3^{x-1} = 3^0.$$

Так как степени числа 3 равны, должны быть равны и показатели степеней

$$x - 1 = 0; \quad x = 1.$$

Проверка показывает, что найденное решение удовлетворяет уравнению.

$$\text{Ответ. } x = 1.$$

Пример. Решить уравнение  $5^{3x} - 23 \cdot 5^x - 50 = 0$ .

Решение. Предположим, что уравнение имеет решение. Тогда, положив  $5^x = y$ , получим

$$y^3 - 23y - 50 = 0,$$

отсюда

$$y_1 = 25; \quad y_2 = -2.$$

Второе значение для  $y$  должно быть отброшено, так как  $5^x$  не может равняться отрицательному числу. Остается

$$5^x = 25; \quad x = 2.$$

Проверка показывает, что это решение удовлетворяет уравнению.

$$\text{Ответ. } x = 2.$$

Пример. Решить уравнение  $15^x = 43$ .

Решение. Это уравнение имеет единственное решение (свойство  $b$  показательной функции). Логарифмируя, имеем

$$x \lg 15 = \lg 43.$$

Отсюда

$$x = \frac{\lg 43}{\lg 15}.$$

Пример. Решить уравнение

$$\lg(2x^2 + 21x + 9) - \lg(2x + 1) = 1.$$

Решение. Предположим, что уравнение имеет решение, тогда

$$\lg \frac{2x^2 + 21x + 9}{2x + 1} = \lg 10.$$

Из равенства логарифмов двух чисел следует и равенство чисел

$$\frac{2x^2 + 21x + 9}{2x + 1} = 10,$$

отсюда

$$2x^2 + x - 1 = 0; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Итак, если рассматриваемое уравнение имеет решения, то этими решениями могут быть только

$$x_1 = -1; \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Первое из этих значений не удовлетворяет уравнению, так как при  $x = -1$  под знаком логарифма оказывается отрицательное число.

$$\text{Ответ. } x = \frac{1}{2}.$$

Пример. Решить уравнение  $x^{\lg x - 1} = 100$ .

Решение. Предположим, что уравнение имеет решение. Тогда логарифмы левой и правой частей должны быть равны:

$$(\lg x - 1) \lg x = 2.$$

Положим  $\lg x = y$ . Имеем:

$$y^2 - y - 2 = 0,$$

откуда

$$y_1 = -1; \quad y_2 = 2.$$

Теперь

$$\lg x_1 = -1; \quad x_1 = \frac{1}{10}; \quad \lg x_2 = 2; \quad x_2 = 100.$$

Оба значения неизвестного удовлетворяют уравнению.

$$\text{Ответ. } x_1 = \frac{1}{10}; \quad x_2 = 100.$$

## ГЛАВА VIII

### СОЕДИНЕНИЯ И БИНОМ НЬЮТОНА

#### § 1. Размещения

Имеется  $m$  элементов (т. е. предметов, букв, цифр, чисел и т. д.). Выберем из них какие-нибудь  $k$  элементов ( $k \leq m$ ) и расположим эти  $k$  элементов в каком-нибудь порядке, т. е. так, чтобы было известно, какой элемент находится на первом месте, какой — на втором и т. д.

**Определение.** Расположенная совокупность  $k$  элементов, взятых из данных  $m$  элементов, называется *размещением из  $m$  элементов по  $k$* .

По определению, два размещения из  $m$  элементов по  $k$  являются различными, если они отличаются или самими элементами, или порядком их расположения.

Число всевозможных размещений из  $m$  элементов по  $k$  обозначается знаком  $A_m^k$ , где  $m$  показывает число всех элементов, а  $k$  — число элементов, входящих в каждое размещение. Задача состоит в отыскании общей формулы для подсчета  $A_m^k$ . Решение задачи разобьем на две части. В первой части рассмотрим несколько частных случаев с тем, чтобы на основе их построить гипотезу для общего случая. Во второй части проверим гипотезу методом математической индукции.

**Случай 1.**  $k=1$ . Пусть  $m=5$ , т. е. имеется 5 элементов:  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ . В каждое размещение по одному элементу входит либо  $a_1$ , либо  $a_2$ , либо  $a_3$ , либо  $a_4$ , либо  $a_5$ . Таким образом,  $A_5^1=5$ . Очевидно, что и при всяком  $m$

$$A_m^1 = m.$$

**Случай 2.**  $k=2$ . Пусть  $m=4$ , т. е. имеется 4 элемента:  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Для того чтобы составить все размещения из этих элементов по 2, выпишем сначала все размещения по 2, у которых на первом месте находится элемент  $a_1$ . Получим строку

$$a_1, a_2; \quad a_1, a_3; \quad a_1, a_4,$$

содержащую три размещения. Выпишем теперь все размещения по 2, у которых на первом месте находится элемент  $a_2$ . Получим строку

$$a_2, a_1; \quad a_2, a_3; \quad a_2, a_4$$

содержащую еще три размещения. Далее имеем строку

$$a_3, a_1; \quad a_3, a_2; \quad a_3, a_4$$

и, наконец, строку

$$a_4, a_1; \quad a_4, a_2; \quad a_4, a_3.$$

Всего имеем 4 строки, в каждой из которых содержится три размещения из 4 элементов по 2. Таким образом,

$$A_4^2 = 4 \cdot 3.$$

Если бы  $m=10$ , то, поступая таким же образом, мы получили бы 10 строк, в каждой из которых содержалось бы по 9 размещений из 10 элементов по 2:

$$a_1, a_2; \quad a_1, a_3; \quad a_1, a_4; \quad a_1, a_5; \quad a_1, a_6;$$

$$a_1, a_7; \quad a_1, a_8; \quad a_1, a_9; \quad a_1, a_{10}$$

и т. д. Таким образом,

$$A_{10}^2 = 10 \cdot 9.$$

Все это наводит на гипотезу, что при всяком  $m$ .

$$A_m^2 = m(m-1).$$

Рассматривая, если потребуется, еще и другие примеры, можно заметить, что  $A_m^k$  равно произведению  $k$  последовательных целых чисел, наибольшее из которых  $m$ , т. е. при любом  $m$  и при любом  $k$  (конечно,  $k \leq m$ )

$$A_m^k = m(m-1)(m-2) \dots [m-(k-1)]. \quad (1)$$

Рассуждения, которые были проведены, не являются доказательством того, что формула (1) верна. Эти рассуждения дали лишь возможность построить гипотезу. Нужно еще доказать, что гипотеза эта верна.

*Теорема. Число размещений из  $m$  элементов по  $k$  может быть вычислено по формуле*

$$A_m^k = m(m-1)(m-2) \dots (m-k+1).$$

*Доказательство.* Доказательство проводится методом математической индукции, причем индукция ведется по  $k$ .

При  $k=1$  утверждение справедливо, так как непосредственно видно, что  $A_m^1 = m$  и по формуле (1)  $A_m^1 = m$ .

Допустим, что утверждение справедливо при  $k=n$ , где  $n < m$ , т. е.

$$A_m^n = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1).$$

Докажем, что тогда утверждение должно быть справедливым и при  $k=n+1$ , т. е.

$$A_m^{n+1} = m(m-1) \dots (m-n+1)(m-n).$$

Для получения размещений из  $m$  элементов по  $n+1$  возьмем все размещения из  $m$  элементов по  $n$  и к каждому из них на  $(n+1)$ -е место припишем каждый из остальных  $m-n$  элементов. Таким путем получим  $(m-n)A_m^n$  размещений.

Если мы теперь докажем, что ни одно размещение из  $m$  элементов по  $n+1$  нами не пропущено и ни одно из этих размещений не выписано дважды, теорема будет доказана.

Возьмем произвольное размещение  $A$  из  $m$  элементов по  $n+1$ . Пусть в размещении  $A$  на  $(n+1)$ -м месте находится элемент  $a_s$ . Отбросим этот элемент, получим размещение  $A_1$  из  $m$  элементов по  $n$ . Так как мы брали все размещения из  $m$  элементов по  $n$ , взято и размещение  $A_1$ . К этому размещению на  $(n+1)$ -е место мы приписывали *каждый* из остальных элементов, значит, приписали и элемент  $a_s$ . Выходит, что ни одно размещение из  $m$  элементов по  $n+1$  нами не пропущено.

Допустим теперь, что размещение  $A$  из  $m$  элементов по  $n+1$  нами получено дважды. Вычеркнем в каждом из этих размещений элемент, находящийся на последнем месте. Получим одно и то же размещение  $A_1$  из  $m$  элементов по  $n$ . Выходит, что к одному и тому же размещению  $A_1$  два раза в конце был приписан один и тот же элемент. Это противоречит способу, посредством которого составлялись размещения из  $m$  элементов по  $n+1$ .

Итак,

$$A_m^{n+1} = (m-n)A_m^n$$

но

$$A_m^n = m(m-1)\dots(m-n+1).$$

Значит,

$$A_m^{n+1} = m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n).$$

Утверждение справедливо при  $k=1$ , и из справедливости его при  $k=n$  следует его справедливость при  $k=n+1$ .

Теорема доказана.

Пример.  $A_2^1 = 12 \cdot 11 \cdot 10 = 1320$ .

Пример. Сколько различных двузначных чисел можно записать при помощи цифр 1, 2, 3 и 4, если ни одна цифра не входит в изображение числа дважды?

Решение. Искомое число равно  $A_2^1 = 4 \cdot 3 = 12$ .

## § 2. Перестановки

Размещения из  $m$  элементов по  $m$  называются *перестановками* из  $m$  элементов. Таким образом, две различные перестановки из данных  $m$  элементов не могут отличаться одна от другой элементами, а отличаются только порядком расположения элементов.

**Определение.** Расположенная совокупность  $m$  элементов называется *перестановкой из  $m$  элементов*.

Число всевозможных различных перестановок из  $m$  элементов обозначается знаком  $P_m$ . По определению,

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\dots 2 \cdot 1.$$

Произведение  $1 \cdot 2 \dots m$  первых  $m$  натуральных чисел обозначается  $m!$  (читается:  $m$  факториал). Таким образом,  $P_m = m!$

**Пример.** Сколько четырехзначных чисел можно записать при помощи цифр 1, 2, 3, 4, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

**Решение.** Искомое число равно числу всевозможных перестановок из четырех элементов

$$P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24.$$

### § 3. Сочетания

**Определение.** *Сочетанием из  $m$  элементов по  $k$*  называется совокупность, образованная любыми  $k$  элементами из данных  $m$ . Два сочетания из  $m$  элементов по  $k$  считаются различными тогда и только тогда, когда они отличаются по крайней мере одним элементом.

В отличие от размещений, где существенное значение имеет порядок, в котором расположены элементы, в сочетаниях порядок расположения элементов не имеет значения.

Число всевозможных сочетаний из  $m$  элементов по  $k$  обозначается знаком  $C_m^k$ .

**Теорема.** Число всевозможных сочетаний из  $m$  элементов по  $k$  может быть вычислено по формуле

$$C_m^k = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}.$$

**Доказательство.** Предположим, что мы составили таблицу всех сочетаний из  $m$  элементов по  $k$ . Назовем ее таблицей 1. Возьмем каждое из сочетаний таблицы 1 и всеми возможными способами переставим в нем элементы. Получим всего  $P_k C_m^k$  размещений, которые и запишем в таблицу 2. Покажем, что в таблице 2 содержится все размещения из  $m$  элементов по  $k$  и при этом ни одно размещение не содержится дважды.

Пусть  $A$  — произвольное размещение из  $m$  элементов по  $k$ . Если не обращать внимания на порядок расположения элементов, то  $A$  представляет собой некоторое сочетание  $C$  из  $m$  элементов по  $k$ .

Так как в таблице 1 содержатся все сочетания из  $m$  элементов по  $k$ , в ней содержится и это сочетание  $C$ . В сочетании  $C$  мы переставляли элементы всеми возможными способами. Следовательно, размещение  $A$  содержится в таблице 2.

Возьмем теперь два каких-нибудь размещения из таблицы 2. Если они получены из разных сочетаний, то они отличаются друг от друга элементами. Если они происходят от одного сочетания, они отличаются порядком расположения элементов. В обоих случаях эти размещения различны.

Отсюда вытекает, что

$$A_m^k = P_k \cdot C_m^k$$

т. е.

$$C_m^k = \frac{A_m^k}{P_k}; \quad C_m^k = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k}.$$

Формула для  $C_m^k$  может быть преобразована. Умножим числитель и знаменатель на  $(m-k)!$ . Получим

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Пример. В классе 30 учащихся. Сколькими способами можно назначить двух дежурных из них?

Решение. Искомое число равно числу сочетаний из 30 элементов по 2.

$$C_{30}^2 = \frac{30 \cdot 29}{1 \cdot 2} = 435.$$

Ответ. 435.

Теорема.  $C_m^k = C_m^{m-k}$ .

Доказательство.

$$C_m^k = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{1 \cdot 2 \dots k},$$

$$C_m^{m-k} = \frac{m(m-1)\dots(k+1)}{1 \cdot 2 \dots (m-k)}.$$

Разделим почленно

$$\frac{C_m^k}{C_m^{m-k}} = \frac{[m(m-1)\dots(m-k+1)] [(m-k)\dots 2 \cdot 1]}{[1 \cdot 2 \dots k] [(k+1)\dots(m-1)m]} = \frac{m!}{m!} = 1.$$

Эту теорему можно доказать и иначе.

Выбирая какие-нибудь  $k$  элементов из данных  $m$ , мы составляем некоторое сочетание из  $m$  элементов по  $k$ . Остальные  $m-k$  элементов образуют сочетание из  $m$  элементов по  $m-k$ .

Таким образом, каждому сочетанию из  $m$  элементов по  $k$  соответствует одно сочетание из  $m$  элементов по  $m-k$  и наоборот. Значит число сочетаний из  $m$  элементов по  $k$  равно числу сочетаний из  $m$  элементов по  $m-k$ .

Пример.  $C_{100}^8 = C_{100}^2$ .

### Упражнения

1. Пользуясь формулой  $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ , показать, что  $C_m^k = C_m^{m-k}$ .
2. Нужно распределить преподавание в шести классах между тремя преподавателями. Сколькими способами можно производить это распределение, если каждый должен получить два класса?



## § 4. Некоторые суммы и их свойства

Пусть

$$a_1, a_2, \dots, a_n \quad (1)$$

— некоторые числа. Пусть  $S_n^1$  обозначает сумму всех этих чисел,  $S_n^2$  обозначает сумму всевозможных произведений этих чисел, взятых по два,  $S_n^3$  обозначает сумму всевозможных произведений этих чисел, взятых по три, и т. д. Вообще  $S_n^k$  означает сумму всевозможных произведений этих чисел, взятых по  $k$ . Таким образом,  $S_n^n$  обозначает произведение этих чисел

$$S_n^1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$S_n^2 = a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_1 a_n + a_2 a_3 + \dots + a_2 a_n + \dots + a_{n-1} a_n,$$

$$S_n^n = a_1 a_2 a_3 \dots a_n.$$

Присоединим к числам (1) еще какое-нибудь число  $a_{n+1}$ . Получим  $n+1$  чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}. \quad (2)$$

Пусть  $S_{n+1}^1$  обозначает сумму всех чисел (2),  $S_{n+1}^2$  обозначает сумму всевозможных произведений чисел (2), взятых по два,  $S_{n+1}^3$  обозначает сумму всевозможных произведений чисел (2), взятых по три, и т. д. Вообще  $S_{n+1}^k$  обозначает сумму всевозможных произведений чисел (2), взятых по  $k$ . Таким образом,  $S_{n+1}^{n+1}$  обозначает произведение чисел (2).

Рассматриваемые суммы обладают следующими свойствами.

Свойство 1.

$$S_{n+1}^1 = S_n^1 + a_{n+1},$$

$$S_{n+1}^2 = S_n^2 + a_{n+1} S_n^1,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S_{n+1}^k = S_n^k + a_{n+1} S_n^{k-1},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$S_{n+1}^n = S_n^n + a_{n+1} S_n^{n-1},$$

$$S_{n+1}^{n+1} = a_{n+1} S_n^n.$$

Свойство 2. При любом  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) в сумме  $S_n^k$  содержится  $C_n^k$  слагаемых.

Свойство 3. Если  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$ , то  $S_n^k = C_n^k a^k$ , где  $1 \leq k \leq n$ .

Свойства 2 и 3 непосредственно вытекают из способа составления рассматриваемых сумм. Остается доказать справедливость свойства 1.

Возьмем какое-нибудь слагаемое, входящее в  $S_{n+1}^k$ . Такое слагаемое является произведением  $k$  чисел, взятых из (2). Возможно одно

из двух: либо число  $a_{n+1}$  в это слагаемое не входит в качестве сомножителя, либо  $a_{n+1}$  в него сомножителем входит.

На этом основании разобьем все слагаемые, входящие в  $S_{n+1}^k$ , на две группы: к первой группе отнесем те из них, которые не содержат число  $a_{n+1}$  в качестве сомножителя, ко второй группе отнесем те слагаемые, которые содержат число  $a_{n+1}$  в качестве сомножителя. Сумма слагаемых первой группы есть  $S_n^k$ , так как эта сумма состоит из всевозможных произведений чисел совокупности (1), взятых по  $k$ .

Из суммы, которую составляют слагаемые второй группы, вынесем за скобки  $a_{n+1}$ . В скобке останется сумма всевозможных произведений чисел совокупности (1), взятых по  $k-1$ .

Таким образом,  $S_{n+1}^k = S_n^k + a_{n+1} S_n^{k-1}$ .

Следствие.  $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ .

## § 5. О произведении двучленов, первые члены которых одинаковы

Рассмотрим произведение  $n$  двучленов, имеющих один и тот же первый член:

$$\Pi_n = (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_n). \quad (1)$$

При  $n=2$  имеем

$$\Pi_2 = (x + a_1)(x + a_2) = x^2 + (a_1 + a_2)x + a_1a_2.$$

При  $n=3$  имеем

$$\begin{aligned} \Pi_3 &= (x + a_1)(x + a_2)(x + a_3) = \\ &= x^3 + (a_1 + a_2 + a_3)x^2 + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3)x + a_1a_2a_3. \end{aligned}$$

При  $n=4$  имеем

$$\begin{aligned} \Pi_4 &= (x + a_1)(x + a_2)(x + a_3)(x + a_4) = \\ &= x^4 + (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)x^3 + \\ &\quad + (a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4)x^2 + \\ &\quad + (a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4)x + a_1a_2a_3a_4. \end{aligned}$$

Эти результаты можно записать короче:

$$\Pi_2 = x^2 + S_2^1x + S_2^2,$$

$$\Pi_3 = x^3 + S_3^1x^2 + S_3^2x + S_3^3,$$

$$\Pi_4 = x^4 + S_4^1x^3 + S_4^2x^2 + S_4^3x + S_4^4.$$

Из рассмотрения  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$ ,  $\Pi_4$  можно высказать следующую гипотезу: при любом натуральном  $n$

$$\Pi_n = x^n + S_n^1x^{n-1} + S_n^2x^{n-2} + \dots + S_n^n. \quad (2)$$

Докажем, что формула (2) справедлива. Доказательство проводится методом математической индукции. При  $n=1$  произведение (1) имеет вид  $x + a_1$ . Правая часть формулы (2) при  $n=1$  тоже равна

$x + a_1$ . Предположим, что формула (2) справедлива при  $n = k$ , где  $k$  — какое-нибудь натуральное число, т. е.

$$\Pi_k = x^k + S_k^1 x^{k-1} + S_k^2 x^{k-2} + \dots + S_k^k.$$

Докажем, что тогда формула (2) справедлива и при  $n = k + 1$ , т. е.

$$\Pi_{k+1} = x^{k+1} + S_{k+1}^1 x^k + S_{k+1}^2 x^{k-1} + \dots + S_{k+1}^{k+1}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \Pi_{k+1} &= \Pi_k(x + a_{k+1}) = (x^k + S_k^1 x^{k-1} + S_k^2 x^{k-2} + \dots + S_k^k)(x + a_{k+1}) = \\ &= x^{k+1} + (S_k^1 + a_{k+1})x^k + (S_k^2 + a_{k+1}S_k^1)x^{k-1} + \dots + a_{k+1}S_k^k. \end{aligned}$$

На основании свойства 1 § 4

$$\Pi_{k+1} = x^{k+1} + S_{k+1}^1 x^k + S_{k+1}^2 x^{k-1} + \dots + S_{k+1}^k x + S_{k+1}^{k+1}.$$

Утверждение доказано.

## § 6. Натуральная степень бинома (формула Ньютона)

**Теорема.** При любом натуральном  $n$

$$(x + a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \dots + a^n. \quad (1)$$

Равенство (1) называется *формулой Ньютона*.

**Доказательство.** Положим в формуле (2) § 5

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = a.$$

Тогда на основании свойства 3 § 4 имеем формулу (1).

**Пример.**

$$(x + a)^3 = x^3 + C_3^1 x^2 a + C_3^2 x a^2 + a^3 = x^3 + 3x^2 a + 3x a^2 + a^3.$$

**Пример.**

$$\begin{aligned} (x + a)^5 &= x^5 + C_5^1 x^4 a + C_5^2 x^3 a^2 + C_5^3 x^2 a^3 + C_5^4 x a^4 + a^5 = \\ &= x^5 + 5x^4 a + 10x^3 a^2 + 10x^2 a^3 + 5x a^4 + a^5. \end{aligned}$$

## § 7. Свойства разложения по формуле Ньютона

1. Члены разложения расположены по убывающим степеням буквы  $x$  и по возрастающим степеням буквы  $a$ . Показатели буквы  $x$  последовательно уменьшаются на единицу, начиная от  $n$  (в первом члене) и до нуля (в последнем члене). Показатели буквы  $a$  последовательно увеличиваются на единицу, начиная от нуля (в первом члене) и до  $n$  (в последнем).

Сумма показателей при  $x$  и  $a$  постоянна и равна в каждом члене  $n$  — показателю степени бинома.

2. Число членов разложения равно  $n + 1$ , т. е. на единицу больше показателя степени бинома.

## 3. Коэффициенты разложения суть

$$1, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n,$$

т. е. коэффициент первого члена равен единице, а коэффициенты членов, начиная со второго, равны числу сочетаний из  $n$  по  $k$ , где  $k$  — число предшествующих членов.

4. Все члены разложения, начиная со второго, можно получить по формуле

$$T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} a^k, \quad (1)$$

придавая  $k$  последовательно значения  $1, 2, \dots, n$ .

Равенство (1) называется формулой общего члена разложения. Например, при  $k=1$  получаем второй член разложения

$$T_2 = C_n^1 x^{n-1} a.$$

5. Коэффициенты крайних членов и членов, равноудаленных от крайних, равны между собой. Действительно, коэффициент первого и последнего членов равны единице. Коэффициент члена  $T_{k+1}$ , т. е.  $(k+1)$ -го члена, считая с начала, равен  $C_n^k$ . Коэффициент члена  $T_{n-k+1}$ , т. е.  $(k+1)$ -го члена, считая с конца, равен  $C_n^{n-k}$ . В § 3 показано, что  $C_n^k = C_n^{n-k}$ .

Это свойство можно объяснить и так. Рассмотрим

$$(x + a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + \dots + a^n, \quad (2)$$

$$(a + x)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} x + C_n^2 a^{n-2} x^2 + \dots + x^n. \quad (3)$$

Коэффициенты членов разложения (2) равны коэффициентам соответствующих членов разложения (3), т. е.  $k$ -й член разложения (2) имеет тот же коэффициент, что и  $k$ -й член разложения (3). Но разложение (3) получается из разложения (2), если все члены разложения (2) написать в обратном порядке, и следовательно,  $k$ -й член разложения (3), считая с начала, есть  $k$ -й член разложения (2), считая с конца.

6. Если показатель степени бинома есть нечетное число, разложение содержит четное число членов. Коэффициенты второй половины членов в этом случае те же, что и коэффициенты первой половины членов, но расположены в обратном порядке.

Если показатель степени бинома есть число четное, разложение содержит нечетное число членов. В этом случае в середине разложения будет коэффициент, который не повторяется, а с обеих сторон от него коэффициенты равны, но расположены в обратном порядке.

7. Вычисление коэффициентов разложения можно вести по следующему правилу. Для того чтобы из коэффициента  $k$ -го члена разложения получить коэффициент следующего  $(k+1)$ -го члена, достаточно коэффициент  $k$ -го члена умножить на показатель степени при

$x$  в этом члене и разделить на число членов, предшествующих определяемому.

Действительно, коэффициент  $k$ -го члена есть  $C_n^{k-1}$ , а коэффициент  $(k+1)$ -го члена есть  $C_n^k$ :

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1\cdot 2\dots k},$$

$$C_n^{k-1} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)}{1\cdot 2\dots(k-1)},$$

отсюда

$$\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} = \frac{n-k+1}{k},$$

т. е.

$$C_n^k = C_n^{k-1} \frac{n-k+1}{k}.$$

Число  $n-k+1$  есть показатель степени при  $x$  в  $k$ -м члене,  $k$  — число членов, предшествующих определяемому  $(k+1)$ -му члену.

Пример. Определить все члены разложения

$$(x+a)^6 = x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + \dots$$

Решение. Чтобы найти коэффициент четвертого члена, достаточно 15 (коэффициент третьего члена) умножить на 4 (показатель степени при  $x$  в третьем члене) и разделить на 3 (число членов, предшествующих определяемому четвертому).

Имеем

$$\frac{15 \cdot 4}{3} = 20.$$

Значит,

$$(x+a)^6 = x^6 + 6x^5a + 15x^4a^2 + 20x^3a^3 + 15x^2a^4 + 6xa^5 + a^6.$$

Коэффициенты последних трех членов равны коэффициентам первых трех, но расположены в обратном порядке.

8. Сумма всех коэффициентов разложения  $(x+a)^n$  равна  $2^n$ . Положим в формуле Ньютона  $x=a=1$ . Получим

$$(1+1)^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + 1,$$

т. е.

$$2^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + 1.$$

9. Разложение  $(x-a)^n$  получается из разложения  $(x+a)^n$  посредством умножения на  $-1$  членов, находящихся на четных местах. Имеем

$$\begin{aligned} (x-a)^n &= [x + (-a)]^n = \\ &= x^n + C_n^1 x^{n-1} (-a) + C_n^2 x^{n-2} (-a)^2 + \dots + (-a)^n, \end{aligned}$$

т. е.

$$(x-a)^n = x^n - C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 - \dots + (-1)^n a^n.$$

10. Сумма коэффициентов членов разложения  $(x+a)^n$ , находящихся на четных местах, равна сумме коэффициентов членов, находящихся на нечетных местах. Рассмотрим разложение

$$(1-1)^n = 1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - C_n^5 + \dots + (-1)^n.$$

Так как левая часть этого равенства равна нулю, то

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$$

### Упражнения

1. Найти коэффициент при  $x^k$  для  $0 \leq k \leq n$  в выражении  $1 + (1+x) + (1+x)^2 + \dots + (1+x)^n$ .

---

## ГЛАВА IX

### КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

#### § 1. Развитие понятия числа

Понятие числа возникло из потребностей счета и измерения у людей на самых ранних ступенях развития человеческого общества. С тех пор число является постоянным и незаменимым орудием в нашей практической деятельности. Числа мы применяем для изучения окружающего нас материального мира, для изучения изменений, происходящих в окружающей нас действительности.

Натуральные числа и положительные дробные числа были известны уже древним грекам. В древней Греции были известны несоизмеримые отрезки. Задачи, в которых встречались несоизмеримые отрезки древние греки решали геометрически. Но понятие иррационального числа у них еще не сложилось, и потому они не могли рассматривать отношение длин несоизмеримых отрезков как число.

Не знали греки и отрицательных чисел. Отрицательные числа появились впервые у индусов (V век). Полное признание отрицательных чисел получили лишь в XVII веке. В средние века индусы пользовались иррациональными выражениями, но строгой теории действительных чисел ими разработано не было.

Построение теории действительных (или вещественных) чисел относится ко второй половине XIX века.

В первой половине XVI века для решения уравнения третьей степени вида

$$x^3 + px + q = 0$$

нашли *формулу Кардана*

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

По этой формуле корни уравнения  $x^3 - 6x + 4 = 0$  находятся так:

$$x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{-3 - \sqrt{-4}}.$$

Между тем видно, что левая часть уравнения разлагается на множители

$$(x - 2)(x^2 + 2x - 2),$$

и уравнение имеет корни  $x_1 = 2$ ;  $x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$ .

Таким образом, выходит, что для получения *действительных корней уравнения* по формуле Кардана надо научиться извлекать квадратный корень из отрицательного числа, т. е. надо научиться производить операцию, невозможную в области действительных чисел.

Это и заставило еще в XVI веке рассматривать квадратные корни из отрицательных чисел. Так как получающийся при этом результат не может быть истолкован как результат непосредственного счета или измерения, числа эти стали называть *мнимыми* («невозможными», «воображаемыми», «ложными»). Некоторое обоснование эти числа получили во второй половине XVI века. Мнимые и действительные числа представляют собой два частных вида комплексных чисел, изучением которых мы и займемся в этой главе.

Для того чтобы представить себе содержание предстоящей нам работы в связи с новым расширением понятия числа, обратим внимание на некоторые факты, которые связаны с введением дробных, отрицательных и иррациональных чисел.

1. Введение дробных чисел вызвано потребностями измерения величин, допускающих деление на равные части, которые могут быть меньше единицы измерения. В математике возможность деления на равные части отражается в выполнимости деления натуральных чисел, или, что все равно, в решении уравнения  $mx = n$ , где  $m$  и  $n$  — натуральные числа. В области натуральных чисел это действие возможно не всегда, и лишь введение дробных чисел сделало деление натуральных чисел всегда возможным. Это вооружило математику новыми средствами для решения практических задач.

Если внимательно рассмотреть все утверждения о свойствах дробей и о правилах действий с ними, то можно заметить, что утверждения эти распадаются на две группы.

К первой группе относятся:

1) утверждение о равенстве дробей:  $\frac{a}{b}$  равно  $\frac{c}{d}$  тогда и только тогда, когда  $ad = bc$ ;

2) правило сложения:  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ ;

3) правило умножения:  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ .

Эти три утверждения не доказываются и все вместе составляют содержание определения положительного рационального числа. Все эти утверждения подсказаны теми практическими задачами, для решения которых и вводились дробные числа.

Ко второй группе относятся:

1) правило вычитания дробей;

2) правило деления дробей.

В отличие от утверждений первой группы, эти правила выводятся, доказываются. Доказательства основаны, с одной стороны, на принятых без доказательства утверждениях первой группы и, с другой



стороны, на определениях действий вычитания и деления как действий, обратных сложению и умножению.

Натуральные числа представляют собой частный вид положительных рациональных чисел (знаменатель  $n$  равен 1). Сложение, вычитание, умножение и деление натуральных чисел можно производить как по «старым» правилам, установленным для натуральных чисел, так и по «новым», установленным для положительных рациональных чисел. Результаты в обоих случаях получаются одинаковые.

Для положительных рациональных чисел сохраняются основные законы арифметических действий над натуральными числами: переместительный закон сложения, сочетательный закон сложения, переместительный закон умножения, сочетательный закон умножения, распределительный закон умножения относительно сложения.

2. Введение отрицательных чисел вызвано, кроме потребности измерения величин, могущих изменяться в противоположных направлениях, тем обстоятельством, что в области положительных рациональных чисел не всегда возможно вычитание или, что все равно, не всегда возможно решение уравнения  $x + r = r_1$ , где  $r$  и  $r_1$  — положительные рациональные числа. Введение отрицательных рациональных чисел сделало вычитание рациональных чисел всегда возможным и вооружило математику новыми средствами для решения практических задач.

Как и в п. 1, в определение рациональных чисел включаются: само собой разумеющееся правило равенства, правило сложения и правило умножения. При этом правила эти и здесь подсказаны теми практическими задачами, для решения которых вводились отрицательные числа.

Правила вычитания и деления выводятся из принятых трех правил и определений действий вычитания и деления.

Положительные числа представляют собой частный вид рациональных чисел. Действия над положительными числами можно производить как по общим правилам, установленным для рациональных чисел, так и по правилам, установленным ранее для положительных рациональных чисел. Результаты в обоих случаях получаются одинаковые.

Для рациональных чисел сохраняются основные законы арифметических действий.

3. Введение иррациональных чисел вызвано тем обстоятельством, что посредством рациональных чисел невозможно выразить отношение двух любых отрезков. Существуют несоизмеримые отрезки, и их отношение не может быть выражено рациональным числом.

Как на одну из простейших задач алгебры, которая не может быть полностью решена в области рациональных чисел, укажем на решение уравнения  $x^2 = a$ , где  $a$  — положительное число. Решение этого уравнения или, что все равно, извлечение квадратного корня из положительного числа не всегда возможно в области рациональных

чисел. Введение иррациональных чисел вооружило математику новыми средствами решения практических задач.

В результате введения иррациональных чисел оказалось возможным дать точное числовое выражение для отношения любых отрезков и решить ряд других важных задач: задачу об измерении длины окружности, задачу о существовании логарифма, задачу об извлечении корня любой степени из положительного числа и другие задачи.

Как в пп. 1 и 2, в определение действительного (вещественного) числа входят как составные части его: правило равенства, правило сложения и правило умножения. Правила эти и здесь подсказаны теми практическими задачами, для решения которых вводились иррациональные числа. Правила вычитания и деления выводятся из правил сложения и умножения и определений действий вычитания и деления.

Рациональные числа представляют собой частный вид действительных чисел. Действия над рациональными числами можно производить как по общим правилам, установленным для действительных чисел, так и по правилам, установленным ранее для рациональных чисел. Результаты в обоих случаях получаются одинаковые.

Для действительных чисел сохраняются основные законы арифметических действий.

4. Дальнейшее расширение понятия числа состоит в том, что к действительным числам присоединяются новые числа — мнимые. При этом вновь будут иметь место обстоятельства, подобные тем, которые отмечены выше.

Введение мнимых чисел вызвано тем обстоятельством, что в области действительных чисел невозможно извлечение квадратного корня из отрицательного числа или, что все равно, невозможно решение квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом.

Введем следующее определение:

$$\sqrt{-a^2} = \pm ai;$$

будем числа  $ai$ , где  $a$  — любое действительное число, называть мнимыми (точнее, чисто мнимыми). «Множитель»  $i$  поставлен для того, чтобы подчеркнуть отличие «числа»  $ai$  от действительного числа  $a$ . Буква  $i$  — первая буква латинского слова *imaginarius*, что в переводе на русский язык означает «мнимый». Таким образом,  $ai$  здесь по смыслу означает « $a$  — мнимое». Например,

$$\sqrt{-4} = \pm 2i; \quad \sqrt{-1} = \pm i; \quad \sqrt{-3} = \pm \sqrt{3} i;$$

и т. д. Этого достаточно, чтобы стало возможным решить любое квадратное уравнение с действительными коэффициентами.

Пример. Решить уравнение

$$x^2 + 2x + 10 = 0.$$

Решение.  $x = -1 \pm \sqrt{1-10} = -1 \pm \sqrt{-9} = -1 \pm 3i$ ;  
 $x_1 = -1 + 3i$ ;  $x_2 = -1 - 3i$ .

Ответ.  $x_{1,2} = -1 \pm 3i$ .

На первый взгляд такое «решение» уравнения кажется игрой, лишенной всякого смысла. В самом деле, что означает «число»  $-1 + 3i$ ? Число  $-1 + 3i$  не имеет того смысла, какой имеют действительные (вещественные) числа. Таким числом нельзя измерить ни одной величины: ни времени, ни длины, ни площади, ни скорости, ни работы и т. п. Этим и объясняется название «мнимые числа», а также тот факт, что эти числа долго не признавались математиками. Их стали признавать только тогда, когда убедились в том, что они полезны при решении практических задач.

Теперь известно, что введение мнимых чисел оказывается полезным при решении многих вопросов естествознания и техники. Сюда относятся задачи, связанные с распространением звука, света, задачи электротехники, радиотехники и др. Теперь требуется дать определение совокупности чисел, состоящей из действительных и мнимых чисел. Такая совокупность чисел называется совокупностью *комплексных чисел*.

Так же, как и при ранее произведенных расширениях понятия числа, надо ввести три правила: правило равенства комплексных чисел, правило сложения комплексных чисел, правило умножения комплексных чисел. Так же, как и раньше, эти правила должны быть подсказаны теми задачами, для разрешения которых вводятся мнимые числа.

Будем исходить из задачи решения квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом.

Уравнение  $x^2 + 2x + 10 = 0$  имеет корни  $x_1 = -1 + 3i$  и  $x_2 = -1 - 3i$ . Известно, что в случае, когда корни квадратного уравнения действительны, они удовлетворяют теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 x_2 = q.$$

Потребуем, чтобы и мнимые корни тоже удовлетворяли теореме Виета, т. е. применительно к рассматриваемому примеру потребуем, чтобы

$$(-1 + 3i) + (-1 - 3i) = -2,$$

$$(-1 + 3i)(-1 - 3i) = 10.$$

Можно заметить, что если сложение и умножение здесь производить по правилам сложения и умножения многочленов с тем условием, что  $i^2$  будет заменено числом  $-1$ , мы получим требуемый результат:

$$(-1 + 3i) + (-1 - 3i) = -1 + 3i - 1 - 3i = -2,$$

$$(-1 + 3i)(-1 - 3i) = 1 + 3i - 3i - 9i^2 = 1 - 9 \cdot (-1) = 10.$$

Этим подсказываются правила сложения и умножения.

Проведенные рассуждения отнюдь не являются доказательством правил сложения и умножения комплексных чисел. Как уже говорилось, эти правила не могут быть доказаны и принимаются без доказательства. Эти рассуждения имели цель показать, какие соображения подсказывают целесообразность введения именно этих, а не других правил сложения и умножения.

Что касается правила равенства, то оно настолько просто и естественно, что не требует никаких рассуждений, показывающих его целесообразность.

## § 2. Определение комплексного числа

**Определение.** *Комплексными* называются числа вида  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — любые действительные числа, если при этом выполняются следующие три правила:

1. **Правило равенства.** *Два комплексных числа  $a + bi$  и  $c + di$  равны тогда и только тогда, когда  $a = c$  и  $b = d$ .*

2. **Правило сложения.** *Комплексные числа складываются по следующему правилу:*

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

3. **Правило умножения.** *Комплексные числа умножаются по следующему правилу:*

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Число  $a$  называется *действительной частью*,  $bi$  называется *мнимой частью* комплексного числа  $a + bi$ . Число  $b$  называется *коэффициентом мнимой части*. Иногда числа  $a$  и  $b$  называются *первой и второй составляющими* комплексного числа  $a + bi$ .

Правило равенства комплексных чисел может быть выражено так: *Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и коэффициенты мнимых частей.*

Правило сложения может быть выражено так: *Для того чтобы сложить два комплексных числа, достаточно сложить их действительные и мнимые части.*

Умножение комплексных чисел производится по правилу умножения многочленов с тем, что  $i^2$  заменяется числом  $-1$ .

**Примеры.**

$$(2 + 3i) + (4 - i) = 6 + 2i,$$

$$(3 - i)(2 - 3i) = 6 - 9i - 2i + 3i^2 = 3 - 11i, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1.$$

**Определение.** Комплексные числа вида  $a + 0i$  отождествляются с действительными числами, именно считается, что

$$a + 0i = a,$$

в частности  $0 + 0i = 0$ .

Таким образом, действительные числа представляют собой частный вид комплексных чисел. Комплексные числа  $a + bi$ , где  $b$  не равно нулю, называются *мнимыми*. Числа вида  $0 + bi$  называются *чисто мнимыми* и считается, что  $0 + bi = bi$ .

**Замечание.** Понятия «больше» и «меньше» в применении к мнимым числам не имеют смысла. Иными словами, мнимые числа по величине не сравниваются.

### § 3. Свойства комплексных чисел

**Теорема 1.** *Каковы бы ни были комплексные числа  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , справедливы следующие равенства:*

- а)  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$  (переместительный закон сложения);
- б)  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$  (сочетательный закон сложения);
- в)  $\alpha\beta = \beta\alpha$  (переместительный закон умножения);
- г)  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$  (сочетательный закон умножения);
- д)  $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$  (распределительный закон умножения относительно сложения).

**Доказательство.** а) Пусть  $\alpha = a + bi$ ;  $\beta = c + di$ . Тогда

$$\alpha + \beta = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

$$\beta + \alpha = (c + di) + (a + bi) = (c + a) + (d + b)i.$$

Так как сложение вещественных чисел подчиняется переместительному закону, то

$$a + c = c + a; \quad b + d = d + b.$$

На основании правила равенства

$$(a + c) + (b + d)i = (c + a) + (d + b)i,$$

т. е.  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ .

Таким же путем могут быть доказаны и остальные части этой теоремы.

**Определение.** *Вычесть* из комплексного числа  $\alpha$  комплексное число  $\beta$  — это значит найти такое комплексное число  $\gamma$ , чтобы  $\alpha = \beta + \gamma$ .

**Теорема 2.** *Каковы бы ни были комплексные числа  $\alpha$  и  $\beta$ , существует и притом только одно комплексное число, являющееся разностью  $\alpha - \beta$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\alpha = a + bi$ ;  $\beta = c + di$ . Предположим, что разность  $\alpha - \beta$  существует и равна  $x + yi$ . Тогда по определению вычитания,

$$a + bi = (c + di) + (x + yi).$$

По правилу сложения,

$$a + bi = (c + x) + (d + y)i.$$

На основании правила равенства

$$\begin{cases} c + x = a, \\ d + y = b. \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) имеет единственное решение

$$\begin{cases} x = a - c, \\ y = b - d. \end{cases} \quad (2)$$

Это означает, что если разность существует, то она единственна и вычисляется по формулам (2).

Для того чтобы доказать, что разность на самом деле существует, достаточно произвести сложение

$$(c + di) + [(a - c) + (b - d)i]$$

и убедиться, что сумма равна  $a + bi$ .

Определение. *Разделить* комплексное число  $\alpha$  на комплексное число  $\beta$  — это значит найти такое комплексное число  $\gamma$ , чтобы  $\alpha = \beta\gamma$ .

Теорема 3. *Каковы бы ни были комплексные числа  $\alpha$  и  $\beta$ , существует и притом только одно комплексное число, являющееся частным от деления  $\alpha$  на  $\beta$ , если только  $\beta \neq 0 + 0i$ .*

Доказательство. Пусть  $\alpha = a + bi$ ;  $\beta = c + di$ ;  $\beta \neq 0 + 0i$ . Предположим, что частное от деления  $\alpha$  на  $\beta$  существует и равно  $x + yi$ . Тогда, по определению деления,

$$a + bi = (c + di)(x + yi).$$

По правилу умножения,

$$a + bi = (cx - dy) + (cy + dx)i.$$

На основании правила равенства

$$\begin{cases} cx - dy = a, \\ dx + cy = b. \end{cases} \quad (3)$$

Ясно, что  $c^2 + d^2 \neq 0$ , иначе  $c = d = 0$  и  $\beta = 0 + 0i$  (здесь не надо забывать, что  $c$  и  $d$  — действительные числа; сумма квадратов действительных чисел равна нулю только тогда, когда каждое из этих чисел равно нулю). Система (3) имеет единственное решение

$$x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}; \quad y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}. \quad (4)$$

Это означает, что если частное существует, то оно единственно и вычисляется по формулам (4).

Остается доказать, что частное на самом деле существует. Для этого достаточно произвести умножение

$$(c + di) \left( \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i \right)$$

и убедиться, что произведение равно  $a + bi$ .

**Определение.** Числа  $a + bi$  и  $a - bi$ , действительные части которых равны, а коэффициенты мнимых частей равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, называются *сопряженными*.

Деление комплексных чисел обычно производят посредством умножения делимого и делителя на число, сопряженное делителю.

$$\text{Пример. } \frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i.$$

### Упражнения

1. Доказать, что сумма и произведение двух комплексных сопряженных чисел вещественны.

## § 4. Свойства нуля

Известно, что число нуль обладает следующими свойствами:

Свойство 1. При любом вещественном  $a$   $a + 0 = a$ .

Свойство 2. При любом вещественном  $a$   $a \cdot 0 = 0$ .

Свойство 3. Если произведение двух вещественных чисел равно нулю, то хоть один из сомножителей равен нулю.

Этими же свойствами в совокупности комплексных чисел обладает число  $0 = 0 + 0i$ . Действительно, пусть  $a = a + bi$ . Тогда

$$1) \ a + (0 + 0i) = (a + bi) + (0 + 0i) = a + bi = a;$$

$$2) \ a \cdot (0 + 0i) = (a + bi) \cdot (0 + 0i) = 0 + 0i.$$

3) Предположим, что  $(a + bi)(c + di) = 0 + 0i$  и при этом  $a + bi \neq 0 + 0i$ . Тогда

$$c + di = \frac{0 + 0i}{a + bi} = 0 + 0i.$$

Итак, если произведение комплексных чисел равно  $0 + 0i$ , то хоть один из сомножителей  $a + bi$  и  $c + di$  равен  $0 + 0i$ .

### Упражнения

1. Доказать, что  $-1 + 3i$  и  $-1 - 3i$  удовлетворяют уравнению

$$x^2 + 2x + 10 = 0.$$

2. Показать, что сложение, вычитание, умножение и деление действительных чисел можно производить по правилам, установленным для комплексных чисел.

## § 5. Геометрическое представление комплексных чисел

Известно, что вещественные числа изображаются точками числовой оси. При этом каждое вещественное число изображается одной точкой числовой оси, и, наоборот, каждая точка числовой оси служит изображением одного вещественного числа.

Комплексные числа изображаются точками плоскости по следующему правилу: число  $a + bi$  изображается точкой  $M(a, b)$  (рис. 97). При таком представлении комплексных чисел каждое комплексное число изображается одной точкой плоскости, и, наоборот, каждая точка плоскости служит изображением одного комплексного числа.

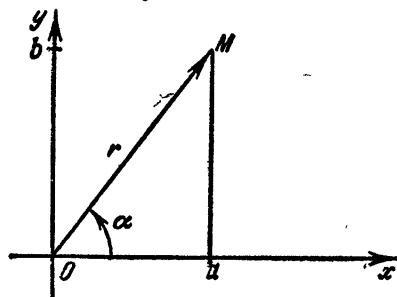


Рис. 97.

Каждая точка  $M(a, b)$  плоскости единственным образом определяет вектор  $\overline{OM}$ . Поэтому возможно и другое геометрическое представление комплексных чисел, при котором комплексное число  $a + bi$  изображается вектором  $\overline{OM}$  (см. рис. 97).

Точки оси  $Ox$  служат изображением действительных чисел, и потому ось  $Ox$  называется *осью действительных чисел* или *действительной осью*.

Точки оси  $Oy$  служат изображением чисто мнимых чисел, и потому ось  $Oy$  называется *мнимой осью*.

## § 6. Комплексные числа в тригонометрической форме

Пусть  $M$  — точка, изображающая комплексное число  $a + bi$  (рис. 97). Обозначим буквой  $r$  длину вектора  $\overline{OM}$ , а буквой  $\alpha$  угол, образованный вектором  $\overline{OM}$  с положительным направлением вещественной оси, отсчитанный от вещественной оси против часовой стрелки. По теореме Пифагора

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Из тригонометрии известно, что  $a = r \cos \alpha$ ;  $b = r \sin \alpha$ . Отсюда

$$a + bi = r(\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Правая часть последнего равенства представляет комплексное число  $a + bi$  в *тригонометрической форме*.

Арифметическое значение  $\sqrt{a^2 + b^2} = r$  называется *модулем*, или *абсолютной величиной* комплексного числа, и изображается знаком  $|a + bi|$ ;  $\alpha$  называется *аргументом* комплексного числа.

Если  $a + bi \neq 0$ , то модуль  $a + bi$ , по определению, — положительное число. Модуль нуля равен нулю.

В силу того, что  $\cos x$  и  $\sin x$  являются периодическими функциями с периодом  $2\pi$ , аргумент комплексного числа имеет бесконечное множество значений. Именно, если  $\alpha$  есть аргумент данного



комплексного числа, то  $\alpha + 2k\pi$  при любом целом  $k$  также является аргументом этого числа.

Пример. Представить в тригонометрической форме число  $1-i$ .

Решение. Здесь  $a=1$ ;  $b=-1$ . Поэтому  $r=\sqrt{2}$ ;  
 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Наименьшее положительное значение  $\alpha$  равно  $\frac{7\pi}{4}$ , поэтому

$$1-i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right),$$

или, в общем виде,

$$1-i = \sqrt{2} \left[ \cos \left( \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \right) + i \sin \left( \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \right) \right],$$

где  $k$  — любое целое число.

Этот же результат можно получить проще, если построить вектор, изображающий число  $1-i$ , и определить длину вектора  $\sqrt{2}$  и угол  $\frac{7\pi}{4}$ , образованный вектором с положительным направлением действительной оси.

*Теорема. Модуль произведения двух или нескольких комплексных чисел равен произведению модулей сомножителей. Аргумент произведения равен сумме аргументов сомножителей.*

Доказательство. Пусть

$$\alpha_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

$$\alpha_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

Тогда

$$\alpha_1 \alpha_2 = r_1 r_2 [ (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin \varphi_1 \cos \varphi_2) ].$$

По известным формулам тригонометрии

$$\alpha_1 \alpha_2 = r_1 r_2 [ \cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2) ].$$

Методом математической индукции можно доказать, что теорема справедлива для любого числа сомножителей.

*Теорема. Модуль частного равен частному модулей делимого и делителя. Аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя.*

Доказательство. Пусть

$$\alpha_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1),$$

$$\alpha_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), \quad r_2 \neq 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{a_2} &= \frac{r_1 \cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1}{r_2 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) (\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1}{r_2} (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) (\cos (-\varphi_2) + i \sin (-\varphi_2)) = \\ &= \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)].\end{aligned}$$

Пример. Зная, что

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2},$$

найти  $\cos 15^\circ$  и  $\sin 15^\circ$ .

Решение.

$$\frac{\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ}{\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ} = \cos 15^\circ + i \sin 15^\circ,$$

значит,

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \sqrt{2} \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} = \\ &= \sqrt{2} \frac{(1+i)(\sqrt{3}-i)}{(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)} = \sqrt{2} \frac{(\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i}{4}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}; \quad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

## § 7. Формула Муавра

**Теорема.** При любом натуральном  $n$

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Это утверждение называется *формулой Муавра*.

**Доказательство.** Доказательство проводится методом математической индукции. При  $n=1$  утверждение очевидно. Пусть

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^k = \cos k\varphi + i \sin k\varphi,$$

где  $k$  — некоторое натуральное число. Тогда

$$\begin{aligned}(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{k+1} &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^k (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= (\cos k\varphi + i \sin k\varphi) (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \cos (k+1)\varphi + i \sin (k+1)\varphi.\end{aligned}$$

## § 8. Извлечение квадратного корня из отрицательного числа

Извлечь квадратный корень из комплексного числа  $\alpha$  — это значит найти такое число, квадрат которого равен  $\alpha$ .

В § 2 мы условились, что  $\sqrt{-a^2} = \pm ai$  (1), и затем использовали это соглашение для установления определения комплексного числа. Покажем, что равенство (1) вытекает из принятого определения комплексного числа и определения квадратного корня. Допустим, что  $\sqrt{-a^2}$  существует и равен  $x + yi$ . Тогда, по определению квадратного корня,

$$(x + yi)^2 = -a^2.$$

По правилу умножения,

$$x^2 + 2xyi - y^2 = -a^2.$$

По правилу равенства,

$$\left. \begin{aligned} x^2 - y^2 &= -a^2, \\ 2xy &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Второе уравнение системы имеет следующие решения:  $y = 0$ ,  $x$  — любое число;  $x = 0$ ,  $y$  — любое число.

При  $y = 0$  первое уравнение принимает вид  $x^2 = -a^2$  и не имеет решений, если  $a \neq 0$  (числа  $x$  и  $a$  действительные).

При  $x = 0$  первое уравнение принимает вид  $y^2 = a^2$  и имеет два решения  $y = a$  и  $y = -a$ .

Итак, если корень квадратный из  $-a^2$  существует, то он может быть равен только  $ai$  и  $-ai$ . Так как  $(ai)^2 = -a^2$  и  $(-ai)^2 = -a^2$ , то  $\sqrt{-a^2}$  имеет два значения  $\pm ai$ .

## § 9. Извлечение корня $n$ -й степени из комплексного числа

Извлечь корень  $n$ -й степени из комплексного числа  $\alpha$  — значит найти такое комплексное число  $\beta$ , что  $\beta^n = \alpha$ .

**Теорема.** Корень  $n$ -й степени из любого комплексного числа существует и имеет  $n$  значений. Если подкоренное выражение равно нулю, эти значения сливаются в одно.

**Доказательство.** Пусть требуется извлечь корень  $n$ -й степени из

$$\alpha = R(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Предположим, что корень  $n$ -й степени из  $\alpha$  существует и равен

$$\beta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta),$$

тогда, по определению,

$$\rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = R(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Если комплексные числа равны, то модули их равны, аргументы или равны или отличаются на целое кратное  $2\pi$ . Поэтому

$$\rho^n = R; \quad n\theta = \varphi + 2k\pi,$$

где  $k$  — некоторое целое число. Отсюда имеем

$$\rho = \sqrt[n]{R}; \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Из сказанного вытекает, что если корень  $n$ -й степени из  $\alpha$  существует, то он может быть вычислен по формуле

$$\beta_k = \sqrt[n]{R} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad (1)$$

где  $k$  — некоторое целое число.

Для доказательства того, что корень  $n$ -й степени из  $\alpha$  существует, возьдем  $\beta_k$  в степень  $n$ . Имеем

$$\beta_k^n = R [\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)] = \alpha$$

при любом целом  $k$ . Теперь мы можем сделать следующий вывод.

Корень  $n$ -й степени из  $\alpha$  существует, может быть вычислен по формуле (1), в которой букве  $k$  может быть придано любое целое значение.

Если  $R$  равно нулю (т. е.  $\alpha$  равно нулю), то все значения  $\beta_k$  совпадают и равны нулю. Если же  $R \neq 0$ , то, в силу периодичности тригонометрических функций, значения корня из  $\alpha$ , вычисленные по формуле (1) при разных значениях  $k$ , будут повторяться.

Для того чтобы доказать, что корень  $n$ -й степени из неравного нулю числа имеет всего  $n$  различных значений, покажем, что

во-первых, при  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  получаются  $n$  различных значений для  $\beta_k$ :

$$\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1},$$

во-вторых, при любом целом  $k$  получается опять какое-нибудь из значений  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ .

1. Предположим, что  $\beta_s = \beta_t$ , где  $0 \leq s < t \leq n-1$ , т. е.

$$\sqrt[n]{R} \left( \cos \frac{\varphi + 2t\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2t\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{R} \left( \cos \frac{\varphi + 2s\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2s\pi}{n} \right).$$

Комплексные числа равны, следовательно, аргументы их или равны или отличаются на целое кратное  $2\pi$ . Поэтому

$$\frac{\varphi + 2t\pi}{n} = \frac{\varphi + 2s\pi}{n} + 2q\pi,$$

где  $q$  — некоторое целое число, отсюда имеем

$$\frac{t-s}{n} = q.$$

Это равенство невозможно, так как  $t-s$  положительно и меньше чем  $n$ .

2. Пусть теперь  $k$  — любое целое число. Разделим  $k$  на  $n$  с остатком \*). Частное обозначим через  $q$ , а остаток через  $r$ . Имеем

$$k = nq + r; \quad 0 \leq r < n.$$

---

\*) Разделить  $k$  на целое положительное  $n$  с остатком — это значит найти такие целые числа  $q$  и  $r$ , чтобы  $k = nq + r$  и  $0 \leq r < n$ . В курсах арифметики доказывается, что любое целое число  $k$  можно разделить с остатком и притом единственным способом на целое положительное  $n$ . Например, пусть надо разделить 31 на 7 с остатком. Частное будет равно 4, а остаток равен 3:

$$31 = 7 \cdot 4 + 3.$$

Пусть надо разделить — 31 на 7 с остатком. Частное будет равно — 5, а остаток равен 4:

$$-31 = 7 \cdot (-5) + 4.$$

Теперь покажем, что  $\beta_k = \beta_r$ :

$$\begin{aligned}\beta_k &= \sqrt[n]{R} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) = \\ &= \sqrt[n]{R} \left[ \cos \frac{\varphi + 2(nq + r)\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2(nq + r)\pi}{n} \right] = \\ &= \sqrt[n]{R} \left[ \cos \left( \frac{\varphi + 2r\pi}{n} + 2q\pi \right) + i \sin \left( \frac{\varphi + 2r\pi}{n} + 2q\pi \right) \right] = \\ &= \sqrt[n]{R} \left( \cos \frac{\varphi + 2r\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2r\pi}{n} \right) = \beta_r.\end{aligned}$$

Таким образом, значение  $\beta_k$  совпадает со значением  $\beta_r$ , где

$$0 \leq r \leq n-1,$$

т. е. с одним из значений  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ .

**Пример.** Извлечь корень третьей степени из числа  $-i$ .

**Решение.** Запишем  $-i$  в тригонометрической форме

$$-i = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}.$$

Предположим, что корень третьей степени из  $-i$  существует и равен  $\rho (\cos \theta + i \sin \theta)$ . Тогда

$$\rho^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2},$$

откуда

$$\rho^3 = 1; \quad 3\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,$$

т. е.

$$\rho = 1; \quad \theta = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3}.$$

Теперь имеем

$$\sqrt[3]{-i} = \cos \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3},$$

где  $k$  достаточно положить равным 0, 1, 2.

Придавая числу  $k$  указанные значения, получим, что корень третьей степени из числа  $-i$  имеет следующие значения:

$$i; \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}.$$

## § 10. Некоторые приложения комплексных чисел

Как сказано выше, комплексные числа широко применяются к решению разных задач естествознания и техники. Здесь не представляется возможным показать эти важные приложения комплексных чисел. Ограничимся решением одной задачи тригонометрии и одной задачи арифметики. Эти задачи покажут, что при помощи комплексных чисел можно довольно просто получить результаты, которые без их помощи получаются значительно более сложным путем.

1. Вывод формул для  $\cos n\varphi$  и  $\sin n\varphi$ . Разложим выражение  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$  по формуле Ньютона

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos^n \varphi + i C_n^1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi - \\ - i C_n^3 \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + C_n^4 \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi + \dots$$

или

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (\cos^n \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + C_n^4 \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi - \dots) + \\ + i (C_n^1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - C_n^3 \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \dots).$$

По формуле Муавра

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Два комплексных числа равны, значит, равны их действительные и мнимые части, т. е.

$$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + C_n^4 \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi + \\ + C_n^6 \cos^{n-6} \varphi \sin^6 \varphi + \dots, \\ \sin n\varphi = C_n^1 \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - C_n^3 \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + C_n^5 \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi - \dots$$

$\cos n\varphi$  и  $\sin n\varphi$  представлены в виде многочленов  $n$ -й степени от  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$ .

При  $n=2$  имеем

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi; \quad \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

При  $n=3$  имеем

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi; \quad \sin 3\varphi = 3 \cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi.$$

2. Теорема. Произведение двух чисел, каждое из которых есть сумма квадратов двух целых чисел, есть опять сумма квадратов двух целых чисел.

Это — теорема арифметики.

Доказательство. Пусть  $m = a^2 + b^2$ ;  $n = c^2 + d^2$ , где  $a, b, c, d$  — целые числа. Тогда

$$m = (a + bi)(a - bi),$$

$$n = (c + di)(c - di),$$

отсюда

$$mn = (a + bi)(a - bi)(c + di)(c - di).$$

Перегруппируем сомножители

$$mn = [(a + bi)(c + di)][(a - bi)(c - di)] = \\ = [(ac - bd) + (ad + bc)i][ac - bd - (ad + bc)i] = \\ = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Теорема доказана.

Можно перегруппировать сомножители и так:

$$\begin{aligned} mn &= [(a + bi)(c - di)][(a - bi)(c + di)] = \\ &= [(ac + bd) + (bc - ad)i][(ac + bd) - (bc - ad)i] = \\ &= (ac + bd)^2 + (bc - ad)^2. \end{aligned}$$

Мы получили второе представление произведения  $mn$  в виде суммы квадратов двух целых чисел.

Пример.  $10 = 1^2 + 3^2$ ;  $29 = 2^2 + 5^2$ . Здесь  $m = 10$ ;  $n = 29$ ;  
 $a = 1$ ;  $b = 3$ ;  $c = 2$ ;  $d = 5$ ;  $ac - bd = -13$ ;  $ad + bc = 11$ ;  
 $ac + bd = 17$ ;  $bc - ad = 1$ .

Значит,

$$290 = 13^2 + 11^2; \quad 290 = 17^2 + 1^2.$$

### Упражнения

Доказать, что

1.  $i^n = 1$ , если  $n$  делится на 4.
2.  $i^n = i$ , если  $n$  при делении на 4 дает в остатке 1.
3.  $i^n = -1$ , если  $n$  при делении на 4 дает в остатке 2.
4.  $i^n = -i$ , если  $n$  при делении на 4 дает в остатке 3.
5. Показать, что определение абсолютной величины комплексного числа в применении к вещественным числам совпадает с определением абсолютной величины вещественного числа.
6. Доказать, что комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда модуль его равен нулю.
7. Доказать, что квадратный корень из любого комплексного числа существует и имеет два значения.
8. Доказать, что квадратное уравнение с вещественными коэффициентами и отрицательным дискриминантом имеет комплексные сопряженные корни.
9. Доказать, что теорема Виета справедлива и для случая, когда корни квадратного уравнения мнимы.

## ГЛАВА X

### НЕРАВЕНСТВА

#### § 1. Основные свойства неравенств

Пусть  $a$  и  $b$  — какие-нибудь вещественные числа. Если разность  $a - b$  положительна, то говорят, что  $a$  больше  $b$ :

$$a > b.$$

Если разность  $a - b$  отрицательна, то говорят, что  $a$  меньше  $b$ :

$$a < b.$$

Точно так же, если  $a > b$ , то разность  $a - b$  положительна, если же  $a < b$ , то разность  $a - b$  отрицательна.

Для того чтобы высказать утверждение, что численное значение какого-нибудь алгебраического выражения больше или меньше численного значения другого алгебраического выражения, их соединяют знаком  $>$  или  $<$  и, таким образом, составляют неравенство.

Из определения вытекает, что неравенство  $a > 0$  означает, что  $a$  положительно, и неравенство  $a < 0$  означает, что  $a$  отрицательно.

Если в каждом из двух или нескольких неравенств левая часть больше правой или в каждом из неравенств левая часть меньше правой, то такие неравенства называются неравенствами одинакового смысла. Например, неравенства  $a > b$  и  $c > d$  имеют одинаковый смысл.

Если же в одном неравенстве левая часть больше правой, а в другом левая часть меньше правой, то такие неравенства называются неравенствами противоположного смысла.

**Теорема 1.** Если  $a > b$ , то  $b < a$ , и, наоборот, если  $b < a$ , то  $a > b$ .

**Доказательство.** По условию разность  $a - b$  положительна. А тогда разность  $b - a$  отрицательна. Следовательно,

$$b < a.$$

Обратное утверждение доказывается точно так же.

**Теорема 2.** Если  $a > b$ ,  $b > c$ , то  $a > c$ .

**Доказательство.** Пусть

$$a - b = x, \tag{1}$$

$$b - c = y. \tag{2}$$



Сложив равенства (1) и (2) почленно, получим

$$a - c = x + y.$$

Так как  $x$  и  $y$  положительны, то  $x + y > 0$  и потому  $a > c$ .

Другое доказательство. Рассмотрим разность

$$a - c = (a - b) + (b - c).$$

По условию каждая из разностей  $a - b$  и  $b - c$  положительна, значит,  $a - c > 0$ , т. е.  $a > c$ .

**Теорема 3.** Если  $a > b$ , то при любом  $c$

$$a + c > b + c,$$

т. е. неравенство не нарушается\*), если к каждой части его прибавить одно и то же число.

Доказательство. Пусть  $a - b = x$ , тогда

$$(a + c) - (b + c) = x.$$

Так как, по условию,  $x > 0$ , то  $a + c > b + c$ .

~~Другое доказательство.~~ Рассмотрим равенство

$$(a + c) - (b + c) = a - b.$$

По условию  $a - b > 0$ , значит,  $a + c > b + c$ .

**Следствие.** Любое слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив при этом знак его на противоположный.

Доказательство. Пусть

$$a + b > c.$$

Прибавим к каждой части неравенства  $-b$ , получим

$$a > c - b.$$

Слагаемое  $b$  перенесено из левой части в правую с противоположным знаком.

**Теорема 4.** Если  $a > b$  и  $c > 0$ , то  $ac > bc$ , если  $a > b$  и  $c < 0$ , то  $ac < bc$ , если  $a > b$  и  $c = 0$ , то  $ac = bc$ , т. е. неравенство не нарушается, если обе части его умножить на одно и то же положительное число;

неравенство превращается в неравенство противоположного смысла, если обе части его умножить на одно и то же отрицательное число;

неравенство превращается в равенство, если обе части его умножить на нуль.

---

\*) Выражение «неравенство не нарушается» означает, что неравенство преобразуется в другое неравенство одинакового с ним смысла.

Доказательство. Пусть

$$a - b = x.$$

Тогда  $ac - bc = xc$ . По условию,  $x > 0$ .

Если  $c > 0$ , то произведение  $xc$  положительно и  $ac > bc$ .

Если  $c < 0$ , то произведение  $xc$  отрицательно и  $ac < bc$ .

Если  $c = 0$ , то произведение  $xc$  равно нулю и  $ac = bc$ .

**Теорема 5.** Если  $a > b$  и  $c > d$ , то  $a + c > b + d$ , т. е. при почленном сложении двух неравенств одного и того же смысла получается неравенство того же смысла.

Доказательство. Пусть

$$a - b = x, \tag{3}$$

$$c - d = y. \tag{4}$$

Сложив равенства (3) и (4) почленно, получим

$$(a + c) - (b + d) = x + y.$$

Так как  $x$  и  $y$  положительны, то  $x + y > 0$  и  $a + c > b + d$ .

**Теорема 6.** Если  $a, b, c, d$  положительны и  $a > b, c > d$ , то  $ac > bd$ , т. е. при почленном умножении двух неравенств, имеющих положительные члены и один и тот же смысл, получается неравенство того же смысла.

Доказательство. Пусть

$$a - b = x; \quad c - d = y.$$

Тогда

$$a = b + x; \quad c = d + y; \quad ac - bd = by + dx + xy.$$

Так как  $x > 0; y > 0; b > 0$  и  $d > 0$ , то правая часть последнего равенства положительна и  $ac > bd$ .

**Теорема 7.** Если  $a > b > 0$ , то при любом натуральном  $n$   $a^n > b^n$ , т. е. неравенство, имеющее положительные члены, не нарушается, если каждую часть его возвести в степень с одним и тем же натуральным показателем.

Доказательство. При  $n = 1$  утверждение справедливо по условию. Допустим, что утверждение справедливо при  $n = k$ , где  $k$  — какое-нибудь натуральное число, т. е.  $a^k > b^k$ . Умножим предыдущее неравенство почленно на неравенство  $a > b$ , получим

$$a^{k+1} > b^{k+1},$$

т. е. утверждение справедливо и при  $n = k + 1$ .

**Замечание.** Если  $a$  и  $b$  отрицательны или имеют разные знаки, или одно из них равно нулю, то из  $a > b$  может не следовать  $a^n > b^n$ . Например,  $-3 < -2$ , однако  $(-3)^2 > (-2)^2$ ;  $-3 < 2$ , однако  $(-3)^2 > 2^2$ ;  $-3 < 0$ , однако  $(-3)^2 > 0$ .

**Теорема 8.** Если  $a > b$ , то при любом  $n$   $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$ .

Доказательство. Допустим, что

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}.$$

Тогда на основании теоремы 7 имеем  $a < b$ , что противоречит условию.

Очевидно, что нельзя предполагать и то, что

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}.$$

Неравенство  $a > b$  называется *строгим* неравенством, неравенство  $a \geq b$  называется *нестрогим* неравенством.

Теоремы 1—8 доказаны для строгих неравенств. Нетрудно показать, что все они справедливы и для нестрогих неравенств. Так, например, теорему 1 можно сформулировать так:

*Если  $a \geq b$ , то  $b \leq a$  и, наоборот, если  $b \leq a$ , то  $a \geq b$ .*

Доказательство. Выше было доказано, что утверждение справедливо для строгих неравенств. С другой стороны, известно, что аналогичное утверждение справедливо и для равенств, т. е. если  $a = b$ , то  $b = a$  и, наоборот, если  $b = a$ , то  $a = b$ . Утверждение для нестрогих неравенств является объединением двух аналогичных утверждений, из которых одно справедливо для строгих неравенств, а другое — для равенств.

## § 2. Доказательство неравенств

При решении различных вопросов возникает потребность в выяснении, которое из двух данных чисел больше другого. Такие задачи называются задачами на *выяснение знака неравенств*. Например, выяснить, какие корни имеет уравнение

$$x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + 0,85\sqrt{3} = 0,$$

вещественные или мнимые? Для решения этого вопроса надо выяснить, что больше

$$(\sqrt{2} + 1)^2 \text{ или } 3,4\sqrt{3}.$$

В некоторых задачах знак неравенства указан в условии задачи, и требуется доказать, что данное неравенство справедливо. Такие задачи называются задачами на *доказательство неравенств*. Например, доказать, что при любых положительных  $a$  и  $b$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Между указанными двумя типами задач нет существенного различия, так как при установлении знака неравенства одновременно доказываемся справедливость некоторого неравенства и наоборот.

Задачи на доказательство неравенств могут быть весьма разнообразны, а потому разнообразны и приемы их решения. Основные приемы доказательства неравенств поясняются следующими примерами.

Пример. Какие корни имеет уравнение

$$x^2 + (\sqrt{2} + 1)x + 0,85\sqrt{3} = 0,$$

действительные или мнимые?

Решение. Для ответа на этот вопрос надо выяснить, что больше:  $(\sqrt{2} + 1)^2$  или  $3,4\sqrt{3}$ ? Допустим, что

$$(\sqrt{2} + 1)^2 > 3,4\sqrt{3},$$

т. е.

$$3 + 2\sqrt{2} > \frac{17}{5}\sqrt{3}. \quad (1)$$

Тогда (теорема 4)

$$15 + 10\sqrt{2} > 17\sqrt{3}, \quad (2)$$

отсюда (теорема 7)

$$225 + 200 + 300\sqrt{2} > 867, \quad (3)$$

отсюда (теорема 3)

$$300\sqrt{2} > 442, \quad (4)$$

отсюда (теорема 4)

$$\sqrt{2} > 1,47. \quad (5)$$

Мы показали, что из неравенства (1) следует неравенство (5). Но неравенство (5) несправедливо. Значит, нельзя предполагать, что неравенство (1) справедливо и таким образом

$$(\sqrt{2} + 1)^2 \leq 3,4\sqrt{3}.$$

Далее,

$$(\sqrt{2} + 1)^2 \neq 3,4\sqrt{3},$$

иначе  $(3,4)^2 \cdot 3 - 2 - 1 = 2\sqrt{2}$ , т. е. рациональное число равно иррациональному. Остается, что

$$(\sqrt{2} + 1)^2 < 3,4\sqrt{3}.$$

Корни квадратного уравнения

$$x^2 + (\sqrt{2} + 1)x + 0,85\sqrt{3} = 0$$

мнимые.

Ответ. Корни мнимые.

Пример. Доказать, что, если  $a > 0$ ,  $b > 0$ , то

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

т. е. что среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше их среднего геометрического.

Решение. Допустим, что утверждение неверно, т. е.

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}.$$

Тогда (теорема 7)

$$\frac{(a+b)^2}{4} < ab,$$

отсюда (теорема 4)

$$(a+b)^2 < 4ab,$$

отсюда (теорема 3)

$$(a-b)^2 < 0.$$

Последнее неравенство несправедливо. Значит, нельзя было предполагать, что утверждение неверно.

Проведенное в последнем примере рассуждение имеет несколько неестественный характер. Применялось доказательство от противного вместо естественного здесь прямого доказательства. Однако при решении задач на доказательство неравенств прямым способом часто допускаются ошибки в изложении, так как здесь легко спутать прямое утверждение с обратным.

Мы изложим два варианта прямого доказательства. Первый из них напоминает обычное рассуждение при решении геометрических задач на построение.

**Анализ.** Допустим, что задача решена и доказано, что

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \quad (6)$$

Тогда

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab, \quad (7)$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab, \quad (8)$$

$$(a-b)^2 \geq 0. \quad (9)$$

Анализ показал, что из неравенства (6) вытекает неравенство (9). Неравенство (9) справедливо, но отсюда еще не следует, что справедливо неравенство (6). Однако если удастся доказать, что из неравенства (9) следует неравенство (6), то задача будет решена. Путь такого доказательства указан анализом.

**Доказательство.** На основании теоремы 3 из неравенства (9) следует неравенство (8). На основании теоремы 4 из неравенства (8) следует неравенство (7). На основании теоремы 8 из неравенства (7) следует неравенство (6). Этим показано, что из неравенства (9) следует неравенство (6).

При желании можно анализ не излагать, а вести прямо доказательство. Очевидно, что

$$(a-b)^2 \geq 0,$$

т. е.

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0.$$

Прибавим к каждой части неравенства  $4ab$ , получим

$$(a + b)^2 \geq 4ab,$$

отсюда на основании теоремы 8

$$a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

на основании теоремы 4

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

Ограничиваться же изложением одного анализа нельзя, так как из того, что некоторое утверждение справедливо, вообще не следует, что справедливо и обратное.

Второй вариант изложения ведется в форме, весьма напоминающей анализ, и является все же строгим.

Требуется доказать, что

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \quad (10)$$

На основании теоремы 8 (но не 7) неравенство (10) вытекает из неравенства

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab. \quad (11)$$

На основании теоремы 4 неравенство (11) вытекает из неравенства

$$(a+b)^2 \geq 4ab. \quad (12)$$

На основании теоремы 3 неравенство (12) вытекает из неравенства

$$(a-b)^2 \geq 0. \quad (13)$$

Неравенство (13) очевидно.

Вычисления здесь приведены в том же порядке, что и при анализе, но всякий раз доказывалось, что доказываемое неравенство (10) вытекает из следующих за ним. При анализе поступают наоборот: из доказываемого неравенства (10) выводят все следующие за ним.

**Замечание.** Рассмотренное неравенство имеет весьма простой геометрический смысл. На прямой  $AB$  отложим последовательно отрезки  $a$  и  $b$ , на их сумме, как на диаметре, опишем окружность. Тогда  $\frac{a+b}{2}$  — радиус этой окружности, а  $\sqrt{ab}$  — половина хорды, перпендикулярной к диаметру в общей точке отрезков  $a$  и  $b$ .

**Пример.** Доказать, что при любом натуральном  $n$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 1,9.$$

**Доказательство.** При  $n=1$  неравенство справедливо, так как

$$1 > 2\sqrt{2} - 1,9.$$

Предположим, что неравенство справедливо при  $n=k$ , где  $k$  — некоторое натуральное число, т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k}} > 2\sqrt{k+1} - 1,9. \quad (14)$$

Докажем, что тогда неравенство справедливо и при  $n=k+1$ , т. е.

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2\sqrt{k+2} - 1,9. \quad (15)$$

Сравнивая неравенства (14) и (15), заключаем, что неравенство (15) будет доказано, если будет установлено, что

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1}. \quad (16)$$

Действительно, сложив почленно неравенства (14) и (16), получим неравенство (15).

Остается доказать неравенство (16). Оно вытекает из неравенства

$$\frac{\sqrt{k+1}}{k+1} + 2\sqrt{k+1} > 2\sqrt{k+2}, \quad (17)$$

или

$$\frac{2k+3}{k+1} \sqrt{k+1} > 2\sqrt{k+2}. \quad (18)$$

Неравенство (18) вытекает из неравенства

$$(2k+3)^2 > 4(k+2)(k+1), \quad (19)$$

или

$$4k^2 + 12k + 9 > 4k^2 + 12k + 8. \quad (20)$$

Неравенство (20) вытекает из очевидного неравенства  $9 > 8$ .

**Пример.** Доказать, что

$$4a^4 - 4a^3 + 5a^2 - 4a + 1 \geq 0.$$

**Доказательство.** Разложим левую часть неравенства на множители. Имеем

$$\begin{aligned} 4a^4 - 4a^3 + 5a^2 - 4a + 1 &= a^2(4a^2 - 4a + 1) + (4a^2 - 4a + 1) = \\ &= (2a - 1)^2(a^2 + 1). \end{aligned}$$

Так как  $(2a - 1)^2 \geq 0$ ,  $a^2 + 1 > 0$ , то

$$(2a - 1)^2(a^2 + 1) \geq 0.$$

Равенство здесь имеет место только тогда, когда  $a = \frac{1}{2}$ .

Пример. Доказать, что при  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$

$$(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc.$$

Доказательство. Допустим, что  $c$  не превосходит  $a$  и  $b$ . Положим  $a = c + x$ ,  $b = c + y$ , где  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ . Тогда неравенство можно переписать так:

$$(2c+x+y)(2c+x)(2c+y) \geq 8c(c+x)(c+y),$$

или

$$\begin{aligned} 8c^3 + 8c^2x + 8c^2y + 2cx^2 + 2cy^2 + 6cxy + x^2y + xy^2 &\geq \\ &\geq 8c^3 + 8c^2x + 8c^2y + 8cxy. \end{aligned}$$

Последнее неравенство вытекает из неравенства

$$2cx^2 + 2cy^2 + x^2y + xy^2 \geq 2cxy,$$

которое в свою очередь вытекает из очевидного неравенства

$$c(x-y)^2 + cx^2 + cy^2 + x^2y + xy^2 \geq 0.$$

Точно так же можно доказать, что неравенство справедливо и тогда, когда  $b$  не превосходит  $c$  и  $a$  или  $a$  не превосходит  $b$  и  $c$ , так как буквы  $a$ ,  $b$ ,  $c$  входят в условие задачи симметрично.

Пример. Доказать, что при  $n > 1$

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}.$$

Доказательство. Обозначим левую часть неравенства  $S_n$ . Имеем

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n},$$

$$S_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} + \dots + \frac{1}{n+1}.$$

Второй раз слагаемые  $S$  расположены в порядке возрастания. Складывая почленно, имеем:

$$2S_n = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2n}\right) + \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2n-1}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{n+1}\right).$$

Если доказать, что при любом натуральном  $k$ , не превосходящем  $n$ ,

$$\frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n-k+1} < \frac{3}{2n}, \quad (21)$$

тогда получим, что

$$2S_n < \frac{3n}{2n}, \quad S_n < \frac{3}{4}.$$

Остается доказать неравенство (21). Оно следует из неравенства

$$2n(2n-k+1) + 2n(n+k) < 3(n+k)(2n-k+1),$$



или, что все равно, из неравенства

$$6n^2 + 2n < 6n^2 + 3nk + 3n - 3k^2 + 3k. \quad (22)$$

Неравенство (22) следует из неравенства

$$3k^2 < 3nk + 3k + n.$$

Последнее неравенство очевидно, так как

$$3k^2 \leq 3nk.$$

Пример. Доказать, что если

$$a_1 a_2 \dots a_n = 1 \text{ и } a_1 > 0; a_2 > 0; \dots; a_n > 0,$$

то

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n. \quad (23)$$

Доказательство. По доказанному на стр. 445

$$1 + a_1 \geq 2\sqrt{a_1},$$

$$1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_2},$$

$$\dots$$

$$\dots$$

$$1 + a_n \geq 2\sqrt{a_n}.$$

Перемножив неравенства почленно, имеем:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Учитывая, что  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ , получим неравенство (23).

### § 3. Равносильные неравенства

*Неравенством с одним неизвестным* называется неравенство вида

$$f_1(x) < f_2(x) \text{ или } f_1(x) > f_2(x),$$

где  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  обозначают алгебраические выражения, содержащие неизвестное  $x$ . В частном случае одно из этих выражений может не содержать  $x$ . Например,

$$2x + 3 > x + 1 \quad (1)$$

есть неравенство с одним неизвестным. Неравенство

$$\frac{2x-1}{3x-2} > 0 \quad (2)$$

также есть неравенство с одним неизвестным.

**Определение.** Решить неравенство с одним неизвестным — это значит найти все значения неизвестного, при которых неравенство справедливо. Значения неизвестного, при которых неравенство справедливо, называются *решениями неравенства*.

Например,  $x=1$  есть решение неравенства (1), так как при  $x=1$  это неравенство превращается в справедливое неравенство  $5 > 2$ ;  $x=\frac{7}{12}$  не является решением неравенства (2), так как при  $x=\frac{7}{12}$  левая часть неравенства (2) принимает отрицательное значение  $-\frac{2}{3}$ .

**Определение.** Два неравенства называются *равносильными*, если каждое решение первого из них является решением второго, а каждое решение второго является решением первого.

**Теорема 1.** Если к каждой части неравенства прибавить одно и то же число или один и тот же многочлен относительно неизвестного, то полученное в результате этого неравенство равносильно данному.

**Доказательство.** Для упрощения изложения доказательство проведем применительно к неравенству

$$ax + b > cx + d. \quad (3)$$

Все сказанное по поводу этого неравенства может быть повторено и по поводу любого другого неравенства.

Прибавим к каждой части неравенства какой-нибудь многочлен относительно неизвестного, например  $mx^2 + nx + p$ , получим неравенство

$$(ax + b) + (mx^2 + nx + p) > (cx + d) + (mx^2 + nx + p). \quad (4)$$

Требуется доказать, что неравенства (3) и (4) равносильны. Пусть  $x=x_0$  есть решение неравенства (3), т. е.

$$ax_0 + b > cx_0 + d \quad (5)$$

— справедливое неравенство. К каждой части неравенства (5) прибавим число  $mx_0^2 + nx_0 + p$ , получим (теорема 3 § 1) справедливое неравенство

$$(ax_0 + b) + (mx_0^2 + nx_0 + p) > (cx_0 + d) + (mx_0^2 + nx_0 + p). \quad (6)$$

Неравенство (6) означает, что  $x=x_0$  есть решение неравенства (4).

Итак, каждое решение неравенства (3) является решением неравенства (4).

Пусть теперь  $x=x_0$  есть решение неравенства (4), тогда справедливо неравенство (6). На основании теоремы 3 § 1 справедливо и неравенство (5). Неравенство (5) означает, что  $x=x_0$  есть решение неравенства (3).

Итак, каждое решение неравенства (4) является решением неравенства (3).

При доказательстве теоремы мы не пользовались никакими особенностями многочлена  $mx^2 + nx + p$ . Существенно было только то, что при любом значении  $x$  многочлен этот имеет определенное числовое значение. Поэтому доказательство остается в силе и тогда, когда к каждой части неравенства (3) прибавляется какой-нибудь

другой многочлен относительно  $x$ . В частности, доказательство остается в силе, когда к каждой части неравенства (3) прибавляется какое-нибудь число (многочлен нулевой степени относительно  $x$ ).

**Замечание.** Если бы к каждой части неравенства прибавили не многочлен относительно  $x$ , а какое-нибудь выражение, содержащее неизвестное в знаменателе, полученное в результате этого неравенство могло бы оказаться и равносильным данному. Например, неравенство  $2x - 1 > 0$  имеет решение  $x = 3$ . Неравенство

$$2x - 1 + \frac{1}{x-3} > \frac{1}{x-3}$$

при  $x = 3$  не имеет смысла.

**Следствие.** Любое слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив при этом знак его на противоположный.

Доказательство опять проведем применительно к неравенству

$$ax + b > cx + d.$$

Предположим, что желательно слагаемое  $cx$  перенести из правой части неравенства в левую. Прибавим к каждой части неравенства по  $-cx$ , получим равносильное неравенство

$$ax + b - cx > d.$$

Слагаемое  $cx$  с противоположным знаком перенесено из правой части неравенства в левую.

**Теорема 2.** Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то полученное в результате этого неравенство равносильно данному.

Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число и при этом переменить знак неравенства на знак противоположного смысла, то полученное в результате этого неравенство равносильно данному.

**Доказательство.** Доказательство и здесь проведем применительно к неравенству (3)

$$ax + b > cx + d.$$

Умножим обе части этого неравенства на положительное число  $m$ , получим

$$m(ax + b) > m(cx + d). \quad (7)$$

Пусть  $x = x_0$  — решение неравенства (3), т. е.

$$ax_0 + b > cx_0 + d \quad (8)$$

— справедливое неравенство. Тогда на основании теоремы 4 § 1 справедливо и неравенство

$$m(ax_0 + b) > m(cx_0 + d). \quad (9)$$

Неравенство (9) означает, что  $x = x_0$  есть решение неравенства (7).

Итак, каждое решение неравенства (3) является решением неравенства (7).

Пусть теперь  $x = x_0$  есть решение неравенства (7), тогда справедливо неравенство (9). На основании теоремы 4 § 1 справедливо и неравенство (8), и это означает, что  $x = x_0$  есть решение неравенства (3).

Итак, каждое решение неравенства (7) является решением неравенства (3).

Первая часть теоремы доказана. Точно так же доказывается и вторая часть теоремы относительно умножения обеих частей неравенства на одно и то же отрицательное число.

**Замечание.** При умножении обеих частей неравенства на буквенное выражение надо иметь в виду, что при разных значениях входящих в него букв это выражение может быть и положительным, и отрицательным, и равным нулю.

#### § 4. Решение неравенств и систем неравенств первой степени с одним неизвестным

**Определение.** *Неравенством первой степени с одним неизвестным* называется такое неравенство, которое после раскрытия скобок, приведения подобных членов и перенесения всех членов в левую часть принимает вид  $ax + b > 0$  или  $ax + b < 0$ .

Умножением обеих частей неравенства  $ax + b < 0$  на  $-1$  его можно привести к равносильному неравенству вида

$$ax + b > 0.$$

Поэтому достаточно изучить только неравенство  $ax + b > 0$ .

**Теорема.** Если  $a \neq 0$ , то неравенство

$$ax + b > 0 \tag{1}$$

имеет бесконечное множество решений, именно, ему удовлетворяют все числа, большие  $-\frac{b}{a}$ , когда  $a > 0$ , и меньшие  $-\frac{b}{a}$ , когда  $a < 0$ .

Если  $a = 0$ , неравенство (1) не имеет решений, когда  $b \leq 0$ , и имеет бесконечное множество решений, когда  $b > 0$ . В последнем случае ему удовлетворяет любое число.

**Доказательство.** Неравенство (1) равносильно неравенству

$$ax > -b. \tag{2}$$

Пусть  $a > 0$ , тогда неравенство (2) равносильно неравенству

$$x > -\frac{b}{a}. \tag{3}$$

Последнее неравенство — простейшее, ему удовлетворяют все числа, которые больше чем  $-\frac{b}{a}$ , и только эти числа.

Пусть  $a < 0$ , тогда неравенство (2) равносильно неравенству

$$x < -\frac{b}{a}. \quad (4)$$

Неравенство (4) — простейшее, ему удовлетворяют все числа, которые меньше чем  $-\frac{b}{a}$ , и только эти числа.

Пусть  $a = 0$ . Неравенство (1) принимает вид  $0x + b > 0$ . Это неравенство не имеет решений, когда  $b \leq 0$ , и имеет бесконечное множество решений, когда  $b > 0$ . В этом случае неравенству удовлетворяет любое значение  $x$ .

Пример. Решить неравенство  $2x - 3 > x - 1$ .

Решение. Переносим неизвестные в левую часть, а известные в правую, имеем  $x > 2$ .

Полученному неравенству удовлетворяют все числа, большие 2, и только эти числа. Решения неравенства изображаются точками, лежащими правее точки 2 (рис. 98).

Ответ.  $x > 2$ .



Рис. 98.

Пример. Решить неравенство  $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x-1}{2} > 5$ .

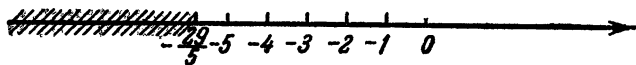


Рис. 99.

Решение. Умножим обе части неравенства на 6, получим

$$4x - 2 - 9x + 3 > 30,$$

отсюда

$$-5x > 29.$$

Разделим обе части неравенства на  $-5$  (умножим на  $-\frac{1}{5}$ ):

$$x < -\frac{29}{5}.$$

Решения неравенства (рис. 99) изображаются точками числовой ося, лежащими левее точки  $-\frac{29}{5}$ .

Ответ.  $x < -\frac{29}{5}$ .

К неравенствам первой степени иногда сводятся неравенства, содержащие неизвестное в знаменателе.

Пример. Решить неравенство

$$\frac{2x-1}{x-1} > 2. \quad (5)$$

Решение. Для освобождения неравенства от дробей обе части его надо умножить на  $x-1$ . Очевидно,  $x-1 \neq 0$ , так как иначе неравенство (5) не имеет смысла. Так как  $x-1$  может быть и положительным и отрицательным, приходится рассмотреть два случая.

Случай 1. Пусть  $x-1 > 0$ , т. е.  $x > 1$ . Тогда

$$2x-1 > 2x-2 \quad \text{или} \quad 1 < 2.$$

Этому неравенству удовлетворяет любое значение  $x$ . Таким образом, неравенству (5) удовлетворяет любое значение  $x > 1$ .

Случай 2. Пусть  $x < 1$ , тогда

$$2x-1 < 2x-2 \quad \text{или} \quad 1 > 2.$$

Это неравенство решений не имеет.

Ответ.  $x > 1$ .

При решении неравенств с буквенными коэффициентами необходимо учитывать знак коэффициента при неизвестном.

Пример. Решить неравенство

$$mx-2 > x-3m.$$

Решение. Перенесем неизвестные в левую часть, а известные в правую, получим

$$(m-1)x > 2-3m.$$

Так как  $m-1$  может быть и положительным числом, и нулем, и отрицательным числом, приходится рассмотреть три случая.

Случай 1.  $m > 1$ . Тогда

$$x > \frac{2-3m}{m-1}.$$

Случай 2.  $m = 1$ . Неравенство принимает вид

$$0x > -1.$$

Это неравенство справедливо при любом  $x$ .

Случай 3.  $m < 1$ . Тогда

$$x < \frac{2-3m}{m-1}.$$

Ответ. Если  $m > 1$ , то  $x > \frac{2-3m}{m-1}$ ; если  $m = 1$ , то неравенство справедливо при любом значении  $x$ ; если  $m < 1$ , то  $x < \frac{2-3m}{m-1}$ .

Определение. Два или несколько неравенств с одним неизвестным образуют систему неравенств, если неизвестное в них обозначает одну и ту же величину. Решить систему неравенств с

одним неизвестным — это значит найти все значения неизвестного, при которых все неравенства системы справедливы.

Пример. При каком значении  $x$  дробь

$$\frac{2x-3}{3x-5} \quad (6)$$

положительна?

Решение. Чтобы дробь была положительна, необходимо и достаточно, чтобы числитель и знаменатель были одного знака. Поэтому задача сводится к решению двух систем неравенств

$$\left. \begin{aligned} 2x-3 &> 0, \\ 3x-5 &> 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

и

$$\left. \begin{aligned} 2x-3 &< 0, \\ 3x-5 &< 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Первое неравенство системы (7) требует, чтобы  $x > \frac{3}{2}$ , второе — чтобы  $x > \frac{5}{3}$ . Так как  $\frac{5}{3} > \frac{3}{2}$ , системе (7) удовлетворяют все значения  $x > \frac{5}{3}$  и только эти значения.

Первое неравенство системы (8) требует, чтобы  $x < \frac{3}{2}$ , второе — чтобы  $x < \frac{5}{3}$ . При  $x < \frac{3}{2}$  и только при этих значениях  $x$  удовлетворяются оба неравенства системы (8).

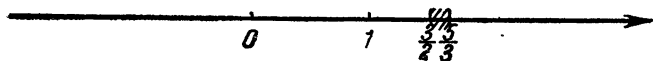


Рис. 100.

Таким образом, дробь (6) положительна при  $x > \frac{5}{3}$  и при  $x < \frac{3}{2}$ . Геометрически это означает, что дробь (6) положительна в любой точке числовой оси, кроме точек, лежащих внутри и на концах отрезка  $(\frac{3}{2}, \frac{5}{3})$  (рис. 100).

Пример. Решить систему неравенств

$$\left. \begin{aligned} 2x-1 &> x-2, \\ 3x-1 &< 2x-3. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Решение. Первое неравенство требует, чтобы  $x > -1$ . Второе неравенство требует, чтобы  $x < -2$ . Система (9) решений не имеет, так как нет такого числа, которое было бы больше  $-1$  и меньше  $-2$ .

## § 5. Цель исследования уравнений

Решение задач при помощи уравнений приводит иногда к результату, который показывает, что данная задача не имеет решений. Часто такой вывод делается потому, что уравнение, составленное по условию задачи, не имеет решений. Иногда же оказывается, что уравнение имеет решения, но решения эти не удовлетворяют условию задачи.

Если в условии задачи некоторые из данных величин обозначены буквами, т. е. ищется решение задачи в общем виде, уравнение, составленное по условию задачи, имеет буквенные коэффициенты. Такое уравнение при одних частных значениях букв имеет решение, при других значениях букв оно решений не имеет. При одних значениях букв решения удовлетворяют условию задачи и дают ответы на вопрос задачи, при других значениях букв решения условию задачи не удовлетворяют.

В силу этого при решении задач с буквенными данными требуется провести исследование задачи, т. е. выяснить:

1) при каких значениях букв уравнение или система уравнений имеет решения, и если имеет, то сколько;

2) при каких значениях букв решения уравнения или системы уравнений удовлетворяют условию задачи и при каких значениях букв решения условию задачи не удовлетворяют.

Ответ на первый из поставленных вопросов требует умения исследовать уравнение или систему уравнений с буквенными коэффициентами, независимо от того, что представляют собой величины, обозначенные буквами.

Ответ на второй вопрос требует умения отобрать из всех решений те, которые удовлетворяют условию задачи.

## § 6. Исследование уравнения первой степени с одним неизвестным

Уравнение первой степени с одним неизвестным может быть преобразовано к виду

$$ax = b.$$

*Теорема. Если коэффициент при неизвестном в уравнении первой степени с одним неизвестным отличен от нуля, уравнение имеет решение и притом единственное.*

*Если коэффициент при неизвестном в уравнении первой степени с одним неизвестным равен нулю, уравнение не имеет решений, когда свободный член отличен от нуля, и имеет бесконечное множество решений, когда свободный член равен нулю. В последнем случае уравнению удовлетворяет любое число.*



**Доказательство.** Если  $a \neq 0$ , уравнение  $ax = b$  равносильно уравнению  $x = \frac{b}{a}$ . Это уравнение простейшее, ему удовлетворяет число  $\frac{b}{a}$  и только это число.

Если  $a = 0$ , уравнение  $ax = b$  принимает вид  $0x = b$ . Это уравнение не имеет решений, когда  $b$  отлично от нуля, так как произведение нуля и любого числа равно нулю. Если же  $b = 0$ , это уравнение принимает вид  $0x = 0$ . Такому уравнению удовлетворяет любое значение  $x$ .

**Задача.** Два фонтана наполняют бассейн: первый, действуя один, может наполнить бассейн в  $a$  часов; второй, будучи открыт один, наполнит бассейн в  $b$  часов. Кран, находящийся в дне бассейна, может опорожнить бассейн в  $c$  часов. Во сколько часов бассейн, вначале пустой, будет наполнен, если оба фонтана и кран будут открыты одновременно?

**Решение.** Пусть бассейн наполняется в  $x$  часов. Первый фонтан, наполняя весь бассейн в  $a$  часов, в один час наполняет  $\frac{1}{a}$  часть бассейна, а в  $x$  часов —  $\frac{x}{a}$  частей его. Второй фонтан за  $x$  часов наполняет  $\frac{x}{b}$  частей бассейна. Кран за  $x$  часов выпустит воду в объеме  $\frac{x}{c}$  частей бассейна. Так как разность между приходом и расходом воды за  $x$  часов равна емкости бассейна, имеем уравнение

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - \frac{x}{c} = 1,$$

откуда

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)x = 1.$$

Если  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \neq 0$ , уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}} = \frac{abc}{bc + ca - ab}.$$

Если  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$ , уравнение решений не имеет.

По смыслу задачи,  $x$  должно быть положительным числом, и потому задача имеет решение только тогда, когда

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} > 0.$$

Нетрудно видеть, что неравенство  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < 0$  означает, что количество воды, доставляемое в 1 час двумя фонтанами, меньше количества воды, которую способен выпустить кран в течение часа.

Равенство  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$  означает, что количество воды, доставляемой двумя фонтанами в 1 час, равно количеству воды, выпускаемой краном за то же время.

Ясно поэтому, что в случаях, когда  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} \leq 0$ , задача не имеет решения.

Ответ. В  $\frac{abc}{bc + ca - ab}$  часов; задача имеет решение только тогда, когда  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} > 0$ .

## § 7. Исследование системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

Основные определения.

1. Два или несколько уравнений образуют *систему уравнений*, если одноименные неизвестные в них обозначают одну и ту же величину.

2. *Системой двух уравнений первой степени с двумя неизвестными* называется система, которая после раскрытия скобок, перенесения членов, содержащих неизвестные, в левую часть, а известных членов в правую часть и приведения подобных членов принимает вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = m_1, \\ a_2x + b_2y = m_2, \end{cases} \quad (1)$$

где  $a_1, a_2, b_1, b_2, m_1, m_2$  — известные числа.

3. *Решить систему* (1) — это значит найти такие значения для  $x$  и  $y$ , которые, будучи поставлены в систему вместо неизвестных, превращают каждое уравнение системы в тождество.

4. *Решением системы уравнений с двумя неизвестными* называется пара таких чисел, которые, будучи подставлены в систему вместо неизвестных, превращают каждое уравнение системы в тождество.

5. *Исследовать систему* (1) — это значит по коэффициентам ее определить, имеет ли система решения, и если имеет, то сколько.

6. Система (1) называется *приведенной*, если оба коэффициента при одном неизвестном в ней равны 1. Например, системы

$$\begin{cases} x + 3y = 5, \\ x - 2y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y = 1, \\ 5x + y = 6 \end{cases}$$

— приведенные. Система

$$\begin{cases} x + 3y = 5, \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

не является приведенной.

**Теорема 1.** Если оба коэффициента при каком-нибудь неизвестном в системе (1) отличны от нуля, то систему эту можно привести, т. е. построить равносильную ей приведенную систему.

**Доказательство.** Пусть  $a_1 \neq 0$  и  $a_2 \neq 0$ .

Разделим обе части первого уравнения на  $a_1$ , обе части второго уравнения на  $a_2$ . Получим приведенную систему, равносильную данной. (При делении обеих частей уравнения на одно и то же число ни одно решение не теряется и ни одно решение не приобретается.)

Точно так же доказывается теорема, если  $b_1 \neq 0$  и  $b_2 \neq 0$ .

**Теорема 2 (основная теорема).** Если в приведенной системе левые части различны, система имеет решение и притом единственное.

**Доказательство.** Дана приведенная система

$$\left. \begin{aligned} x + p_1 y &= q_1, \\ x + p_2 y &= q_2, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

причем  $p_1 \neq p_2$ .

Предположим, что система (2) имеет решение, т. е. предположим, что существуют такие два числа  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , что имеют место тождества

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} + p_1 \bar{y} &= q_1, \\ \bar{x} + p_2 \bar{y} &= q_2. \end{aligned} \right\}$$

Умножим первое тождество на  $p_2$ , второе на  $-p_1$  и сложим их почленно. Получим

$$(p_2 - p_1) \bar{x} = q_1 p_2 - q_2 p_1.$$

Отсюда

$$\bar{x} = \frac{q_1 p_2 - q_2 p_1}{p_2 - p_1} \quad (p_2 - p_1 \neq 0!). \quad (3)$$

Из второго тождества вычтем первое, получим

$$\bar{y} (p_2 - p_1) = q_2 - q_1.$$

Отсюда

$$\bar{y} = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1}. \quad (4)$$

Какой вывод мы можем сделать?

**Вывод.** Если система (2) имеет решение, то решение это определяется по формулам (3) и (4), а потому единственно.

Действительно, допустим, что система (2) имеет другое решение  $\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}$ . Тогда имеют место тождества

$$\left. \begin{aligned} \bar{\bar{x}} + p_1 \bar{\bar{y}} &= q_1, \\ \bar{\bar{x}} + p_2 \bar{\bar{y}} &= q_2. \end{aligned} \right\}$$

Рассуждая так же, как и выше, получим

$$\bar{\bar{x}} = \frac{q_1 p_2 - q_2 p_1}{p_2 - p_1}; \quad \bar{\bar{y}} = \frac{q_2 - q_1}{p_2 - p_1},$$

т. е.  $\bar{\bar{x}} = \bar{x}$ ;  $\bar{\bar{y}} = \bar{y}$ .

Докажем, что  $x$  и  $y$ , определяемые формулами (3) и (4), удовлетворяют системе (2). Для этого достаточно в систему (2) подставить вместо  $x$  и  $y$  их значения по формулам (3) и (4) и убедиться, что каждое уравнение системы превращается в тождество.

**Теорема 3.** *Если в приведенной системе левые части одинаковы, а правые различны, система решений не имеет.*

**Доказательство.** Имеем систему

$$\left. \begin{aligned} x + py &= q_1, \\ x + py &= q_2, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

причем  $q_1 \neq q_2$ . Система (5) не может иметь решений, так как не может существовать такая пара чисел  $x$  и  $y$ , чтобы  $x + py$  равнялось одновременно и  $q_1$  и  $q_2$ .

**Теорема 4.** *Если в приведенной системе и левые и правые части одинаковы, система имеет бесконечное множество решений.*

**Доказательство.** Имеем систему

$$\left. \begin{aligned} x + py &= q, \\ x + py &= q. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Уравнение  $x + py = q$  имеет бесконечное множество решений. Каждое такое решение является и решением системы (6).

**Правило.** *Для того чтобы узнать, сколько решений имеет данная система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными, достаточно систему привести. Если в приведенной системе левые части различны, система имеет решение и притом только одно. Если же в приведенной системе левые части одинаковы, система не имеет решений, когда правые части различны, и имеет бесконечное множество решений, когда правые части тоже одинаковы.*

**Пример.** Исследовать системы

$$\begin{aligned} 1) \quad & \left. \begin{aligned} 2x + 3y &= 10, \\ 3x + 2y &= 11; \end{aligned} \right\} & 2) \quad & \left. \begin{aligned} 2x + 3y &= 10, \\ 14x + 21y &= 70; \end{aligned} \right\} & 3) \quad & \left. \begin{aligned} 2x + 3y &= 10, \\ 14x + 21y &= 80. \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

**Решение.** Приведем каждую из систем, получим

$$\begin{aligned} 1) \quad & \left. \begin{aligned} x + \frac{3}{2}y &= 5, \\ x + \frac{2}{3}y &= \frac{11}{3}; \end{aligned} \right\} & 2) \quad & \left. \begin{aligned} x + \frac{3}{2}y &= 5, \\ x + \frac{3}{2}y &= 5; \end{aligned} \right\} & 3) \quad & \left. \begin{aligned} x + \frac{3}{2}y &= 5, \\ x + \frac{3}{2}y &= \frac{40}{7}. \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Первая система имеет единственное решение. Вторая имеет бесконечное множество решений:  $x = 5 - \frac{3}{2}y$ ;  $y$ —любое число. Третья не имеет решений.

**Пример.** Показать, что при любом  $b$  система

$$\left. \begin{aligned} x + (b+2)y &= b+1, \\ x + (b-5)y &= b \end{aligned} \right\}$$

имеет единственное решение.

**Решение.** Уравнение  $b+2=b-5$  не имеет решений. Поэтому при любом  $b$  левые части системы различны.

**Пример.** Исследовать систему

$$\left. \begin{aligned} 2x - 3y &= 1, \\ 5x - my &= m+1. \end{aligned} \right\}$$

**Решение.** Приведем систему, получим:

$$\left. \begin{aligned} x - \frac{3}{2}y &= \frac{1}{2}, \\ x - \frac{m}{5}y &= \frac{m+1}{5}. \end{aligned} \right\}$$

Если  $m \neq \frac{15}{2}$ , система имеет единственное решение. Если  $m = \frac{15}{2}$ , система имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x - \frac{3}{2}y &= \frac{1}{2}, \\ x - \frac{3}{2}y &= \frac{17}{10} \end{aligned} \right\}$$

и решений не имеет.

Рассмотрим теперь системы, которые не могут быть приведены. Нетрудно видеть, что такие системы могут быть отнесены к одному из следующих четырех типов:

**Тип 1.** Система имеет такой вид:

$$\left. \begin{aligned} 0x + b_1y &= m_1, \\ a_2x + 0y &= m_2 \end{aligned} \right\} \quad (b_1 \neq 0; a_2 \neq 0).$$

**Тип 2.** Система имеет такой вид:

$$\left. \begin{aligned} 0x + 0y &= m_1, \\ a_2x + b_2y &= m_2 \end{aligned} \right\} \quad (a_2 \neq 0; b_2 \neq 0).$$

**Тип 3.** Система имеет такой вид:

$$\left. \begin{aligned} 0x + 0y &= m_1, \\ 0x + b_2y &= m_2 \end{aligned} \right\} \quad (b_2 \neq 0).$$

**Тип 4.** Система имеет такой вид:

$$\left. \begin{aligned} 0x + 0y &= m_1, \\ 0x + 0y &= m_2 \end{aligned} \right\}$$

Система типа 1 имеет единственное решение:

$$x = \frac{m_2}{a_2}; \quad y = \frac{m_1}{b_1}.$$

Действительно, первое уравнение системы имеет решение  $y = \frac{m_1}{b_1}$ ;  $x$  — любое число; второе уравнение системы имеет решение  $x = \frac{m_2}{a_2}$ ;  $y$  — любое число.

Система типа 2 не имеет решений, если  $m_1 \neq 0$ , и имеет бесконечное множество решений, если  $m_1 = 0$ . В последнем случае

$$x = \frac{m_2 - b_2 y}{a_2}; \quad y \text{ — любое число.}$$

Система типа 3 не имеет решений, если  $m_1 \neq 0$ , и имеет бесконечное множество решений, если  $m_1 = 0$ . В последнем случае

$$y = \frac{m_2}{b_2}; \quad x \text{ — любое число.}$$

Система типа 4 не имеет решений, если хоть одно из чисел  $m_1$  и  $m_2$  отлично от нуля. Если же  $m_1 = m_2 = 0$ , система имеет бесконечное множество решений:  $x$  — любое число;  $y$  — любое число.

**Определение.** Выражение  $a_1 b_2 - a_2 b_1$  называется *определителем системы*

$$\left. \begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= m_1, \\ a_2 x + b_2 y &= m_2. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

**Теорема 5.** Если определитель системы отличен от нуля и система эта может быть приведена, то отличен от нуля также и определитель соответствующей приведенной системы. Если определитель системы равен нулю и система эта может быть приведена, то равен нулю также и определитель соответствующей приведенной системы.

**Доказательство.** Пусть  $a_1 \neq 0$ ;  $a_2 \neq 0$ . Приведем систему (7), получим

$$\left. \begin{aligned} x + \frac{b_1}{a_1} y &= \frac{m_1}{a_1}, \\ x + \frac{b_2}{a_2} y &= \frac{m_2}{a_2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Пусть  $D_1$  и  $D_2$  — определители систем (7) и (8). Имеем

$$D_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1; \quad D_2 = \frac{b_2}{a_2} - \frac{b_1}{a_1},$$

т.е.  $D_1 = a_1 a_2 D_2$ . Если  $D_1 \neq 0$ , то и  $D_2 \neq 0$ . Если  $D_1 = 0$ , то и  $D_2 = 0$ .

**Теорема 6.** Если определитель системы отличен от нуля, система имеет решение и притом единственное. Если определитель системы равен нулю, система либо совсем не имеет решений, либо имеет их бесконечное множество.

**Доказательство.** Все изложенное выше может быть сведено в таблицу (см. табл. 1), из которой видно, что система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда определитель ее отличен от нуля. Система не имеет решений или имеет их бесконечное множество тогда и только тогда, когда определитель ее равен нулю.

Таблица 1

| Система                                                                                                                                                                 | Определитель системы | Число решений                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|--------------------------------------|
| $\left. \begin{aligned} x + p_1 y &= q_1, \\ x + p_2 y &= q_2, \\ p_1 &\neq p_2. \end{aligned} \right\}$                                                                | Отличен от нуля      | Единственное                         |
| $\left. \begin{aligned} x + p y &= q_1, \\ x + p y &= q_2. \end{aligned} \right\}$                                                                                      | Равен нулю           | Либо нет, либо бесконечное множество |
| $\left. \begin{aligned} 0x + b_1 y &= m_1, \\ a_2 x + 0y &= m_2, \\ b_1 &\neq 0; \quad a_2 \neq 0. \end{aligned} \right\}$                                              | Отличен от нуля      | Единственное                         |
| $\left. \begin{aligned} 0x + 0y &= m_1, \\ a_2 x + b_2 y &= m_2, \\ 0x + 0y &= m_2, \\ 0x + b_2 y &= m_2, \\ 0x + 0y &= m_1, \\ 0x + 0y &= m_2. \end{aligned} \right\}$ | Равен нулю           | Либо нет, либо бесконечное множество |

Теоремы о решении систем двух уравнений первой степени с двумя неизвестными могут быть выведены и без рассмотрения приведенных систем.

**Теорема 7.** Если  $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ , то система

$$\left. \begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= m_1, \\ a_2 x + b_2 y &= m_2 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

имеет решение и притом единственное.

**Доказательство.** Допустим, что система (9) имеет решение, что решение это найдено и вместо неизвестных подставлено в систему. Тогда каждое уравнение системы превратится в тождество. Умножим первое тождество на  $b_2$ , второе на  $-b_1$  и сложим. Получим

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1) x = m_1 b_2 - m_2 b_1.$$

Так как

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0,$$

$$x = \frac{m_1 b_2 - m_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \quad (10)$$

Вернемся к тождествам (9). Первое из них умножим на  $-a_2$ , второе на  $a_1$  и сложим. Получим  $(a_1b_2 - a_2b_1)y = a_1m_2 - a_2m_1$ ;

$$y = \frac{a_1m_2 - a_2m_1}{a_1b_2 - a_2b_1}. \quad (11)$$

Из сказанного вытекает, что если система (9) имеет решение, то решение это определяется формулами (10) и (11), и следовательно, единственное.

Остается доказать, что система (9) действительно имеет решение. Для этого достаточно в систему (9) подставить вместо  $x$  и  $y$  их значения по формулам (10) и (11) и убедиться, что каждое из уравнений системы (9) превращается в тождество.

**Теорема 8.** Если  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ , то система

$$\left. \begin{aligned} a_1x + b_1y &= m_1, \\ a_2x + b_2y &= m_2 \end{aligned} \right\}$$

либо совсем не имеет решений, либо имеет их бесчисленное множество.

Доказательство этой теоремы разобьем на два случая.

**Случай 1.** Все коэффициенты при неизвестных  $a_1, a_2, b_1, b_2$  отличны от нуля. Перепишем систему так:

$$\left. \begin{aligned} x + \frac{b_1}{a_1}y &= \frac{m_1}{a_1}, \\ x + \frac{b_2}{a_2}y &= \frac{m_2}{a_2}. \end{aligned} \right\}$$

По условию,  $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ , значит,  $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$ . [Поэтому, если  $\frac{m_1}{a_1} \neq \frac{m_2}{a_2}$ , то система не имеет решения, если же  $\frac{m_1}{a_1} = \frac{m_2}{a_2}$ , то система имеет бесчисленное множество решений. Всякое решение одного из уравнений является решением системы.

**Случай 2.** Среди коэффициентов при неизвестных имеются нули. Здесь возможны следующие случаи:

$$\begin{array}{lll} 1) \quad \left. \begin{aligned} 0x + b_1y &= m_1, \\ a_2x + b_2y &= m_2; \end{aligned} \right\} & 2) \quad \left. \begin{aligned} 0x + b_1y &= m_1, \\ a_2x + 0y &= m_2; \end{aligned} \right\} & 3) \quad \left. \begin{aligned} 0x + b_1y &= m_1, \\ 0x + b_2y &= m_2; \end{aligned} \right\} \\ b_1 \neq 0; a_2 \neq 0; b_2 \neq 0. & b_1 \neq 0; a_2 \neq 0. & b_1 \neq 0; b_2 \neq 0. \\ \\ 4) \quad \left. \begin{aligned} 0x + 0y &= m_1, \\ a_2x + b_2y &= m_2; \end{aligned} \right\} & 5) \quad \left. \begin{aligned} 0x + 0y &= m_1, \\ 0x + b_2y &= m_2; \end{aligned} \right\} & 6) \quad \left. \begin{aligned} 0x + 0y &= m_1, \\ 0x + 0y &= m_2. \end{aligned} \right\} \\ a_2 \neq 0; b_2 \neq 0. & b_2 \neq 0. & \end{array}$$

Случаи 1) и 2) отпадают, так как здесь  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ . В случае 3) первое уравнение имеет решения  $x$  — любое число, а  $y = \frac{m_1}{b_1}$ , второе уравнение имеет решения  $x$  — любое число, а  $y = \frac{m_2}{b_2}$ .

Если  $\frac{m_1}{b_1} \neq \frac{m_2}{b_2}$ , то система решений не имеет. Если же  $\frac{m_1}{b_1} = \frac{m_2}{b_2}$ , то система имеет бесчисленное множество решений  $x$  — любое число;  $y = \frac{m_1}{b_1}$ .

Случаи 4), 5) и 6) подробно рассмотрены на стр. 462. Изложенный здесь вывод короче вывода, данного в начале параграфа, но он формальнее и хуже выясняет суть дела.



Пример. Исследовать систему

$$\left. \begin{aligned} (a+1)x - (2a+1)y &= a, \\ (3a+1)x - (5a+1)y &= a+1. \end{aligned} \right\}$$

Решение. Вычислим определитель системы:

$$D = a(a-1).$$

Если  $a \neq 0$  и  $a \neq 1$ , система имеет единственное решение:

$$x = \frac{3a+1}{a}; \quad y = -\frac{2a+1}{a}.$$

Если  $a = 0$ , система имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x - y &= 0, \\ x - y &= 1 \end{aligned} \right\}$$

и решений не имеет.

Если  $a = 1$ , система имеет вид

$$\left. \begin{aligned} 2x - 3y &= 1, \\ 4x - 6y &= 2. \end{aligned} \right\}$$

Приведем систему, получим

$$\left. \begin{aligned} x - \frac{3}{2}y &= \frac{1}{2}, \\ x - \frac{3}{2}y &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\}$$

Система имеет бесконечное множество решений:  $x = \frac{1+3y}{2}$ ;  $y$  — любое число.

*Ответ.* Если  $a(a-1) \neq 0$ , система имеет единственное решение. Если  $a = 0$ , система решений не имеет. Если  $a = 1$ , система имеет бесконечное множество решений.

**Задача.** Две группы лыжников общей численностью в 100 человек выделили сборную команду в 15 человек. Первая группа выделила  $p\%$  своего состава, вторая группа выделила  $10\%$  своего состава. Сколько лыжников в каждой группе?

**Решение.** Пусть в первой группе  $x$  лыжников, во второй  $y$  лыжников. Тогда

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 100, \\ \frac{px}{100} + \frac{y}{10} &= 15, \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} x + y &= 100, \\ px + 10y &= 1500. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Определитель системы (12) равен  $10 - p$ .

Если  $p = 10$ , система (12) принимает вид

$$\begin{cases} x + y = 100, \\ x + y = 150 \end{cases}$$

и решений не имеет.

Если  $p \neq 10$ , система имеет единственное решение

$$x = \frac{500}{p-10}; \quad y = \frac{100(p-15)}{p-10}. \quad (13)$$

Так как  $x$  должно быть положительным,  $p > 10$ . Так как  $y$  должен быть положительным,  $p > 15$ .

Из этого видно, что при  $p \leq 15$  решение (13) не удовлетворяет условию задачи. С другой стороны,  $p \leq 100$ . Таким образом,

$$15 < p \leq 100.$$

Отсюда

$$5 < p - 10 \leq 90. \quad (14)$$

Так как  $x$  должно быть целым числом, то  $\frac{500}{p-10}$  целое, следовательно, число  $p - 10$  должно быть делителем числа 500.

$500 = 2^3 \cdot 5^3$ , поэтому для получения всех делителей числа 500 достаточно каждое из чисел 1, 2,  $2^2$  умножить на каждое из чисел 1, 5,  $5^2$ ,  $5^3$ . Получаем, что число 500 имеет 12 делителей: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 250 и 500.

Согласно неравенству (14) для  $p - 10$  возможны только следующие значения: 10, 20, 25, 50, и следовательно, для  $p$  возможны только значения 20, 30, 35 и 60.

По условию,  $\frac{px}{100} = \frac{5p}{p-10}$  должно быть целым числом. Этому требованию удовлетворяют следующие значения  $p$ : 20, 35 и 60. Значение  $p = 30$  этому требованию не удовлетворяет. Окончательно имеем следующую таблицу решений:

| $p$ | $x$ | $y$ |
|-----|-----|-----|
| 20  | 50  | 50  |
| 35  | 20  | 80  |
| 60  | 10  | 90  |

**Ответ.** В первой группе либо 50, либо 20, либо 10 лыжников.

## § 8. Исследование квадратного трехчлена

Содержание этого параграфа является дальнейшим развитием тех сведений, которые изложены в § 7 гл. II.

**Теорема 1.** Если дискриминант квадратного трехчлена отрицателен, трехчлен при всех значениях независимого переменного имеет тот же знак, что и его старший коэффициент.

Доказательство.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} \right] = \\ &= a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]. \end{aligned} \quad (1)$$

Так как  $b^2 - 4ac < 0$ , выражение в квадратных скобках представляет собой сумму квадрата и положительного числа, т. е. при всех значениях  $x$  является положительным числом. В силу этого трехчлен имеет при всех значениях  $x$  тот же знак, что и коэффициент  $a$ .

Доказанная теорема имеет следующий геометрический смысл.

Если дискриминант квадратного трехчлена отрицателен, график его целиком расположен в верхней полуплоскости (т. е. в полупло-

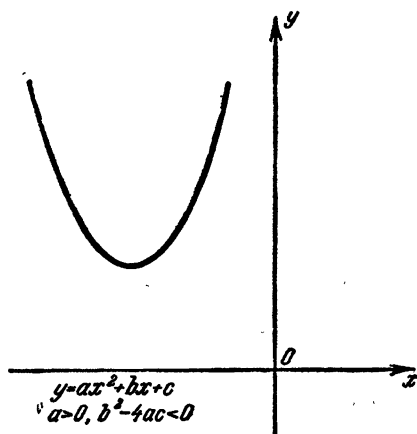


Рис. 101.

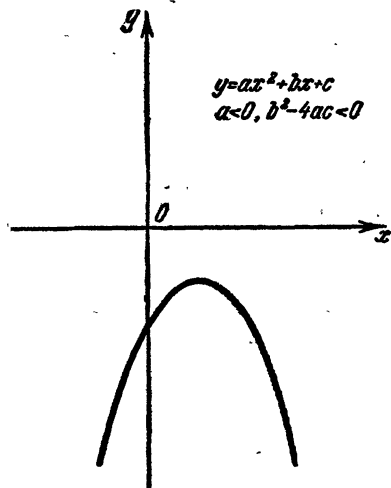


Рис. 102.

скости, в которой ординаты положительны), когда  $a > 0$ , и в нижней полуплоскости, когда  $a < 0$ . Напомним, что график квадратного трехчлена называется параболой (рис. 101 и 102).

**Теорема 2.** Если дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, трехчлен равен нулю при  $x = -\frac{b}{2a}$ , а при всех

остальных значениях независимого переменного имеет тот же знак, что и его старший коэффициент.

Доказательство. При  $b^2 - 4ac = 0$  равенство (1) принимает вид

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Выражение  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$  равно нулю при  $x = -\frac{b}{2a}$ , а при остальных значениях  $x$  имеет тот же знак, что и  $a$ .

Доказанная теорема имеет следующий геометрический смысл. Если дискриминант квадратного трехчлена равен нулю, график его касается оси  $Ox$  в точке  $x = -\frac{b}{2a}$  и расположен в верхней полуплоскости, когда  $a > 0$ , и в нижней полуплоскости, когда  $a < 0$  (рис. 103 и 104).

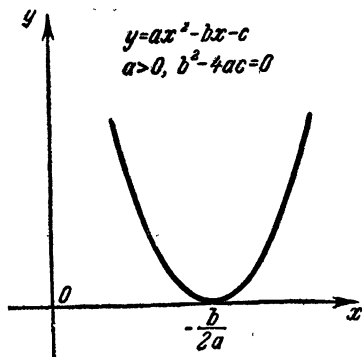


Рис. 103.

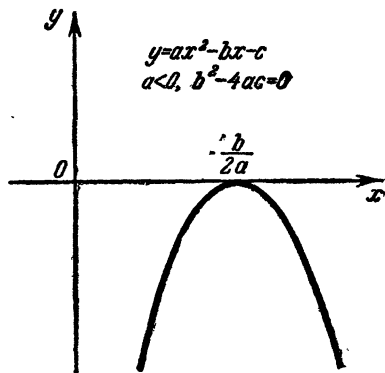


Рис. 104.

**Теорема 3.** Если дискриминант квадратного трехчлена положителен, трехчлен обращается в нуль в двух различных точках  $x_1$  и  $x_2$ . Во всех точках, лежащих вне промежутка  $(x_1, x_2)$ , трехчлен имеет знак своего старшего коэффициента, а во всех точках внутри этого промежутка имеет знак, противоположный знаку старшего коэффициента.

Доказательство.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \quad (2)$$

Трехчлен обращается в нуль при  $x = x_1$  и  $x = x_2$ , причем  $x_1 \neq x_2$ .

Пусть  $x_1 < x_2$ . Выясним сначала знак трехчлена вне промежутка  $(x_1, x_2)$ , т. е. при  $x < x_1$  и при  $x > x_2$ .

Если  $x < x_1$ , то  $x < x_2$  и произведение  $(x - x_1)(x - x_2)$  положительно. Значит, правая часть равенства (2) имеет тот же знак, что и коэффициент  $a$ .

Если  $x > x_2$ , то  $x > x_1$  и произведение  $(x - x_1)(x - x_2)$  опять положительно и правая часть равенства (2) опять имеет тот же знак, что и коэффициент  $a$ .

Осталось рассмотреть, какой знак имеет трехчлен при  $x$ , лежащем внутри промежутка между корнями.

Пусть  $x_1 < x < x_2$ . В этом случае  $x - x_1 > 0$ , а  $x - x_2 < 0$ . Произведение  $(x - x_1)(x - x_2)$  отрицательно, и правая часть равенства (2) имеет знак, противоположный знаку коэффициента  $a$ .

Доказанная теорема имеет следующий геометрический смысл. Если дискриминант квадратного трехчлена положителен, график его пересекает ось  $Ox$  в двух точках. Если при этом старший коэффициент трехчлена положителен, график трехчлена, за исключением дуги, отсекаемой осью  $Ox$ , находится в верхней полуплоскости. Если же старший коэффициент трехчлена отрицателен, график его, за исключением дуги, отсекаемой осью  $Ox$ , находится в нижней полуплоскости (рис. 105 и 106).

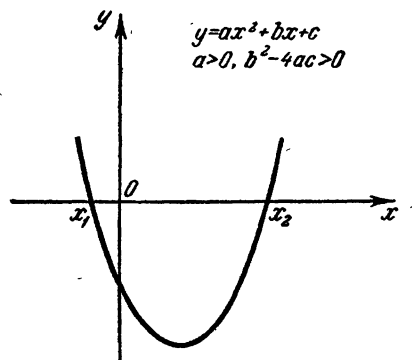


Рис. 105.

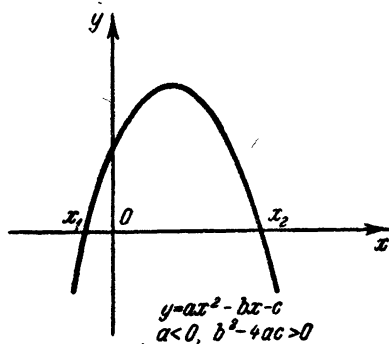


Рис. 106.

**Задача.** Моторная лодка, пройдя по течению реки расстояние  $S$  км от пункта  $A$  до пункта  $B$ , повернула обратно в пункт  $A$ . Не доехав до  $A$   $p$  км, лодка остановилась. На весь путь от  $A$  до  $B$  и обратно до остановки лодка потратила  $t$  часов. Определить собственную скорость лодки (скорость в стоячей воде), если скорость течения реки  $a$  км/час.

**Решение.** 1. Пусть собственная скорость лодки равна  $x$  км/час. Тогда скорость лодки, идущей по течению,  $(x + a)$  км/час; скорость лодки, идущей против течения,  $(x - a)$  км/час.

Путь, пройденный лодкой по течению,  $S$  км. Путь, пройденный лодкой против течения,  $(S - p)$  км. Время движения лодки по течению  $\frac{S}{x + a}$  час. Время движения лодки против течения  $\frac{S - p}{x - a}$  час.

Так как лодка находилась в движении  $t$  часов, то получаем следующее уравнение:

$$\frac{S}{x+a} + \frac{S-p}{x-a} = t.$$

2. Посмотрим, какие ограничения для неизвестного и параметров вытекают из условия задачи. Собственная скорость лодки должна быть больше скорости течения реки, так как иначе лодка не сможет плыть против течения реки, следовательно,  $x > a$ . Очевидно, что

$$S > p; \quad p > 0; \quad t > 0.$$

3. Составим систему уравнений и неравенств, которым должно удовлетворять решение задачи:

$$\left. \begin{aligned} \frac{S}{x+a} + \frac{S-p}{x-a} &= t, \\ x &> a, \end{aligned} \right\}$$

при условии  $S > p; \quad p > 0; \quad t > 0$ .

4. Решим систему:

$$\begin{aligned} t(x^2 - a^2) &= S(x-a) + (S-p)(x+a), \\ tx^2 - (2S-p)x - a(at-p) &= 0, \\ x &= \frac{(2S-p) \pm \sqrt{(2S-p)^2 + 4at(at-p)}}{2t}. \end{aligned}$$

Теперь нужно выяснить, действительны ли корни квадратного уравнения и удовлетворяют ли они требованию  $x > a$ . С этой целью рассмотрим квадратный трехчлен

$$f(x) = tx^2 - (2S-p)x - a(at-p).$$

Определим знак трехчлена при  $x = a$ :

$$f(a) = -2Sa + 2ap = -2a(S-p),$$

следовательно,  $f(a) < 0$ . Старший коэффициент  $t$  трехчлена положителен.

Из теорем, доказанных в этом параграфе, легко вывести утверждение: если квадратный трехчлен при  $x = a$  имеет отрицательное значение, а старший коэффициент трехчлена положителен, то дискриминант трехчлена положителен и число  $a$  находится между корнями трехчлена.

Поэтому корни  $x_1$  и  $x_2$  уравнения (3) действительны и

$$x_2 < a < x_1.$$

Больший корень уравнения удовлетворяет всем условиям задачи.

Если бы мы не пользовались свойствами квадратного трехчлена, то решение было бы сложнее. Тогда следовало бы представить дискриминант уравнения в виде

$$4S(S-p) + (2at-p)^2,$$

показать, что он положителен, и, кроме того, доказать, что  $x_1 > a$ ;  $x_2 < a$ .

$$\text{Ответ. } x = \frac{(2S-p) + \sqrt{(2S-p)^2 + 4at(at-p)}}{2t}.$$

### § 9. Решение неравенства второй степени с одним неизвестным

Неравенство второй степени с одним неизвестным имеет вид

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad (1)$$

или

$$ax^2 + bx + c < 0 \quad (2)$$

Так как умножением обеих частей на  $-1$  неравенство (2) превращается в неравенство вида (1), достаточно научиться решать неравенство (1).

Это проще всего сделать, исходя из графика квадратного трехчлена.

Действительно, для того чтобы решить неравенство (1), достаточно узнать, при каких значениях  $x$  график трехчлена находится в верхней полуплоскости. Ответ на этот вопрос можно дать на основании результатов исследования квадратного трехчлена.

Пусть  $D = b^2 - 4ac$ .

1. Если  $a > 0$  и  $D > 0$ , график трехчлена находится в верхней полуплоскости, за исключением дуги, отсекаемой осью  $Ox$ . Неравенство (1) справедливо при  $x < x_1$  и при  $x > x_2$ , где  $x_1$  и  $x_2$  корни трехчлена и  $x_1 < x_2$ .

2. Если  $a > 0$  и  $D = 0$ , весь график трехчлена, за исключением одной точки, в которой он касается оси  $Ox$ , находится в верхней полуплоскости. Неравенство (1) справедливо при всех значениях  $x$ , кроме  $x = -\frac{b}{2a}$ .

3. Если  $a > 0$  и  $D < 0$ , весь график трехчлена находится в верхней полуплоскости, и неравенство справедливо при всех значениях  $x$ .

4. Если  $a < 0$  и  $D > 0$ , график трехчлена находится в нижней полуплоскости, за исключением дуги, отсекаемой осью  $Ox$ . Неравенство (1) справедливо только при  $x_1 < x < x_2$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — корни трехчлена.

5. Если  $a < 0$  и  $D = 0$ , весь график трехчлена, кроме точки касания с осью  $Ox$ , находится в нижней полуплоскости и неравенство (1) решений не имеет.

6. Если  $a < 0$  и  $D < 0$ , весь график трехчлена находится в нижней полуплоскости и неравенство (1) решений не имеет.

Полученные результаты коротко можно выразить так:

Если  $a > 0$ , то неравенству  $ax^2 + bx + c > 0$  удовлетворяют все вещественные числа, за исключением корней трехчлена и чисел, заключенных между ними.

Если  $a < 0$ , то неравенству  $ax^2 + bx + c > 0$  удовлетворяют все числа, заключенные между корнями трехчлена, и только они.

Пример. Решить неравенство

$$2x^2 - 3x + 7 > 0.$$

Решение.  $D = 9 - 56 < 0$ . Трехчлен не имеет вещественных корней. Неравенство справедливо при всех значениях  $x$ .

Пример. Решить неравенство

$$\frac{x^2 - 3x + a}{a - 2} > x. \quad (3)$$

Решение. Для освобождения неравенства от дроби обе части его нужно умножить на  $a - 2$ . Поэтому приходится рассмотреть два случая.

Случай 1.  $a > 2$ . Неравенство (1) принимает вид

$$x^2 - 3x + a > x(a - 2)$$

или

$$x^2 - (a + 1)x + a > 0. \quad (4)$$

Левая часть неравенства (4) имеет корни  $x_1 = 1$  и  $x_2 = a$ , причем  $x_1 < x_2$ , так как  $a > 2$ . Неравенство (4) справедливо при всех значениях  $x$ , лежащих вне промежутка  $(1, a)$ , т. е. при  $x < 1$  и при  $x > a$ .

Случай 2.  $a < 2$ . В этом случае неравенство (3) приводится к виду

$$x^2 - (a + 1)x + a < 0. \quad (5)$$

Левая часть неравенства (5) имеет корни  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = a$ . Неравенство (5) справедливо при всех значениях  $x$ , лежащих внутри промежутка, образованного корнями  $x_1$  и  $x_2$ . Рассмотрим три случая:  $a < 1$ ;  $a = 1$ ;  $a > 1$ .

Если  $a < 1$ , неравенство (5) справедливо при  $a < x < 1$ .

Если  $a = 1$ , неравенство (5) решений не имеет.

Если  $a > 1$ , неравенство (5) справедливо при  $1 < x < a < 2$ .

Ответ. Если  $a < 1$ , то  $a < x < 1$ ; если  $a = 1$ , то неравенство решений не имеет; если  $1 < a < 2$ , то  $1 < x < a$ ; если  $a > 2$ , то  $x < 1$  и  $x > a$ .



## ГЛАВА XI

### УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

#### § 1. Уравнение $n$ -й степени с одним неизвестным

**Определение.** Уравнением  $n$ -й степени с одним неизвестным  $x$  называется уравнение

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad (1)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — любые комплексные числа,  $a_0 \neq 0$ ,  $n$  — натуральное.

Изучение уравнения (1) в общем виде выходит за рамки школьного курса алгебры. В этой главе рассматриваются лишь некоторые свойства уравнения (1) и, кроме того, изучаются некоторые его частные виды.

#### § 2. Деление многочлена относительно $x$ на $x - a$

**Теорема.** Остаток от деления многочлена относительно  $x$  на двучлен  $x - a$  равен значению этого многочлена при  $x$ , равном  $a$ .

**Доказательство.** Разделим многочлен  $n$ -й степени

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (1)$$

на двучлен  $x - a$ . Как известно, частным (неполным) в этом случае будет многочлен  $n - 1$  степени

$$b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1}, \quad (2)$$

а остатком — некоторое число  $r$ . Так как делимое равно делителю, умноженному на частное, плюс остаток, то

$$\begin{aligned} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = \\ = (x - a)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1}) + r. \end{aligned} \quad (3)$$

Равенство (3) есть тождество, оно справедливо при любых значениях  $x$ . В частности, оно справедливо и при  $x = a$ . При  $x = a$  первое слагаемое правой части равенства (3) обращается в нуль, а потому

$$a_0a^n + a_1a^{n-1} + \dots + a_{n-1}a + a_n = r. \quad (4)$$

**Следствие.** Для того чтобы многочлен относительно  $x$  делился на двучлен  $x - a$ , необходимо и достаточно, чтобы число  $a$  было корнем этого многочлена, т. е. чтобы при  $x = a$  многочлен обращался в нуль.

**Доказательство.**

**Необходимость.** Пусть многочлен (1) делится на  $x - a$ , т. е. остаток  $r$  равен нулю. Тогда на основании равенства (4)

$$a_0 a^n + a_1 a^{n-1} + \dots + a_{n-1} a + a_n = 0, \quad (5)$$

т. е.  $a$  — корень многочлена (1).

**Достаточность.** Пусть  $a$  — корень многочлена (1), т. е. имеет место равенство (5). Тогда на основании равенства (4)  $r = 0$ , т. е. многочлен (1) делится на двучлен  $x - a$ .

Рассмотрим вновь тождество (3). Если в правой части его раскрыть скобки и сделать приведение подобных членов, в результате должен получиться тот же многочлен, что и в левой части. На этом основании, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получаем

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_1 - ab_0 &= a_1, \\ b_2 - ab_1 &= a_2, \\ &\dots \dots \dots \\ b_{n-1} - ab_{n-2} &= a_{n-1}, \\ r - ab_{n-1} &= a_n. \end{aligned}$$

Перепишем эти равенства так:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_1 &= ab_0 + a_1, \\ b_2 &= ab_1 + a_2, \\ &\dots \dots \dots \\ b_{n-1} &= ab_{n-2} + a_{n-1}, \\ r &= ab_{n-1} + a_n. \end{aligned}$$

Полученные равенства показывают, что коэффициенты частного и остаток, т. е.  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}, r$ , удобно вычислять последовательно одно за другим. Эти вычисления обычно располагают следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccc} a_0 & & a_1 & & \dots & & a_n \\ a_0 = b_0 & b_0 a + a_1 = b_1 & \dots & b_{n-1} a + a_n = r & \Big| & a \end{array}$$

Пример. Разделить многочлен

$$2x^4 - 3x^3 + x^2 - 5x - 1 \text{ на } x - 3.$$

Решение.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2 & -3 & 1 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 10 & 25 & 74 & \end{array}$$

Первый коэффициент 2 второй строки просто сносится ( $b_0 = a_0$ ).  
Второй коэффициент 3 получен так:

$$2 \cdot 3 + (-3) = 3 (b_0 a + a_1 = b_1).$$

Третий коэффициент 10 получен так:

$$3 \cdot 3 + 1 = 10 (b_1 a + a_2 = b_2)$$

и т. д. Неполное частное равно

$$2x^3 + 3x^2 + 10x + 25.$$

Остаток 74.

Пример. Найти значение многочлена

$$3x^5 - 2x^3 + x^2 - 11 \text{ при } x = -2.$$

Решение. Искомое значение многочлена равно остатку от деления многочлена на  $x + 2$

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3 & 0 & -2 & 1 & 0 & -11 & -2 \\ 3 & -6 & 10 & -19 & 38 & -87 & \end{array}$$

В двух местах первой строки потребовалось вписать 0. Объясняется это тем, что делимое имеет следующий вид:

$$3x^5 + 0 \cdot x^4 - 2x^3 + x^2 + 0x - 11.$$

Обычно члены, коэффициенты которых равны нулю, пропускаются. Здесь их пропускать нельзя.

Ответ. —87.

### § 3. Составление уравнения $n$ -й степени по его корням

**Теорема.** Каковы бы ни были числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , можно составить уравнение  $n$ -й степени, корнями которого будут эти числа и только они.  
**Доказательство.** Составим произведение

$$a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n), \quad (1)$$

где  $a_0$  — любое число, отличное от нуля. При  $x = x_1$  двучлен  $x - x_1$  обращается в нуль, значит, при этом значении  $x$  обращается в нуль и произведение (1). При  $x = x_2$  обращается в нуль двучлен  $x - x_2$  и опять произведение (1) обращается в нуль. То же самое происходит при  $x = x_3; \dots; x = x_n$ .

Пусть теперь  $x = a$ , где  $a$  — число, отличное от  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Ни одна из разностей  $a - x_1, a - x_2, \dots, a - x_n$  не равна нулю. Число  $a_0$  тоже отлично от нуля. Значит, и произведение

$$a_0(a - x_1)(a - x_2) \dots (a - x_n)$$

отлично от нуля.

Таким образом, уравнение

$$a_0(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)=0$$

имеет корнями  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и только эти числа.

Раскрыв скобки и выполнив приведение подобных членов, получим в левой части уравнения многочлен  $n$ -й степени относительно  $x$ , т. е.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2)$$

Корнями уравнения (2) являются числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и только эти числа.

Возможно, что корни  $x_1, x_2, \dots, x_n$  уравнения (2) не все различны между собой. В этих случаях говорят, что уравнение (2) имеет *кратные корни*. Так, например, если  $x_1 = x_2$  и отлично от других корней уравнения (2), число  $x_1$  является корнем второй кратности уравнения (2). Левая часть уравнения (2) делится в этом случае на  $(x-x_1)^2$  и не делится на  $(x-x_1)^3$ . Если  $x_1 = x_2 = x_3$  и отлично от других корней уравнения (2), число  $x_1$  является корнем третьей кратности уравнения (2). Левая часть уравнения (2) делится в этом случае на  $(x-x_1)^3$  и не делится на  $(x-x_1)^4$ .

Вообще *корнем кратности  $k$*  уравнения (2) называется такое число  $a$ , что левая часть уравнения (2) делится на  $(x-a)^k$  и не делится на  $(x-a)^{k+1}$ .

Пример. Составить уравнение второй степени, корни которого

$$x_1 = \frac{2}{3}; \quad x_2 = -1.$$

Решение.  $a_0\left(x - \frac{2}{3}\right)(x+1)$ . Положим  $a_0 = 3$ . Имеем

$$(3x-2)(x+1)=0 \text{ или } 3x^2+x-2=0.$$

Пример. Составить уравнение второй степени, корни которого  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = i$ .

Решение.  $a_0(x-1)(x-i)=0$ . Положим  $a_0 = 1$ ;  $x^2 - (1+i)x + i = 0$ .

Пример. Составить уравнение четвертой степени, корни которого  $i$ ;  $-i$ ;  $1+i$ ;  $1-i$ .

Решение. Имеем

$$a_0(x-i)(x+i)(x-1-i)(x-1+i)=0.$$

Положим  $a_0 = 1$ .

$$(x^2+1)[(x-1)-i][(x-1)+i]=0,$$

$$(x^2+1)[(x-1)^2+1]=0,$$

$$(x^2+1)(x^2-2x+2)=0,$$

$$x^4-2x^3+3x^2-2x+2=0.$$

Пример. Составить уравнение третьей степени, корни которого  $x_1 = 1$ ;  $x_2 = i$ ;  $x_3 = -1$ .

Решение.  $a_0(x-1)(x-i)(x+1)=0$ . Положим  $a_0 = 1$ .

$$(x-1)^2(x+1)=0,$$

$$(x^2-2x+1)(x+1)=0,$$

$$x^3-x^2-x+1=0.$$

Число единица является здесь корнем второй кратности.

#### § 4. Основная теорема алгебры и некоторые следствия из нее

В § 3 мы видели, что, выбрав произвольные  $n$  комплексных чисел, можно составить уравнение  $n$ -й степени, корнями которого будут выбранные числа. Коэффициенты этого уравнения могут при этом оказаться как вещественными, так и мнимыми. Возникает следующий весьма важный вопрос.

Дано уравнение  $n$ -й степени с комплексными коэффициентами

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0. \quad (1)$$

Можно ли утверждать, что среди комплексных чисел найдется хоть одно число, являющееся корнем этого уравнения?

В свое время мы видели, что среди целых чисел нет числа, являющегося корнем уравнения  $2x - 3 = 0$  с целыми коэффициентами. Среди положительных чисел нет числа, являющегося корнем уравнения  $x + 1 = 0$  с положительными коэффициентами.

Среди рациональных чисел нет числа, являющегося корнем уравнения  $x^2 - 2 = 0$  с рациональными коэффициентами. Среди действительных чисел нет числа, являющегося корнем уравнения  $x^2 + 1 = 0$  с действительными коэффициентами.

Понятно поэтому, сколь важное значение имеет поставленный вопрос. Ответ на него дает основная теорема алгебры.

*Всякое уравнение  $n$ -й степени с любыми комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.*

Доказательство этой теоремы выходит за рамки школьной программы.

**Теорема 1.** *Всякий многочлен  $n$ -й степени с любыми комплексными коэффициентами может быть представлен и притом единственным образом в виде произведения  $n$  двучленов первой степени, т. е.*

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

где  $a_0 \neq 0$ ,  $n \geq 1$ . (Два таких разложения, отличающиеся только порядком расположения множителей, не считаются различными.)

**Доказательство.** Доказательство разбивается на две части. В первой части доказывается возможность представления многочлена  $n$ -й степени в виде произведения  $n$  двучленов первой степени, во второй — единственность такого представления.

Для  $n = 1$  теорема верна, так как

$$a_0 x + a_1 = a_0 \left( x + \frac{a_1}{a_0} \right).$$

Предположим, что теорема справедлива для многочленов степени  $n - 1$ .

Согласно основной теореме алгебры многочлен  $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$  имеет по крайней мере один корень  $x_1$  и, следовательно, делится на  $x - x_1$ , т. е.

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = (x - x_1)(b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-1}).$$

Здесь  $b_0 = a_0$  (см. § 2).

Для многочлена  $b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-1}$  теорема справедлива. Значит,

$$b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \dots + b_{n-1} = b_0 (x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n).$$

Следовательно,

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Допустим, что имеется два таких разложения:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = c_0 (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \quad (2)$$

и

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = c'_0 (x - x'_1)(x - x'_2) \dots (x - x'_n). \quad (3)$$

Так как коэффициенты при  $x^n$  в правой и левой частях равенств (2) и (3) должны быть равны, то

$$c_0 = c'_0 = a_0.$$

Приравниваем правые части равенств (2) и (3). После сокращения на  $a_0$  имеем

$$(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = (x - x'_1)(x - x'_2) \dots (x - x'_n). \quad (4)$$

Методом математической индукции докажем, что правая и левая части равенства (4) состоят из соответственно равных множителей, но, быть может, записанных в другом порядке.

Для  $n=1$  утверждение, очевидно, справедливо.

Пусть утверждение справедливо для произведений, состоящих из  $n-1$  множителей. Докажем, что утверждение справедливо и для произведений, состоящих из  $n$  множителей.

Левая часть равенства (4) при  $x=x_1$  обращается в нуль. Значит, при  $x=x_1$  обращается в нуль и правая часть этого равенства, т. е.

$$(x_1 - x'_1)(x_1 - x'_2) \dots (x_1 - x'_n) = 0.$$

Произведение равно нулю. Значит, хоть один из сомножителей равен нулю. Допустим, что  $x_1 - x'_1 = 0$ . В случае необходимости мы можем изменить нумерацию сомножителей так, чтобы первым был множитель, равный нулю. Тогда

$$x_1 = x'_1 \quad \text{и} \quad x - x_1 = x - x'_1.$$

Сократим равенство (4) на  $x - x_1$ , получим

$$(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) = (x - x'_2)(x - x'_3) \dots (x - x'_n). \quad (5)$$

По допущению правая и левая части равенства (5) состоят из соответственно равных множителей, но, быть может, записанных в другом порядке. Приписав в каждую часть равенства (5) по одинаковому множителю  $x - x_1$ , получим, что правая и левая части равенства (4) состоят из соответственно равных сомножителей.

Теорема доказана полностью.

В разложении

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

некоторые из сомножителей правой части могут быть одинаковы. Обозначив  $x - x_1, x - x_2, \dots, x - x_m$  различные из них, а буквами  $k_1, k_2, \dots, k_m$  кратность их вхождения, получим

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = a_0 (x - x_1)^{k_1} (x - x_2)^{k_2} \dots (x - x_m)^{k_m}, \quad (6)$$

где  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ , а  $x_1, x_2, \dots, x_m$  все различны между собой.

*Представление левой части уравнения в виде (6) называется представлением левой части уравнения в канонической форме.*

**Теорема 2.** *Всякое уравнение  $n$ -й степени с любыми комплексными коэффициентами имеет ровно  $n$  корней, среди которых могут быть и равные друг другу.*

**Доказательство.** Дано уравнение

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

где  $a_0 \neq 0, n \geq 1$ . Как доказано, левая часть может быть представлена в виде произведения  $n$  множителей первой степени. Таким образом, имеем

$$a_0 (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0.$$

При  $x = x_1; x = x_2; \dots; x = x_n$  левая часть уравнения превращается в нуль и, следовательно,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — корни уравнения. Покажем, что никакое число  $\alpha$ , отличное от  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , не может быть корнем этого уравнения.

Действительно, произведение  $a_0 (\alpha - x_1)(\alpha - x_2) \dots (\alpha - x_n)$  не равно нулю, так как ни один из множителей его не равен нулю. Таким образом,

корнями рассматриваемого уравнения являются числа  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и других корней нет.

*Следствие. Уравнение  $n$ -й степени имеет  $n$  корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

**Теорема 3.** Если уравнение  $n$ -й степени имеет действительные коэффициенты и мнимое число  $a + bi$  является корнем этого уравнения, то и сопряженное число  $a - bi$  является также корнем этого уравнения.

**Доказательство.** Пусть мнимое число  $a + bi$  является корнем уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (7)$$

с действительными коэффициентами. Требуется доказать, что сопряженное число  $a - bi$  также является корнем уравнения (7).

Составим многочлен

$$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] = x^2 - 2ax + (a^2 + b^2). \quad (8)$$

Этот многочлен имеет действительные коэффициенты. Разделим левую часть уравнения (7) на многочлен (8). В частном получим многочлен  $n - 2$  степени с действительными коэффициентами, в остатке многочлен степени не выше первой и тоже с действительными коэффициентами.

Так как делимое равно делителю, умноженному на частное плюс остаток, то

$$\begin{aligned} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n &= \\ &= [x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)](b_0 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \dots + b_{n-2}) + Ax + B. \end{aligned}$$

Положим в этом равенстве  $x = a + bi$ . Получим

$$A(a + bi) + B = 0,$$

так как и левая часть равенства и трехчлен  $x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)$  при  $x = a + bi$  обращаются в нуль. Имеем

$$(Aa + B) + Abi = 0,$$

следовательно,

$$\left. \begin{aligned} Aa + B &= 0, \\ Ab &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Так как  $b \neq 0$ , то  $A = 0$ . Из первого уравнения системы (9) имеем  $B = 0$ . Выходит, что остаток  $Ax + B$  равен нулю, т. е.

$$\begin{aligned} a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n &= \\ &= [x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)](b_0 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \dots + b_{n-2}). \end{aligned} \quad (10)$$

При  $x = a - bi$  первый сомножитель правой части равенства (10) превращается в нуль, значит, и левая часть равенства тоже обращается в нуль. Значит, число  $a - bi$  является корнем уравнения (7).

**Теорема 4.** Всякий многочлен  $n$ -й степени с действительными коэффициентами может быть представлен в виде произведения многочленов первой или второй степени с действительными коэффициентами.

**Доказательство** этой теоремы проводится методом математической индукции. Теорема, очевидно, справедлива для многочленов первой и второй степени. При этом многочлен второй степени либо имеет действительные корни и тогда разлагается на множители первой степени с действительными коэффициентами, либо он имеет два мнимых сопряженных корня, и тогда он на множители с действительными коэффициентами не разлагается.

Допустим, что теорема справедлива для многочленов  $n - 2$  степени и многочленов  $n - 1$  степени. Докажем, что тогда она справедлива и для многочленов  $n$ -й степени.

Пусть  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$  — многочлен  $n$ -й степени с действительными коэффициентами.

Если этот многочлен имеет действительный корень  $x_1$ , то он представляется в виде произведения многочлена первой степени на многочлен  $n-1$  степени с действительными коэффициентами, т. е.

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = (x - x_1)(b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1}).$$

Если же многочлен действительных корней не имеет, то он имеет мнимый корень  $a + bi$  и сопряженный с ним корень  $a - bi$ . В этом случае многочлен представляется в виде произведения трехчлена второй степени на многочлен  $n-2$  степени с действительными коэффициентами, т. е.

$$\begin{aligned} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n &= \\ &= [x^2 - 2ax + (a^2 + b^2)](b_0x^{n-2} + b_1x^{n-3} + \dots + b_{n-2}). \end{aligned}$$

Так как теорема для многочленов  $n-1$  степени и многочленов  $n-2$  степени справедлива, то она справедлива и для многочленов степени  $n$ .

### Упражнения

1. Решить уравнение  $x^4 + 4 = 0$ , зная, что один из корней его  $1 + i$ .
2. При каких значениях  $a$  и  $b$  многочлен  $x^4 - 3x^2 + 3x^2 + ax + b$  делится без остатка на  $x^2 - 3x + 2$ ?

## § 5. Теорема Виета

Из равенства

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = a_0(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n)$$

легко получить теорему Виета для уравнений любой степени. Перепишем это равенство так:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = a_0[x + (-x_1)][x + (-x_2)] \dots [x + (-x_n)].$$

К правой части этого равенства применим правило умножения двучленов, первые члены которых одинаковы (см. гл. VIII, § 5).

Получаем

$$\begin{aligned} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n &= \\ &= a_0(x^n + S_1^n x^{n-1} + S_2^n x^{n-2} + \dots + S_n^n), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $S_1^n, S_2^n, \dots, S_n^n$  имеют тот же смысл, что и в гл. VIII.

Обозначим знаком  $f_1$  сумму корней уравнения (1), т. е.

$$f_1 = x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

Знаком  $f_2$  обозначим сумму всевозможных произведений корней, взятых по два. Подобный же смысл имеют знаки  $f_3, f_4, \dots, f_n$ . Тогда

$$S_1^n = -f_1; \quad S_2^n = f_2; \quad S_3^n = -f_3; \dots;$$

$$S_n^k = (-1)^k f_k; \quad \dots; \quad S_n^n = (-1)^n f_n.$$

Равенство (1) теперь можно переписать так:

$$\begin{aligned} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n &= \\ &= a_0(x^n - f_1x^{n-1} + f_2x^{n-2} - \dots + (-1)^n f_n). \end{aligned} \quad (2)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в правой и левой частях равенства (2), получим

$$-a_0f_1 = a_1; \quad a_0f_2 = a_2; \quad \dots, \quad (-1)^n a_0f_n = a_n.$$



Теперь имеем

$$f_1 = -\frac{a_1}{a_0}; \quad f_2 = \frac{a_2}{a_0}; \quad f_3 = -\frac{a_3}{a_0}; \quad \dots; \quad f_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Последние равенства и выражают теорему Виета для уравнения любой степени. При  $n=2$ , т. е. для уравнения  $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ , получаем из-

вестный результат:  $f_1 = -\frac{a_1}{a_0}; \quad f_2 = \frac{a_2}{a_0}$ .

**Пример.** Не решая уравнения  $x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$ , определить сумму квадратов его корней.

**Решение.** Пусть  $x_1, x_2, x_3$  — корни данного уравнения. Рассмотрим равенство  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$ . По теореме Виета

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1; \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 2.$$

Значит,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 - 2 \cdot 2 = -3.$$

Полученный результат означает, что среди чисел  $x_1, x_2, x_3$  имеются мнимые, иначе сумма квадратов их не могла бы быть отрицательной.

Предложенное уравнение нетрудно решить и подсчитать сумму квадратов корней непосредственно:

$$x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0; \quad (x^2 + 2)(x - 1) = 0;$$

$$x_1 = 1; \quad x_2 = i\sqrt{2}; \quad x_3 = -i\sqrt{2}.$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 - 2 - 2 = -3.$$

### Упражнения

1. Сумма двух корней уравнения  $2x^3 - x^2 - 5x + \lambda = 0$  равна 1. Определить  $\lambda$ .

## § 6. О решении уравнений высших степеней

Прежде всего возникает такой вопрос: можно ли для уравнений любой степени составить формулы для выражения корней уравнения через его коэффициенты, подобно известной формуле для квадратного уравнения? Оказывается, что это можно сделать для уравнений 3-й и 4-й степени, при этом формулы эти содержат столь сложные радикалы, что на практике ими предпочитают не пользоваться.

Что же касается уравнений выше 4-й степени, то доказано, что для них при помощи радикалов такие формулы составить нельзя.

В математике разработан ряд способов, дающих возможность вычислить любой корень любого уравнения с любой точностью. Один из таких способов разработан великим русским математиком, творцом неевклидовой геометрии Н. И. Лобачевским.

Ограничимся рассмотрением графического способа. Этот способ может применяться для вычисления действительных корней уравнений с действительными коэффициентами.

**Пример.** Вычислить вещественные корни уравнения

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

**Решение.** Построим график функции  $y = x^3 - 2x - 5$  (рис. 107). Имеем

|     |    |    |    |    |    |       |
|-----|----|----|----|----|----|-------|
| $x$ | -2 | -1 | 0  | 1  | 2  | 2,5   |
| $y$ | -9 | -4 | -5 | -6 | -1 | 5,625 |

Нетрудно видеть, что при  $x > 2,5$  первое слагаемое  $x^3$  будет столь большим сравнительно с остальными, что  $y$  будет положительным числом.

По мере продвижения направо от  $x = 2,5$  график будет подниматься кверху и, следовательно, больше пересекать ось  $Ox$  не будет.

Точно так же при  $x < -2$  первое слагаемое  $x^3$  будет столь большим по абсолютной величине, что  $y$  будет отрицательным числом. По мере продвижения влево от  $x = -2$  график будет опускаться книзу и больше пересекать ось  $Ox$  не будет.

График пересекает ось  $Ox$  в одной точке, и это означает, что уравнение имеет один действительный (корень) (два других корня уравнения — мнимые сопряженные).

Как видно из таблицы, действительный корень заключен между 2 и 2,5. По графику видно, что он ближе к 2, чем к 2,5.

Определим знак  $y$  при  $x = 2,1$ . Имеем

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -5 & 2,1 \\ 1 & 2,1 & 2,41 & + & \end{array}$$

Это означает, что точка 2,1 лежит правее корня, так как соответствующая ордината положительна (см. график).

Таким образом,  $2 < x < 2,1$ . Корень вычислен с точностью до 0,1. Для получения

более точного результата можно воспользоваться приемом, указанным в гл. IV, § 7. Можно показать, что с точностью до 0,000001  $x = 2,094551$ .

## § 7. Вычисление рациональных корней уравнений с целыми коэффициентами

**Теорема.** Для того чтобы несократимая дробь  $\frac{p}{q}$  была корнем уравнения

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n = 0 \quad (1)$$

с целыми коэффициентами, необходимо, чтобы  $p$  было делителем свободного члена  $a_n$ , а  $q$  было делителем старшего коэффициента  $a_0$ .

**Доказательство.** Пусть  $\frac{p}{q}$  — корень уравнения (1), т. е. имеет место тождество

$$a_0 \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_1 \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right) + a_n = 0.$$

Умножим обе части тождества на  $q^n$ , получим

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} q + \dots + a_{n-1} p q^{n-1} + a_n q^n = 0. \quad (2)$$

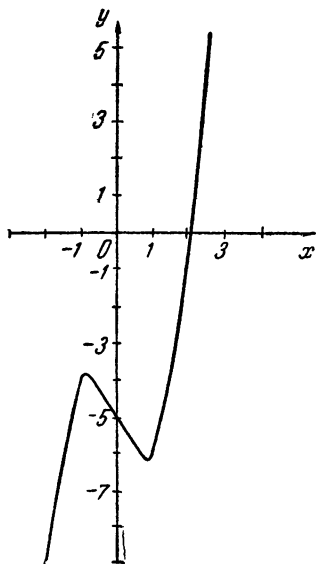


Рис. 107.

Из тождества (2) имеем

$$-\frac{a_n q^n}{p} = a_0 p^{n-1} + a_1 p^{n-2} q + \dots + a_{n-1} q^{n-1}.$$

Правая часть равенства — целое число. Значит,  $\frac{a_n q^n}{p}$  — целое.

По условию, дробь  $\frac{p}{q}$  несократима, значит, ни одно простое число, входящее в  $p$ , в число  $q$  не входит. По этой причине ни одно простое число, входящее в  $p$ , не может входить и в  $q^n$ . Выходит, что  $a_n$  делится на  $p$ .

Из тождества (2) имеем

$$-\frac{a_0 p^n}{q} = a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} q + \dots + a_n q^{n-1}.$$

Так как ни одно простое число, входящее в  $q$ , не входит в  $p$ , число  $-\frac{a_0 p^n}{q}$  может быть целым только тогда, когда  $a_0$  делится на  $q$ .

*Следствие 1. Если уравнение имеет целые коэффициенты и старший из них равен единице, то рациональными корнями такого уравнения могут быть только целые числа.*

Действительно,  $a_0 = 1$ , а  $q$  — делитель  $a_0$ . Значит,  $q = \pm 1$ , а тогда  $\frac{p}{q}$  целое.

*Следствие 2. Целые корни уравнения с целыми коэффициентами являются делителями свободного члена.*

Пример. Вычислить рациональные корни уравнения

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Решение. Свободный член равен 2. Поэтому для  $p$  возможны только следующие значения: 1, —1, 2 и —2.

Старший коэффициент равен 2. Поэтому для  $q$  возможны только следующие значения: 1, —1, 2, —2.

Составляя всевозможными способами несократимые дроби  $\frac{p}{q}$ , найдем, что рациональные корни данного уравнения, если они имеются, содержатся среди следующих чисел:

$$1, 2, \frac{1}{2}, -1, -2, -\frac{1}{2}.$$

Подстановкой в уравнение легко выяснить, что из этих шести чисел удовлетворяют уравнению 2,  $\frac{1}{2}$  и —1.

Таким образом, уравнение имеет три рациональных корня:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = \frac{1}{2}; \quad x_3 = -1.$$

Для испытания, является ли данное число корнем уравнения, удобно пользоваться правилом сокращенного деления многочлена на двучлен  $x - a$ . Для данного примера эти испытания проводятся так:

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -3 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & -2 & \end{array}$$

1 не является корнем уравнения, так как при делении левой части уравнения на  $x - 1$  в остатке получилось  $-2$ .

Испытываем число 2

$$\begin{array}{rrrr|l} 2 & -3 & -3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & \end{array}$$

2 — корень уравнения. В результате деления оказалось, что

$$2x^3 - 3x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(2x^2 + x - 1).$$

Поэтому для отыскания остальных корней данного уравнения достаточно решить уравнение

$$2x^2 + x - 1 = 0.$$

$$\text{Ответ. } x_1 = 2; x_2 = \frac{1}{2}; x_3 = -1.$$

Пример. Найти рациональные корни уравнения

$$x^3 + 2x^2 + 4x + 2 = 0.$$

Решение. Старший коэффициент уравнения равен единице, поэтому рациональными корнями уравнения могут быть только целые числа.

Делители свободного члена суть: 1, 2,  $-1$ ,  $-2$ . Сразу видно, что никакое положительное число не может быть корнем данного уравнения, так как при любом положительном значении  $x$  левая часть уравнения положительна.

Остается испытать  $-1$  и  $-2$ :

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & 2 & 4 & 2 & -1 & 1 & 2 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 4 & -6 & \end{array}$$

Ответ. Уравнение рациональных корней не имеет.

Полученный в последнем примере результат означает, что корни рассматриваемого уравнения иррациональные или мнимые.

Пример. Решить уравнение

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Решение. Выясним прежде всего, не имеет ли уравнение рациональных корней. Испытанию подлежат два числа 1 и  $-1$ :

$$\begin{array}{rrrrr|l} 1 & -2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & \end{array}$$

$x_1 = 1$ . Остальные корни данного уравнения являются корнями уравнения третьей степени  $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ :

$$\begin{array}{rrrr|l} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \end{array}$$

$x_2 = 1$ . Остальные корни данного уравнения являются корнями квадратного уравнения  $x^2 + 1 = 0$ .

Ответ.  $x_1 = x_2 = 1$ ;  $x_3 = i$ ;  $x_4 = -i$ .

### Упражнения

1. Доказать, что уравнение  $x^4 + ax + 1 = 0$  не имеет рациональных корней, если  $a$  — целое и  $|a| \neq 2$ .

## § 8. Решение двучленных уравнений 3-й, 4-й и 6-й степени

Определение. Двучленным уравнением  $n$ -й степени называется уравнение вида  $a_0 x^n + a_n = 0$ . Очевидно, что делением на  $a_0$  такое уравнение сводится к уравнению  $x^n + \frac{a_n}{a_0} = 0$ . Если коэффициенты уравнения действительны, то двучленное уравнение можно представить в виде  $x^n - a^n = 0$  или  $x^n + a^n = 0$ , где  $a$  — положительное число.

В этом параграфе излагается решение двучленных уравнений с действительными коэффициентами при  $n = 3, 4$  и  $6$ .

а)  $n = 3$ .

$$x^3 - a^3 = 0; \quad (x - a)(x^2 + ax + a^2) = 0;$$

$$x_1 = a; \quad x_2 = -\frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}i; \quad x_3 = -\frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{2}i.$$

Уравнение имеет один действительный и два мнимых сопряженных корня.

$$x^3 + a^3 = 0; \quad (x + a)(x^2 - ax + a^2) = 0$$

$$x_1 = -a; \quad x_2 = \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{3}}{2}i; \quad x_3 = \frac{a}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{2}i.$$

Уравнение имеет один действительный и два мнимых сопряженных корня.

б)  $n = 4$ .

$$x^4 - a^4 = 0; \quad (x^2 - a^2)(x^2 + a^2) = 0;$$

$$x_1 = a; \quad x_2 = -a; \quad x_3 = ai; \quad x_4 = -ai.$$

Уравнение имеет два действительных и два мнимых сопряженных корня.

$$x^4 + a^4 = 0; \quad (x^4 + 2x^2a^2 + a^4) - 2x^2a^2 = 0;$$

$$(x^2 + a^2)^2 - 2x^2a^2 = 0;$$

$$(x^2 - a\sqrt{2}x + a^2)(x^2 + a\sqrt{2}x + a^2) = 0;$$

$$x_{1,2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{2} - a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \pm \frac{a\sqrt{2}}{2}i;$$

$$x_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}(1+i); \quad x_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}(1-i);$$

$$x_{3,4} = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{2} - a^2} = -\frac{a\sqrt{2}}{2} \pm \frac{a\sqrt{2}}{2}i;$$

$$x_3 = \frac{a\sqrt{2}}{2}(-1+i); \quad x_4 = \frac{a\sqrt{2}}{2}(-1-i).$$

Уравнение имеет две пары мнимых сопряженных корней.

в)  $n = 6$ .

$$x^6 - a^6 = 0; \quad (x^3 - a^3)(x^3 + a^3) = 0.$$

Уравнение распадается на два кубических двучленных уравнения. На основании рассмотренного в п. а)

$$x_1 = a; \quad x_2 = \frac{a}{2}(-1+i\sqrt{3}); \quad x_3 = \frac{a}{2}(-1-i\sqrt{3});$$

$$x_4 = -a; \quad x_5 = \frac{a}{2}(1+i\sqrt{3}); \quad x_6 = \frac{a}{2}(1-i\sqrt{3}).$$

Уравнение имеет два действительных и две пары мнимых сопряженных корней.

$$x^6 + a^6 = 0; \quad (x^2 + a^2)(x^4 - a^2x^2 + a^4) = 0;$$

$$(x^2 + a^2)[(x^4 + 2a^2x^2 + a^4) - 3a^2x^2] = 0;$$

$$(x^2 + a^2)(x^2 + a\sqrt{3}x + a^2)(x^2 - a\sqrt{3}x + a^2) = 0.$$

Уравнение распадается на три квадратных уравнения. Решая их, получаем

$$x_1 = ai; \quad x_2 = -ai; \quad x_3 = \frac{a}{2}(-\sqrt{3} + i);$$

$$x_4 = \frac{a}{2}(-\sqrt{3} - i); \quad x_5 = \frac{a}{2}(\sqrt{3} + i); \quad x_6 = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - i).$$

Уравнение имеет три пары мнимых сопряженных корней.

**З а м е ч а н и е.** Пользуясь извлечением корня  $n$ -й степени из комплексного числа, можно решить двучленное уравнение  $x^n = a$  любой степени  $n$  при любой правой части  $a$ .

Корнями уравнения  $x^n = a$  являются все значения корня  $n$ -й степени из  $a$ .

**Пример.** Решить уравнение

$$x^3 = -2 + 2i.$$

**Решение.** Запишем правую часть уравнения в тригонометрической форме

$$-2 + 2i = \sqrt{8} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

Пусть кубический корень из  $-2 + 2i$  равен  $\rho (\cos \theta + i \sin \theta)$ . Тогда имеем

$$\rho^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = \sqrt{8} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right),$$

отсюда (§ 9 гл. IX) имеем

$$\rho = \sqrt[3]{2}; \quad \theta = \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3}.$$

Для получения всех значений корня достаточно  $k$  положить равным 0, 1, 2.

При  $k=0$  имеем

$$x_0 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 + i.$$

При  $k=1$  имеем

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right) = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = \\ &= (1 + i) \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \end{aligned}$$

При  $k=2$  имеем

$$\begin{aligned} x_2 &= \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right) = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = \\ &= (1 + i) \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}+1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ. } x_0 = 1 + i; \quad x_1 = -\frac{\sqrt{3}+1}{2} + i \frac{\sqrt{3}-1}{2};$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

## § 9. Решение трехчленных уравнений

**Определение.** Трехчленным уравнением называется уравнение вида

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0.$$

При  $n=2$  уравнение является биквадратным.

Решение трехчленного уравнения подстановкой  $x^n = y$  сводится к квадратному уравнению  $ay^2 + by + c = 0$  и двучленному уравнению  $n$ -й степени.

Пример. Решить уравнение

$$36x^8 - 13x^4 + 1 = 0.$$

Решение. Положим  $x^4 = y$ . Имеем

$$36y^2 - 13y + 1 = 0,$$

отсюда  $y_1 = \frac{1}{4}$ ;  $y_2 = \frac{1}{9}$ .

Теперь имеем

$$x^4 - \frac{1}{4} = 0; \quad \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) = 0;$$

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}i; \quad x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

Далее,

$$x^4 - \frac{1}{9} = 0; \quad \left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\left(x^2 + \frac{1}{3}\right) = 0;$$

$$x_5 = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad x_6 = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \quad x_7 = \frac{\sqrt{3}}{3}i; \quad x_8 = -\frac{\sqrt{3}}{3}i.$$

$$\text{Ответ. } x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}i;$$

$$x_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}i; \quad x_5 = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad x_6 = -\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$x_7 = \frac{\sqrt{3}}{3}i; \quad x_8 = -\frac{\sqrt{3}}{3}i.$$





## ДОПОЛНЕНИЕ

### I. Утверждения верные и неверные. Задачи на доказательство

Мы сейчас приведем несколько утверждений. Некоторые из них верны, и мы их докажем. Другие утверждения неверны, и мы их опровергнем (т. е. докажем, что они неверны).

1. *В нашем городе (селении) есть средняя школа.* Это утверждение верно. Для доказательства достаточно показать школу. (Вот средняя школа нашего города.)

2. *В каждом селении есть средняя школа.* Это утверждение неверно. Для доказательства достаточно указать одно селение, в котором нет средней школы. (В селении А нет средней школы.)

3. *Существует мальчик, которого зовут Миша.* Это утверждение верно. Для доказательства достаточно указать одного мальчика, которого зовут Миша. (Вот мальчик, которого зовут Миша.)

4. *Всякого мальчика зовут Миша.* Это утверждение неверно. Для опровержения достаточно указать одного мальчика, которого зовут другим именем. (Вот мальчик, которого зовут Ваня, а не Миша.)

5. *Не всякого мальчика зовут Миша.* Это утверждение верно. Для доказательства достаточно указать одного мальчика, которого зовут другим именем.

6. *Если число делится на 5, то оно оканчивается нулем.* Это утверждение неверно. Для опровержения достаточно указать число, которое делится на 5, а оканчивается не нулем. (25 делится на 5, а оканчивается не нулем, а цифрой 5.)

### Упражнения

1. Среди следующих утверждений имеются верные и неверные. Верные — доказать, неверные — опровергнуть.

- Все квадраты имеют одинаковую площадь.
- Всем школьникам 13 лет.
- Если основание прямоугольника увеличить в 2 раза, а высоту уменьшить в 2 раза, то площадь прямоугольника не изменится.
- Если произведение двух целых чисел делится на 6, то хотя один из сомножителей делится на 6.
- Если основание прямоугольника увеличить на 2 см, а высоту уменьшить на 2 см, то площадь прямоугольника не изменится.
- Для того чтобы число делилось на 2, достаточно, чтобы оно оканчивалось нулем.

ж) Для того чтобы число делилось на 2, необходимо, чтобы оно оканчивалось нулем.

з) Сумма двух четных чисел является четным числом.

и) Сумма двух нечетных чисел является нечетным числом.

к) Если сумма двух целых чисел является четным числом, то каждое слагаемое четное.

л) Сумма трех нечетных чисел нечетна.

м) Если сумма трех целых чисел нечетна, то хотя одно из слагаемых нечетно.

2. Имеются две гири весом в 1 кг и 3 кг. Доказать, что при помощи этих гирь можно на чашечных весах взвесить любой груз, вес которого равен целому числу килограммов и не превосходит 4 кг.

3. Написаны два числа, одно четное, другое нечетное. Двум лицам А и В предлагают распределить эти числа между собой. Далее просят А умножить его число на 2, а В просят умножить его число на 3. Потом просят А и В сложить полученные ими произведения. Каким образом по сумме произведений можно определить, как А и В распределили предложенные числа?

4. В ящике лежат яблоки двух сортов. Какое наименьшее количество яблок следует наугад взять из ящика, чтобы среди этих яблок хотя бы два оказались одного сорта?

5. В классе 40 учеников. Найдутся ли среди них хотя бы два ученика, фамилии которых начинаются с одной и той же буквы?

6. В школе 637 учеников. Можно ли утверждать, что хотя бы один из них родился 7 ноября? Можно ли утверждать, что хотя бы два из них имеют один и тот же день рождения?

7. Доказать, что любое целое число рублей, большее семи, можно уплатить без сдачи денежными билетами достоинством в 3 и 5 рублей.

8. Из шести чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6 произвольно выбрали 4 числа. Доказать, что среди выбранных чисел найдутся два, из которых одно делится на другое.

9. Восемь монет внешне одинаковы; одна из них — фальшивая — легче остальных. При помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти фальшивую монету.

10. Из бочки с вином берут литр вина и выливают его в бочку с водой; не размешивая, из второй бочки черпают литр неразмешанной смеси и выливают в первую бочку. Чего больше: вина в воде или воды в вине?

11. На конкурсе любителей задач и головоломок в результате соревнований отличились три человека. Чтобы выделить из них самого сообразительного, им показали пять бумажек: 3 белых и 2 черных. Затем всем трем завязали глаза и каждому на лоб наклеили по одной бумажке, а две оставшихся бумажки уничтожили. После этого повязки были сняты, и каждый увидел у своих противников по белой бумажке. Было объявлено, что победителем будет первый, определивший цвет своей бумажки. Некоторое время соревнующиеся сидели друг перед другом; наконец, один из них заявил, что его бумажка белая. Как он рассуждал?

## II. Упражнения к § 4 главы I части I

1. Один мальчик утверждал, что при всяком  $a$  число  $2a$  целое. Справедливо ли это утверждение?

2. Справедливо ли утверждение: если  $a$  — целое число или дробь со знаменателем 2, то  $2a$  целое?

3. Справедливо ли утверждение: для того чтобы число делилось на 6, достаточно, чтобы оно делилось на 12?

4. Справедливо ли утверждение: для того чтобы число делилось на 6, необходимо, чтобы оно делилось на 12?

5. Среди следующих утверждений имеются верные и неверные. Верные — доказать. Неверные — опровергнуть.

- а) При всяком целом  $a$  сумма  $2a + 3a$  есть четное число.
- б) При всяком целом  $a$  сумма  $2a + 3a$  есть нечетное число.
- в) При всяком целом  $a$  число  $6a$  делится на 3.
- г) Если  $a$  делится на 5, то  $2a$  делится на 10.
- д) Если  $2a$  делится на 10, то  $a$  делится на 5.
- е) Если  $a$  и  $b$  целые, то  $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$  — целое.
- ж) Для того чтобы сумма  $2a + 3b$  была целым числом, необходимо, чтобы  $a$  и  $b$  были целыми.
- з) Для того чтобы сумма  $2a + 3b$  была целым числом, достаточно, чтобы  $a$  и  $b$  были целыми.
- и) Для того чтобы  $2a$  было целым, необходимо, чтобы  $a$  было целым.
- к) Для того чтобы  $2a$  было целым, достаточно, чтобы  $a$  было дробью со знаменателем 2.
- л) Если  $5a$  целое, то  $a$  целое.
- м) Если  $a$  целое, то  $5a$  целое.

### III. Упражнения к § 5 главы I части I

1. Число оканчивается нечетной цифрой и на 5 не делится. Квадрат этого числа оканчивается той же цифрой, что и само число. Какой цифрой оканчивается число?

2. Среди следующих утверждений имеются верные и неверные. Верные — доказывать, неверные — опровергнуть.

- а) Не существует целого числа, куб которого оканчивался бы цифрой 2.
- б) Если  $a = 0$ , то  $a^3 = a^2$ .
- в) Если  $a = 1$ , то  $a^3 + a^2 = 2a$ .
- г)  $(a + b)^3 = a^3 + b^3$  при любых  $a$  и  $b$ .
- д) Если  $a^3 = a^2$ , то  $a$  равно 0.
- е) Для того чтобы  $a^3$  было равно  $a^2$ , достаточно, чтобы  $a$  было равно 1.
- ж) Для того чтобы  $a^3 = a^2$ , необходимо, чтобы  $a = 1$ .
- з) Для того чтобы куб целого числа делился на 5, необходимо, чтобы число это делилось на 5.
- и) Куб целого числа делится на 5 только тогда, когда число это делится на 5.

3. Доказать, что существует такое значение  $a$ , при котором справедливо равенство  $3a = a$ .

4. Доказать, что если  $a$  — целое число, то  $a(a - 1)$  — четное число.

5. Доказать, что если  $n$  — целое число, то  $\frac{n(n-1)}{2}$  — целое.

6. Доказать, что если  $n$  — целое число, то  $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$  — целое.

7. Доказать, что  $7^7 - 3^5$  делится на 10.

### IV. Условие и заключение

Рассмотрим утверждение: если число оканчивается нулем, то оно делится на 5. Утверждение это состоит из двух частей: *условия* и *заключения*. *Условие*: число оканчивается нулем; *заключение*: число делится на 5. Из того, что число оканчивается нулем, вытекает, что оно делится на 5, *из условия вытекает, выводится заключение*. При проверке утверждения, при его доказательстве условие считается данным, заключение проверяется, в этом цель доказательства справедливости или несправедливости утверждения. Связь условия и

заклЮчения наглядно можно представить так:



**Пример.** Отделить условие от заключения в следующем утверждении: если одно слагаемое увеличить на 3, а другое на 5, то сумма увеличится на 8.

**Решение.** Условие: одно слагаемое увеличивается на 3, другое на 5. Заключение: сумма увеличивается на 8.

**Пример.** Сумма двух четных слагаемых является четным числом. Отделить в этом утверждении условие от заключения.

**Решение.** Перепишем утверждение, по схеме «если..., то...». Тогда утверждение будет выглядеть так: если сумма состоит из двух слагаемых, каждое из которых является четным числом, то сумма является четным числом. Теперь видно, что *условие* состоит в следующем: сумма состоит из двух слагаемых, каждое из слагаемых — четное число; *заключение* состоит в том, что сумма — четное число.

**Замечание.** Когда утверждение составлено по схеме: «если..., то...», условие легко отделяется от заключения. В более сложных случаях следует утверждение сначала переписать по указанной схеме. Так мы и поступили в последнем примере.

### Упражнения

В следующих утверждениях отделить условие от заключения:

1. Если сумма цифр числа делится на 3, то число делится на 3.
2. Если  $a$  равно 2, то  $10a$  равно 20.
3. Если прошел дождь, то под окном сыро.
4. Если  $ab = 0$  и  $b \neq 0$ , то  $a = 0$ .
5. Разность нечетных чисел четна.
6. Для того чтобы  $a^2 = 0$ , необходимо, чтобы  $a = 0$ .
7. Для того чтобы  $a^2 = 0$ , достаточно, чтобы  $a = 0$ .
8.  $a^2 = 0$  только тогда, когда  $a = 0$ .
9. Квадрат четного числа делится на 4.
10. Всякое целое, большее 1, делится хоть на одно простое число.
11. Произведение двух последовательных целых чисел делится на 2.
12. Для того чтобы произведение двух чисел было равно нулю, необходимо, чтобы хоть один из сомножителей был равен нулю.
13. Для того чтобы произведение двух чисел было равно нулю, достаточно, чтобы хоть один из сомножителей был равен нулю.
14. Произведение двух чисел равно нулю, когда хоть один из сомножителей равен нулю.
15. Произведение двух чисел равно нулю только тогда, когда хоть один из сомножителей равен нулю.

### V. Прямое и обратное утверждение

Возьмем какое-нибудь утверждение. Например, такое: если число оканчивается нулем, то оно делится на 5. Поменяем местами условие и заключение, получим утверждение, *обратное* исходному (*прямо*): если число делится на 5, то оно оканчивается нулем.

В рассмотренном примере прямое утверждение справедливо, а обратное несправедливо.

**Вывод.** Из справедливости некоторого утверждения еще не следует справедливость обратного утверждения.

### Упражнения

1. Для каждого из утверждений раздела IV построить обратное.
2. Какие из утверждений, построенных в упражнении 1, справедливы и какие несправедливы?

## VI. Об условиях необходимых и достаточных

Мы уже встречались с утверждениями, которые выражали, что некоторые условия *необходимы* или *достаточны* для того, чтобы сделать соответствующее заключение. Каждое такое утверждение может быть переписано, при желании, по более простой схеме: «если ..., то ...».

В математике часто пользуются понятиями *необходимо*, *достаточно*, и поэтому надо научиться их правильно употреблять. Вот некоторые примеры.

**Пример.** Для того чтобы число делилось на 5, достаточно, чтобы оно делилось на 10. Слово «необходимо» здесь по смыслу не подходит. В самом деле, для того чтобы число делилось на 5, вовсе не необходимо, чтобы оно делилось на 10. Число может не делиться на 10 и все же делиться на 5 (например, 35).

Рассмотренное нами предложение можно переписать по схеме «если ..., то ...» так: если число делится на 10, то оно делится на 5.

**Пример.** Для того чтобы число делилось на 10, необходимо, чтобы оно делилось на 5. Здесь по смыслу не подходит слово «достаточно». В самом деле, для того чтобы число делилось на 10, вовсе не достаточно, чтобы оно делилось на 5. Так, например, 35 на 5 делится, а на 10 не делится.

Это же предложение можно записать так: если число делится на 10, то оно делится на 5.

**Пример.** Для того чтобы число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3. Здесь по смыслу подходят оба слова «необходимо» и «достаточно». Это же предложение можно записать двумя следующими предложениями:

1) Если число делится на 6, то оно делится на 2 и на 3.

2) Если число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6.

Первое из них выражает необходимость делимости на 2 и на 3 для того, чтобы число делилось на 6, а второе — достаточность делимости на 2 и 3 для того, чтобы число делилось на 6. Предложение второе обратное предложению первому.

Из трех приведенных примеров видно, что иногда из двух слов «необходимо» и «достаточно» подходит одно, а другое не подходит. Иногда же они подходят оба.

Впрочем, возможен и четвертый тип предложений, когда не подходит ни одно из слов «необходимо» и «достаточно». Например, *для того чтобы число делилось на 7, ..., чтобы сумма цифр числа делилась на 7*. Здесь вместо многоточия нельзя поставить ни «необходимо», ни «достаточно» (число 25 на 7 не делится, а сумма цифр его делится на 7, значит, нельзя вместо многоточия написать «достаточно»; число 35 на 7 делится, а сумма цифр его на 7 не делится, значит, вместо многоточия нельзя написать «необходимо»).

### Упражнения

В следующих предложениях вместо многоточия поставить «необходимо» или «достаточно», а где возможно, «необходимо и достаточно», так, чтобы получилось справедливое утверждение.

1. Для того чтобы сумма двух чисел была четной, ..., чтобы каждое слагаемое было четным.
2. Для того чтобы сумма двух чисел была четной, ..., чтобы каждое слагаемое было нечетным.
3. Для того чтобы число делилось на 15, ..., чтобы оно делилось на 3.
4. Для того чтобы число делилось на 3, ..., чтобы оно делилось на 15.
5. Для того чтобы число делилось на 10, ..., чтобы оно делилось на 2 и на 5.
6. Для того чтобы сумма двух натуральных чисел была больше 20, ..., чтобы хоть одно слагаемое было больше 10.
7. Для того чтобы  $2(x-1)(x-2)=0$ , ..., чтобы  $x=1$ .
8. Для того чтобы  $3x-5=10$ , ..., чтобы  $x=5$ .
9. Для того чтобы длина прямоугольника была 40 м, а ширина 30 м, ..., чтобы площадь его была  $1200 \text{ м}^2$ .
10. Для того чтобы объем куба был равен 125 куб. см, ..., чтобы ребро его было 5 см.
11. Для того чтобы число  $a$  было больше 5, ..., чтобы оно было больше 3.
12. Для того чтобы  $2a$  было целым, ..., чтобы  $a$  было целым.
13. Для того чтобы  $2a$  делилось на 4, ..., чтобы  $a$  было четным.
14. Для того чтобы  $a$  было целым, ..., чтобы  $2a$  было целым.
15. Для того чтобы 40 книг разместить на трех полках, ..., чтобы хоть на одну полку было поставлено более 13 книг.
16. Для того чтобы два квадрата имели одинаковую площадь, ..., чтобы стороны их были равны.

### VII. Объединение прямого и обратного утверждений в одном предложении

Мы знаем, что из справедливости прямого утверждения не следует еще справедливость обратного. Или, что все равно, из того, что некоторые условия являются необходимыми, еще не следует, что они являются достаточными, а из того, что некоторые условия являются достаточными, еще не следует, что они являются необходимыми.

В случае, когда справедливы оба утверждения — прямое и обратное, или, другими словами, когда некоторые условия являются и необходимыми и достаточными, обычно составляется одно предложение,

в котором объединяются оба утверждения — прямое и обратное, необходимость условия и его достаточность.

*Пример. Если сумма цифр числа делится на 3, число делится на 3.* Это утверждение справедливо. Справедливо и обратное утверждение: *если число делится на 3, то и сумма цифр его делится на 3.*

Прямое утверждение устанавливает, что для делимости числа на 3 достаточно делимости суммы его цифр на 3. Обратное утверждение устанавливает, что для делимости числа на 3 необходима делимость суммы его цифр на 3. Оба утверждения можно объединить в одном предложении так:

*Для того чтобы число делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма цифр его делилась на 3.*

Или так:

*Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма цифр его делится на 3* (здесь слово «тогда» выражает достаточность, а слова «только тогда» — необходимость условия; условие состоит в делимости на 3 суммы цифр числа).

*Пример. Для того чтобы куб целого числа делился на 8, необходимо и достаточно, чтобы это число делилось на 2.* Из этого предложения составить два так, чтобы одно выражало необходимость условия, а другое достаточность. Каждое из этих предложений формулировать по схеме: «если..., то...».

*Решение. Необходимость условия:* если куб числа делится на 8, то число делится на 2.

*Достаточность условия:* если число делится на 2, то куб его делится на 8.

### Упражнения

Каждое из следующих утверждений разбить на два отдельных утверждения так, чтобы одно выражало необходимость, а другое достаточность условия.

1. Для того чтобы произведение двух целых чисел было четным, необходимо и достаточно, чтобы хотя один из сомножителей был четным.

2. Для того чтобы число делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы оно оканчивалось нулем.

3. Для того чтобы число делилось на 21, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 3 и на 7.

4. Для того чтобы  $a$  делилось на 7, необходимо и достаточно, чтобы  $2a$  делилось на 14.

5. Для того чтобы  $2x = 10$ , необходимо и достаточно, чтобы  $x = 5$ .

6. Для того чтобы поверхность куба была равна  $54 \text{ см}^2$ , необходимо и достаточно, чтобы ребро его было равно 3 см.

7. Для того чтобы ребро куба равнялось 3 см, необходимо и достаточно, чтобы поверхность его была равна  $54 \text{ см}^2$ .

8. Для того чтобы  $5(x - 1) = 0$ , необходимо и достаточно, чтобы  $x = 1$ .

9. Для того чтобы сумма двух целых чисел была нечетной, необходимо и достаточно, чтобы слагаемые были разной четности.

10. Для того чтобы  $3a$  делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы  $a$  было целым.

## VIII. Упражнения к главе II части I

Среди следующих утверждений имеются верные и неверные. Верные — доказать. Неверные — опровергнуть.

1. Если сумма двух неотрицательных чисел равна нулю, то каждое слагаемое равно нулю.

2. Если  $a = b$ , то  $|a| = |b|$ .

3. Если  $|a| = |b|$ , то  $a = b$ .

4. Для того чтобы два числа были равны, необходимо, чтобы их абсолютные величины были равны.

5. Если  $a + b = a$ , то  $b = 0$ .

6. Если  $ab > 0$ , то  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

7. Для того чтобы произведение двух чисел было положительно, необходимо и достаточно, чтобы каждый из сомножителей был положительным.

8. Произведение двух чисел отрицательно тогда, когда один из сомножителей положителен, а другой отрицателен.

9. Произведение  $ab < 0$  только тогда, когда  $a$  и  $b$  разных знаков.

10. Произведение  $ab < 0$  тогда и только тогда, когда  $a$  и  $b$  разных знаков.

11. Если  $a + b = 0$ , то  $|a| = |b|$ .

12. Если  $|a| = |b|$ , то  $a + b = 0$ .

13. Если  $a^2 = 1$ , то  $a = 1$ .

14. Если  $|a| > |b|$ , то  $a > b$ .

15. Если  $\frac{a}{b} < 0$  и  $b > 0$ , то  $a < 0$ .

16. Для того чтобы  $a^4$  было положительным, достаточно, чтобы  $a$  было положительным.

17. При всяком  $a$   $a^4 > 0$ .

18. Для того чтобы  $a^5$  было отрицательным, необходимо, чтобы  $a$  было отрицательным.

19. Для того чтобы  $a^3$  было отрицательным, достаточно, чтобы  $a$  было отрицательным.

20. Для того чтобы  $a^8$  было отрицательным, необходимо и достаточно, чтобы  $a$  было отрицательным.

21. Если  $5 + a < 0$ , то  $a < 0$ .

22. Если  $a^2 + a < 0$ , то  $a < 0$ .

23. Если  $a \geq 0$ , то  $\frac{a + |a|}{2} = a$ .

24. Если  $a \leq 0$ , то  $\frac{a + |a|}{2} = 0$ .

25. Если  $a \geq 0$ , то  $\frac{a - |a|}{2} = 0$ .

26. Если  $a \leq 0$ , то  $\frac{a - |a|}{2} = a$ .

## IX. Упражнения к главе III части I

1. Вычислить при  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{1}{3}$  выражение

$$\frac{(a+b) - 5(a+b) + 7(a+b) - 3(a+b)}{(a+2b)^2 + (a^2+3b)^2}.$$

2. Доказать, что сумма трех последовательных целых чисел делится на 3.

3. Доказать, что  $a^4 \cdot a^3 \cdot a^2 = (a^4)^3$ .

4. Доказать, что  $(x+1)(x-1) + 2$  положительно при всех значениях  $x$ .

5. Вычислить  $(x-2)(x-3) - (x-1)(x-4)$  при  $x = 1,7$ .

6. Доказать, что разность квадратов двух последовательных нечетных чисел делится на 8.



## X. Упражнения к главе IV части I

1. Доказать, что разность между квадратом целого числа и самим числом делится на 2.

2. Доказать, что если сумма цифр двузначного числа есть число однозначное, то для умножения этого числа на 11 достаточно между его цифрами поставить сумму его цифр. (Например,  $24 \cdot 11 = 264$ .)

3. Вычислить  $abc + ab + ca + bc$  при  $a = \frac{1}{5}$ ;  $b = \frac{1}{7}$ ;  $c = \frac{1}{11}$ .

4. Вычислить  $abc + a^2bc + ab^2c + abc^2$  при  $a = 0,5$ ;  $b = 0,2$ ;  $c = 0,3$ .

5. Доказать, что  $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = a(a+1) + \frac{1}{4}$ . Воспользоваться этим равенством для вычисления  $\left(6\frac{1}{2}\right)^2$ ;  $\left(8\frac{1}{2}\right)^2$ . Вывести общее правило для возведения в квадрат числа, представляющего собой сумму целого числа и  $\frac{1}{2}$ .

6. Доказать, что для возведения в квадрат числа, оканчивающегося на 5, достаточно число его десятков умножить на следующее за ним число и к полученному произведению приписать 25. (Например,  $35^2 = 1225$ .)

7. Доказать, что если к произведению двух последовательных целых чисел прибавить большее из них, то получится квадрат большего числа.

8. Если данное число есть сумма квадратов двух целых чисел, то и квадрат его есть также сумма квадратов двух целых чисел. Доказать.

9. Доказать, что удвоенная сумма квадратов двух целых чисел есть также сумма квадратов двух целых чисел.

10. Доказать, что 1331 есть куб целого числа.

11. Доказать, что если  $a + b + c$  делится на 6, то  $a^3 + b^3 + c^3$  делится на 6.

12. Доказать, что сумма кубов трех последовательных целых чисел делится на 9.

## XI. Упражнения к главе V части I

1. Вычислить при  $x = \frac{1}{2}$ ;  $y = \frac{1}{3}$ ;  $z = \frac{1}{5}$  выражение  $\frac{xy + xz + yz}{xyz}$ .

2. При каком значении  $x$  многочлен  $x^4 - 3x^3 + 4x - a$  делится на  $x - 2$ .

3. Вычислить при  $x = 0,1$  выражение  $\frac{x^3 + x + 1}{x^3 - x + 1} + \frac{2x}{x - 1 - x^3}$ .

4. Сложить дроби  $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$ .

5. Доказать, что при целом  $m$  сумма  $\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$  есть целое число.

6. Пользуясь тем, что  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ , вычислить  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}$ .

## XII. Упражнения к главе VII части I

1. При каких значениях  $x$  выполняется неравенство  $x^2 < x$ ?

2. Подобрать  $a$  так, чтобы уравнения

$$\begin{aligned} x^2 + ax - 2a &= 0, \\ x^3 - 2ax + a &= 0 \end{aligned}$$

имели общий корень.

## XIII. Упражнения к главе VIII части I

1. Доказать, что каждое простое нечетное число может быть представлено и притом единственным способом в виде разности квадратов натуральных чисел.

2. Решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} 5ax - 7y &= a, \\ (9a + 2)x - 14y &= a + 2. \end{aligned} \right\}$$

3. Найти многочлен второй степени, принимающий при  $x=1$  значение  $-5$ , при  $x=2$  значение  $-2$ , при  $x=3$  значение  $3$ .

4. Решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 6, \\ x + y + v &= 7, \\ x + z + v &= 8, \\ y + z + v &= 9. \end{aligned} \right\}$$

5. Решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= 9, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{v} &= 11, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{v} &= 13, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{v} &= 15. \end{aligned} \right\}$$

## XIV. Упражнения к главе II части II

1. Доказать, что  $n$  прямых, расположенных в одной плоскости, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку, рассекают плоскость на  $\frac{n(n+1)}{2} + 1$  частей.

2. Решить уравнение  $(x^2 + 3x)^2 - 2(x^2 + 3x) - 8 = 0$ .

3. Решить уравнение  $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = 120$ .

4. Решить уравнение  $x^4 - x^3 - 10x^2 + x + 1 = 0$ .

5. Доказать, что  $x^3 + 5x + 16$  ни при каком целом  $x$  не делится на 169.

## XV. Упражнения к главе IV части II

1. Решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} x(x+y+z) &= 6, \\ y(x+y+z) &= 12, \\ z(x+y+z) &= 18. \end{aligned} \right\}$$

2. Решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} x-y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} &= \frac{20}{x+y}, \\ x^2 + y^2 &= 34. \end{aligned} \right\}$$

### XVI. Упражнения к главе V части II

1.  $S_n$  означает сумму  $n$  членов арифметической прогрессии. Доказать, что  $S_{p+q} = 0$ , если  $S_p = S_q$ ;  $p \neq q$ .

2. Доказать тождество

$$(1+x+x^2+\dots+x^n)^2 - x^n = (1+x+x^2+\dots+x^{n-1})(1+x+x^2+\dots+x^{n+1}).$$

3. Доказать, что число  $A = (10^n + 10^{n-1} + \dots + 10 + 1)(10^{n+1} + 5) + 1$  является точным квадратом.

4. Найти сумму

$$S_n = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \dots + \left(x^n - \frac{1}{x^n}\right)^2.$$

5. Доказать неравенство

$$1 + a + a^2 + \dots + a^k < \frac{1}{1-a}, \quad 0 < a < 1.$$

### XVII. Упражнения к главе VII части II

1. Доказать без помощи таблиц, что  $\frac{1}{\log_3 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} > 2$ .

2. Доказать, что  $\frac{\log_a n}{\log_{am} n} = 1 + \log_a m$ .

3. Доказать, что  $\log_{a_1 a_2 \dots a_n} x = \frac{1}{\frac{1}{\log_{a_1} x} + \frac{1}{\log_{a_2} x} + \dots + \frac{1}{\log_{a_n} x}}$ .

4. Решить уравнение  $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^x + (\sqrt{2} + \sqrt{3})^x = 4$ .

### XVIII. Упражнения к главе VIII части II

1. На одной из двух параллельных прямых выбраны  $n$  точек, а на другой —  $m$  точек. Каждая выбранная точка одной прямой соединена с каждой из выбранных точек другой прямой отрезком с концами в этих точках. Сколько раз пересекутся отрезки?

2. Доказать, что  $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$ .

3. Доказать тождество  $C_n^{m+1} + 2C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+2}^{m+1}$ .

4. Доказать, что  $1^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^{2n}$ .

5. Доказать тождество  $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}$ .

6. Доказать, что  $C_{2n}^n$  делится на  $n+1$ .

7. Доказать тождество  $C_n^n + C_{n+1}^n + \dots + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1}$ .

8. Вычислить сумму  $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \dots + (-1)^{n-1} nC_n^n$ .

9. Доказать, что отношение  $\frac{n!}{a_1!a_2!\dots a_k!}$  есть целое число, если  $a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq n$ .

10. Пусть  $S_k = 1^k + 2^k + \dots + n^k$ . Доказать, что  $(n+1)^{m+1} = (n+1) + C_{m+1}^1 S_1 + C_{m+1}^2 S_2 + \dots + C_{m+1}^m S_m$ .

11. Вычислить произведение  $\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$ .

### XIX. Упражнения к главе IX части II

1. Вычислить  $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-1}}$ , где  $n$  — целое положительное число.

2. Вычислить сумму  $1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots$ .

3. Вычислить сумму  $C_n^1 - C_n^2 + C_n^3 - C_n^4 + \dots$ .

### XX. Упражнения к главе X части II

1. Доказать неравенство  $a^n + b^n \leq (a+b)^n$ , если  $a \geq 0$ ;  $b \geq 0$ .

2. Доказать, что  $2^n > n$ , если  $n \geq 2$ .

3. Доказать, что  $2^n > 2n + 1$ , если  $n \geq 3$ .

4. Доказать, что  $2^n > n^2$ , если  $n \geq 5$ .

5. Доказать неравенство  $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) > 1 + (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ , если  $a_1 > 0$ ,  $a_2 > 0, \dots, a_n > 0$ .

6. Доказать неравенство  $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n) > 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ , если  $n \geq 1$ ;  $0 < a_1 < 1$ ;  $0 < a_2 < 1; \dots; 0 < a_n < 1$ .

7. Доказать неравенство  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$ .

8. Доказать неравенство  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ , если  $a > 0$ ;  $b > 0$ ;  $c > 0$ .

9. Доказать неравенство  $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ , если  $a_1 \geq 0$ ;  $a_2 \geq 0$ ;  $a_3 \geq 0$ .

10. Доказать неравенство  $\frac{4^n}{2n+1} < C_{2n}^n$ .

11. Решить и исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} ax + y = a, \\ x + ay = 1. \end{cases}$$

12. Решить и исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} ax + y + z = 1, \\ x + ay + z = a, \\ x + y + az = a^2. \end{cases}$$

13. Пусть  $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1$ ;  $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = 1$ . Доказать, что  $-1 \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq 1$ .

### XXI. Упражнения к главе XI части II

1. Доказать, что  $x^{3n+2} + x^{3m+1} + 1$  делится на  $x^2 + x + 1$ , если  $m$  и  $n$  — целые неотрицательные числа.

## ЧАСТЬ I

### ГЛАВА I

#### § 1

1.  $13\frac{1}{3}$ . 2. 75; 25;  $33\frac{1}{3}$ ;  $23\frac{53}{89}$ ;  $11\frac{49}{61}$ . 3.  $\frac{1S}{V+v}$ . 4.  $3\frac{8}{9}$  часа.

#### § 2

1. Например,  $a = b + c$ . 2. Например,  $S = kn$ . 3. Например,  $a = b + c$ . 4. Например,  $s = vt$ . 5. Например,  $p = mn$ .

#### § 3

1. Например,  $S = a(a - b)$ . 2. Например,  $A = at + (a - b)n$ . 3. Например,  $(m - a) + (m - b) = n$ .

#### § 4

1. Например,  $b = 50a$ . 2. Например,  $p = 4a$ . 3. Например,  $p = 2a + 2b$ . 4. Например,  $c = 5a - b$ . 5. Например,  $a = b + 2b$ . 6. Например,  $A = a + 2a + 1 + 4a$ . 7. Например,  $p = m - (2m - n)$ . 8. Например,  $p = 2a + (a - b)$ . 9. Например,  $A = \frac{1}{2}[a + (a + b)] + a + (a + b)$ . 10. Например,  $N = 10a + b$ . 11. Например,  $n = 100a + 10b + c$ . 12. Например,  $a + b = 2a - b$ . 13. Например,  $a - c = 2(b - 3c)$ .

#### § 5

2.  $2^5$  больше, чем  $5^2$ . 3. В четвертой, в третьей, во второй, в первой. 4.  $a^2 = 0$ ;  $a^2 = 0$ . Следовательно,  $a^2 = a^2$ . 5. Несправедливо. Например, если  $a = 1$ , то  $a^2 = 1$ . Однако  $2a = 2$ . 6.  $\frac{1}{45}$ . 7.  $a = 25$ . 8. 8, 5, 4, 5, 8; 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100; 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000. 9. Например,  $a^3 = 8a^2h$ . 10. Например,  $A = a^4$ . 11. Например,  $v = a^4$ . 12. Например,  $(a + b)^2 - 40 = a^2$ .

#### § 6

1. Решение.  $\left(7\frac{1}{7}\right)^2 = 7\frac{1}{7} \cdot 7\frac{1}{7} = \left(7 + \frac{1}{7}\right) \cdot 7\frac{1}{7} = 7 \cdot 7\frac{1}{7} + \frac{1}{7} \cdot 7\frac{1}{7} = 7 \cdot \left(7 + \frac{1}{7}\right) + \frac{1}{7} \cdot \left(7 + \frac{1}{7}\right) = 49 + 1 + 1 + \frac{1}{49} = 51\frac{1}{49}$ .

2. Доказательство.  $29 \cdot 13 + 29 \cdot 18 = 29 \cdot (13 + 18) = 29 \cdot 31$ .

#### § 7

1. Нет. Не существует обратного числа для нуля.

## § 9

1.  $R = ma + n(A - a)$ ;  $125 = 45 + 20n$ ,  $20n = 80$ ,  $n = 4$ . 2.  $t = \frac{S}{V - v}$ ;  
2, 13, 36, 10. 3.  $b(a - 3) = ac + d$ ;  $d = 10$ . 4.  $a + b = 3[(a - d) + b]$ ;  $d = 30$ .  
5.  $a + c = 2a - d$ ;  $d = 10$ .

## § 11

1. Решение. В задаче 9 из § 5 мы составили уравнение  $a^3 = 3a^2h$ . По условию  $a = 10$ . Значит,  $1000 = 300h$ ;  $h = 3\frac{1}{3}$  см. 2. Решение. В § 5 мы составили уравнение  $6a^3 - 25 = 2ab + 2ah + 2bh$ . По условию задачи  $a = 5$ ;  $b = 6$ . Значит,  $150 - 25 = 60 + 10h + 12h$ ;  $h = 2\frac{21}{22}$  дм.  
3. 1)  $s = a + (a - b) + n$ ; 2)  $50 = 20 + (20 - b) + 15$ ;  $b = 5$ . 3) Пешеходу за три дня надо было пройти 50 км. В первый день он прошел 20 км, во второй день на несколько км меньше, чем в первый. В третий день он прошел остальные 15 км. На сколько км меньше прошел пешеход во второй день, чем в первый? 4. 1)  $ab + c = (a + 8)d$ . 2)  $500 + c = 28 \cdot 37$ ;  $c = 536$ . 3) Рабочий зарабатывал в день 20 руб. Его товарищ зарабатывал на 8 руб. больше. На сколько меньше получит первый рабочий за 25 дней, чем его товарищ за 37 дней? 5. 1)  $a - c = (b - d)m$ . 2) 3; 800; 1200; 600; 1000 (сверху вниз, налево). 6. 1)  $A = a + (a + b) + \frac{a + (a + b)}{d}$ .  
2) а) По условию имеем  $a = 100$ ;  $b = 400$ ;  $d = 4$ . Следовательно,  $A = 100 + (100 + 400) + \frac{100 + (100 + 400)}{4}$ ;  $A = 750$ . Во всех трех совхозах вместе 750 т зерна. 6) По условию имеем  $A = 7200$ ;  $a = 2000$ ;  $b = 800$ . Следовательно,  $7200 = 2000 + (2000 + 800) + \frac{2000 + (2000 + 800)}{d}$ ;  $d = 2$ .  
В третьем совхозе в два раза меньше зерна, чем в первых двух вместе.

## § 12

1.  $2x + 1,75 = 2,3$ ;  $x = 0,275$ . 2.  $3x - 3,7 = 0,8$ ;  $x = 1,5$ . 3.  $\frac{x}{2,5} = 1,3$ ;  
 $x = 3,25$ . 4.  $\frac{12,5}{x} = 0,5$ ;  $x = 25$ . 5.  $300 + 40x = 580$ ;  $x = 7$ .

## ГЛАВА II

## § 1

1. 3; -3; -2; 2; -2; -3. 2. 4; 4. 3. 2; 0; -4.

## § 2

1.  $2 - 5 = -3$ , так как  $5 + (-3) = 2$ ;  $4 - 9 = -5$ , так как  $9 + (-5) = 4$ .

## § 3

1.

| Промежуток времени            | От 0 час. до 2 час. | 2  | 4 | 6  | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 |
|-------------------------------|---------------------|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
|                               |                     | 4  | 6 | 8  | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 | 22 | 24 |
| Приращение температуры (в °C) | -2                  | -1 | 0 | +2 | +3 | +3 | +2 | -1 | -1 | -1 | -2 | -2 |

2.

|                                       |          |          |          |          |          |          |          |    |
|---------------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----|
| Длина стороны в см                    | 0,5      | 1        | 1,5      | 2        | 2,5      | 3        | 3,5      | 4  |
| Площадь квадрата (в см <sup>2</sup> ) | 0,25     | 1        | 2,25     | 4        | 6,25     | 9        | 12,25    | 16 |
| Промежуток изменения стороны квадрата | 0,5<br>1 | 1<br>1,5 | 1,5<br>2 | 2<br>2,5 | 2,5<br>3 | 3<br>3,5 | 3,5<br>4 |    |
| Приращение площади квадрата           | 0,75     | 1,25     | 1,75     | 2,25     | 2,75     | 3,25     | 3,75     |    |

3.

|                    |     |    |    |    |     |     |     |     |     |     |     |     |    |
|--------------------|-----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| Время измерения    | 0   | 2  | 4  | 6  | 8   | 10  | 12  | 14  | 16  | 18  | 20  | 22  | 24 |
| Температура (в °C) | +10 | +9 | +7 | +7 | +10 | +14 | +20 | +22 | +22 | +19 | +16 | +11 | +9 |

## § 6

1. — 8; — 5; 2. 2. 10; 6; — 5; — 5.

## § 8

1. 5; — 6; — 1; 5. 2. 1; 39. 3. — 9; 25.

## § 9

1. 4. 2.—7.

## § 10

1.  $3 > -7$ ;  $-4 > -7$ ;  $0 < 5$ ;  $-6 < 3$ . 2. 1)  $a < x < b$ ; 2)  $a \leq x \leq b$ ;  
 3)  $0 < a < 1$ .

## § 11

1. Алгебраическая величина отрезка  $AB$  равна 5. Алгебраическая величина отрезка  $BA$  равна — 5. 2. — 7. 3. 10.

## § 12

1. — 15. 2. 35. 3. — 10. 4. 0. 5. 5. 6. — 28. 7. — 3. 8. — 7. 9. 100. 10. 0.

## § 14

1. 73; 89; 89; 73. 2. — 6; — 1,875; 0; 0,375; 0; — 0,375; 0; 1,875. 6. 3. Если  $n$  — четное число, то  $(-1)^n = 1$ . Если  $n$  — нечетное число, то  $(-1)^n = -1$ .

## § 15

1. 1. 2. 0.

3.

|                   |               |               |                |                |                  |                  |                |   |               |                 |                   |                |               |               |               |
|-------------------|---------------|---------------|----------------|----------------|------------------|------------------|----------------|---|---------------|-----------------|-------------------|----------------|---------------|---------------|---------------|
| $x$               | -3            | -2            | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{5}{4}$ | -1,1             | -0,9             | -0,5           | 0 | 0,5           | 0,9             | 1,1               | $\frac{5}{4}$  | $\frac{3}{2}$ | 2             | 3             |
| $\frac{x}{1-x^2}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{6}{5}$  | $\frac{20}{9}$ | $\frac{110}{21}$ | $-\frac{90}{19}$ | $-\frac{2}{3}$ | 0 | $\frac{2}{3}$ | $\frac{90}{19}$ | $-\frac{110}{21}$ | $\frac{20}{9}$ | $\frac{6}{5}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{8}$ |

## § 17

1. В 13 часов температура была  $4^\circ$ . В  $17\frac{1}{2}$  часов температура была  $2^\circ$ . В 2 часа температура была  $-5^\circ$ . 2. В 14 часов. В 8 часов и 22 часа. В 6 часов. Наибольшая температура была в 14 часов, наименьшая — в 2 часа.

3.

|                                  |        |        |        |        |        |
|----------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Высота                           | 1000 м | 2000 м | 3000 м | 4000 м | 5000 м |
| Температура ( $^\circ\text{C}$ ) | +10    | +5     | 0      | -10    | -15    |

## ГЛАВА III

## § 2

1. Целое. 2. Целое. 3. Целое. 4. Дробное. 5. Дробное. 6. Дробное. 7. Дробное.

## § 3

1.  $x^2 + 4xy - 2a^2$ . 2.  $0,83x^2 + 4,41ax - 0,77a^2$ . 3.  $5a^2$ .

## § 4.

1.  $-3x^2 + 3xy - 5y^2$ . 2.  $-5ab - 3a^2$ . 3.  $x^4 + x^2 + 1$ . 4.  $x = a^2 + 2ab - 2b^2$ .  
 5.  $x = 3ab - b^2 + a^2$ . 6.  $x = b^3 + 3ab^2 + 3a^2b$ .

## § 5

1.  $a^{19}$ . 2.  $a^{18}$ . 3.  $x^{15}$ . 4.  $c^{24}$ . 5.  $(a-b)^7$ . 6.  $(x^2 + y^2)^6$ . 7.  $x = b^5$ . 8.  $x = b^2$ .  
 9.  $x = b^4$ .

## § 6

1.  $35x^2y^2z$ . 2.  $\frac{2}{3}x^2y^2$ . 3.  $13a^4b^2c^2$ . 4.  $x = -63a^2bc$ . 5.  $x = -9bc$ . 6.  $x = 8a^2c$ .

## § 7

1.  $16a^{12}b^4c^4$ . 2.  $-a^5b^{10}c^5$ . 3.  $\frac{4}{9}x^2y^4$ . 4.  $0,0081a^{12}x^4y^8$ .

## § 8

1.  $x^2y - 6x^2$ . 2.  $-2a^2b + 2a^2b^2 - 4ab^2$ . 3.  $x = -3a^4b - 3ab^4$ . 4.  $x = a$ .  
 5.  $x = a$ . 6.  $3a^2 - 2b^2$ .



## § 9

1.  $2x^4 - x^2y + 3x^2y^2 + xy^2 + 4y^4$ . 2.  $4a^2 + 4ab + b^2 - c^2$ .  
 3.  $-\frac{56}{9}x^2 - \frac{81}{49}y^2$ . 4.  $x^4 + 2x^2y + 3x^2y^2 + 2xy^2 + y^4$ .

## § 10

1.  $2x^3 + 3x^2y - 4x^2z - 2xyz - 2xz^2 + 2y^2z - z^3y + 2x^2 + 4xy - 4xz - 4yz + 2z^2$ . 2.  $x^4 - 16y^4$ . 3.  $x^3 + y^3 + z^3 + 3x^2y + 3x^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^2y + 6xyz$ . 4.  $a^4 - a^2b - 7a^2b^2 + ab^2 + 6b^4$ .

## § 11

1.  $a^5 + a^4 + 2a^3 - 6a^2 - 3a + 5$ . 2.  $2a^5 + 3a^4 + a^3 + 9a^2 - 2a^3 - 18a + 5$ .  
 3.  $b^5 - 1$ . 4.  $x^3 + 7x^2 + 7x - 15$ . 5.  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ .

## § 12

1.  $9a^2b^2 - x^4$ . 2.  $x^4 - 1$ . 3.  $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$ . 4.  $a^4 - 7a^2b^2 + b^4$ . 5.  $27x^3 - 8y^3$ . 6.  $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ . 7.  $a^2 + 2ab + b^2$ . 8.  $x^4 + 4x^2 + 2x^2 - 4x + 1$ .  
 9.  $x = a - b$ . 10.  $x = 3a^2 + 2b$ . 11.  $x = 2p + 3q$ . 12.  $x = a^2 + 2ab + 4b^2$ .  
 13.  $x = 27p^2 + q^2$ .

## § 13

1.  $43 \cdot 37 = (40 + 3) \cdot (40 - 3) = 1600 - 9 = 1591$ . 2.  $42^2 = (40 + 2)^2 = 1600 + 160 + 4 = 1764$ . 3.  $96^2 = (95 + 1)^2 = 9025 + 190 + 1 = 9216$ .  
 4.  $-84 \cdot 96 = (90 - 6) \cdot (90 + 6) = 8100 - 36 = 8064$ . 5.  $\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 = a^2 + a + \frac{1}{4} = a(a + 1) + \frac{1}{4}$ . 6. 1,007. 7. 0,991. 8. 0,997.

## ГЛАВА IV

## § 2

1.  $7ab(ab + 2a^2 - 4b^2)$ . 2.  $x(x^2 + 3x + 1)$ . 3.  $(c + d)(a + b)$ .  
 4.  $(c - 3d)(a - b)$ . 5.  $15ax(x^2 - 3y^2) + 12ay(x^2 - 3y^2) = (x^2 - 3y^2)(15ax + 12ay) = 3a(5x + 4y) \cdot (x^2 - 3y^2)$ .

## § 3

1.  $b^3 - (2a + 3c)b^2 + 2a(2a + c)b - ac(a + c)$ . 2.  $y^4 - 2(x^2 + z^2)y^2 + (x^2 - z^2)^2$ .

## § 4

1.  $(4xy + 1)(x - y)$ . 2.  $(a - b)(2x + y - z)$ . 3.  $(a + 3)(a^2 + 1 - 2b)$ .  
 4.  $(a + 3)(a^2 + 1)$ .

## § 5

1.  $x^3 + ax - 2a^2 = x^3 + 2ax - ax - 2a^2 = x(x + 2a) - a(x + 2a) = (x + 2a)(x - a)$ . 2.  $x^3 + 3bx^2 - 4b^2x = x(x^2 + 3bx - 4b^2) = x(x^2 + 4bx - bx - 4b^2) = x[x(x + 4b) - b(x + 4b)] = x(x + 4b)(x - b)$ . 3.  $x^4 + 5x^2y^2 + 6y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + 3x^2y^2 + 6y^4 = x^2(x^2 + 2y^2) + 3y^2(x^2 + 2y^2) = (x^2 + 2y^2)(x^2 + 3y^2)$ .

## § 6

1.  $(x + 2y)(x - 2y)(x^2 + 4y^2)$ . 2.  $4xy(y + x)(y - x)$ . 3.  $a^2 + 6ab + 9b^2 - 4c^2 = (a + 3b)^2 - 4c^2 = (a + 3b + 2c)(a + 3b - 2c)$ . 4.  $8x^4 - 27a^2x = x(8x^3 - 27a^2) = x(2x - 3a)(4x^2 + 6ax + 9a^2)$ . 5.  $4xy - xyz^2 = xy(4 - z^2) = xy(2 + z)(2 - z)$ . 6.  $x^2 + 2x - y^2 - 2y = (x^2 - y^2) + (2x - 2y) = (x + y)(x - y) + 2(x - y) = (x - y)(x + y + 2)$ .

## § 7

$$\begin{aligned}
 1. \quad x^5 + x^4 - x^3 - 1 &= x^3(x^2 + 1) - (x^3 + 1) = (x^3 + 1)(x^2 - 1) = \\
 &= (x^3 + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1). \quad 2. \quad a^4 - 2a^3b - 8a^2b^2 - 6ab^3 - b^4 = (a^4 + a^3b) - \\
 &- (3a^3b + 3a^2b^2) - (5a^2b^2 + 5ab^3) - (ab^3 + b^4) = a^3(a + b) - 3a^2b(a + b) - \\
 &- 5ab^2(a + b) - b^4(a + b) = (a + b)(a^3 - 3a^2b - 5ab^2 - b^3) = (a + b)[(a^3 + \\
 &+ a^2b) - (4a^2b + 4ab^2) - (ab^2 + b^3)] = (a + b)[a^2(a + b) - 4ab(a + b) - \\
 &- b^2(a + b)] = (a + b)^3(a^2 - 4ab - b^2), \text{ или } a^4 - 2a^3b - 8a^2b^2 - 6ab^3 - b^4 = \\
 &= a^4 + 2a^3b - 4a^2b + a^2b^2 - 8a^2b^2 - a^2b^3 - 2ab^3 - 4ab^3 - b^4 = (a^4 + 2a^3b + a^2b^2) - \\
 &- (4a^2b + 8a^2b^2 + 4ab^3) - (a^2b^3 + 2ab^3 + b^4) = a^2(a^2 + 2ab + b^2) - \\
 &- (4ab(a + b + b^2) - b^2(a^2 + 2ab + b^2)) = (a + b)^2(a^2 - 4ab - b^2). \\
 3. \quad x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 3xyz &= (x^2y + xy^2 + xyz) + \\
 &+ (x^2z + xz^2 + xyz) + (y^2z + yz^2 + xyz) = xy(x + y + z) + xz(x + y + z) + \\
 &+ yz(x + y + z) = (x + y + z)(xy + xz + yz). \quad 4. \quad x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = \\
 &= (x^4 + x^3 + x^2) + (x^3 + x^2 + x) + (x^2 + x + 1) = x^2(x^2 + x + 1) + \\
 &+ x(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)^2. \quad 5. \quad x^5 - 1 = (x^5 - x^4) + \\
 &+ (x^4 - x^3) + (x^3 - x^2) + (x^2 - x) + (x - 1) = x^4(x - 1) + x^3(x - 1) + \\
 &+ x^2(x - 1) + x(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).
 \end{aligned}$$

## § 8

$$\begin{aligned}
 1. \quad x^2 + 6x + 5 &= x^2 + x + 5x + 5 = x(x + 1) + 5(x + 1) = (x + 1)(x + 5), \\
 \text{или } x^2 + 6x + 5 &= (x^2 + 6x + 9) - 4 = (x + 3)^2 - 4 = (x + 3 + 2)(x + 3 - 2) = \\
 &= (x + 5)(x + 1). \quad 2. \quad x^3 - 8x + 15 = x^3 - 3x - 5x + 15 = x(x - 3) - 5(x - 3) = \\
 &= (x - 3)(x - 5), \text{ или } x^3 - 8x + 15 = (x^3 - 8x + 16) - 1 = (x - 4)^3 - 1 = \\
 &= (x - 4 + 1)(x - 4 - 1) = (x - 3)(x - 5). \quad 3. \quad x^3 - 8x - 9 = x^3 - 9x + x - \\
 &- 9 = x(x - 9) + (x - 9) = (x - 9)(x + 1), \text{ или } x^3 - 8x - 9 = (x^3 - 8x + 16) - \\
 &- 25 = (x - 4)^3 - 25 = (x - 4 - 5)(x - 4 + 5) = (x - 9)(x + 1). \\
 4. \quad 4x^3 + 4x - 3 &= 4x^3 + 6x - 2x - 3 = 2x(2x + 3) - (2x + 3) = \\
 &= (2x + 3)(2x - 1), \text{ или } 4x^3 + 4x - 3 = (4x^3 + 4x + 1) - 4 = (2x + 1)^3 - 4 = \\
 &= (2x + 1 - 2)(2x + 1 + 2) = (2x - 1)(2x + 3). \quad 5. \quad 2x^3 - x - 3 = 2x^3 + 2x - \\
 &- 3x - 3 = 2x(x + 1) - 3(x + 1) = (x + 1)(2x - 3), \text{ или } 2x^3 - x - 3 = \\
 &= 2\left(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right) = 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{16}\right] = 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right] = \\
 &= 2\left[\left(x - \frac{1}{4}\right) - \frac{5}{4}\right]\left[\left(x - \frac{1}{4}\right) + \frac{5}{4}\right] = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x + 1) = (2x - 3)(x + 1). \\
 6. \quad x^3 - 2(a + b)x + (a^3 + 2ab - 3b^2) &= [x - (a + b)]^3 + (a^3 + 2ab - 3b^2) - \\
 &- (a + b)^3 = [x - (a + b)]^3 - 4b^2 = (x - a - b - 2b)(x - a - b + 2b) = \\
 &= (x - a - 3b)(x - a + b).
 \end{aligned}$$

## ГЛАВА V

## § 1

1. При  $x \neq 9$ . 2. При  $x \neq 8$ . 3. При  $x \neq 0$  и  $y \neq 0$ . 4. При  $x \neq -1$  и  $x \neq 1$ . 5. При  $b \neq 3$ ;  $a \neq 0$ . 6. При  $x \neq 0$ ;  $y \neq 0$ ;  $x \neq y$ .

## § 4

$$1. \quad a^4. \quad 2. \quad \frac{1}{c^3}. \quad 3. \quad 1. \quad 4. \quad x = a^7. \quad 5. \quad x = \frac{1}{a^4}. \quad 6. \quad x = a^2.$$

## § 5

$$1. \quad -\frac{3}{4}a^2c. \quad 2. \quad \frac{21}{20}xz. \quad 3. \quad -10ac. \quad 4. \quad 7by^4. \quad 5. \quad \frac{4}{3}a^2pq. \quad 6. \quad \frac{\frac{2}{5}a^3bc}{\frac{1}{3}ab^2c} = \frac{6a^2}{5b}.$$

$$7. \quad \frac{7ab^2c}{5a^2b^3c^3} = \frac{7}{5a^2bc^3}. \quad 8. \quad \frac{25a^4x^{12}y}{7a^2xy^2} = \frac{25ax^{11}}{7y}.$$

## § 6

$$1. -30x^2 + y - 73x. \quad 2. x + y + z. \quad 3. \frac{a^2 + ab - 3b^2}{2}. \quad 4. \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

$$5. x^2 y^2 z^2 \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right).$$

## § 7

$$1. x^2 - 4y^2. \quad 2. x^2 + 2xy + y^2. \quad 3. a + b + c + d. \quad 4. x^2 + 3. \quad 5. x = a - 2b.$$

$$6. x = a - 3b. \quad 7. x = a - b + c.$$

## § 8

1. Делимое первой степени относительно  $b$ , а делитель второй степени относительно этой же буквы.

2. При  $x = 2$  делитель обращается в нуль, а делимое при  $x = 2$  равно 7, т. е. в нуль не обращается.

3. При  $a = 1$ ;  $b = -1$  делитель обращается в нуль, а делимое при этих же значениях букв равно 2, т. е. в нуль не обращается.

## § 9

$$1. x^2 - 2x - 1. \quad 2. x^4 + x^3 + x^2 + x + 1. \quad 3. a^2 + ac + b. \quad 4. a^2 - 3a + 2 + \frac{a-1}{a^2+a+1}.$$

$$5. a^2 + a + 1 + \frac{5}{a-2}.$$

## § 10

$$1. \frac{xy}{x-y}. \quad 2. \frac{x+2}{x-3}. \quad 3. \frac{a^2+2a+1}{a-1}. \quad 4. \frac{3}{8}.$$

## § 11

$$1. \frac{2(5x+3y-2z)}{15x^2+3y^2-25z^2}. \quad 2. \frac{2(a^2-3ab+4b^2)}{a^2+3ab+5b^2}.$$

## § 12

$$1. \frac{a^2+a+1}{a^2}. \quad 2. \frac{2}{a(a+2)}. \quad 3. -\frac{2(x+1)}{(x-1)^2}. \quad 4. \frac{x^2-11x^2+4}{x(x^2-4)}. \quad 5. \frac{x^2+1}{x}.$$

$$6. -\frac{4}{x}.$$

## § 13

$$1. \frac{x+1}{x}. \quad 2. \frac{(a+b)^2(a-b)}{2ab}. \quad 3. \frac{x+3}{x}. \quad 4. \frac{2x(x^2+x+1)}{x+1}.$$

## § 14

$$1. (x-1)^2. \quad 2. \frac{(a-b)(a-3b)}{(a+b)^2}. \quad 3. \frac{x(x+1)}{x-1}. \quad 4. \frac{x^2-3ax-a^2}{x^2-a^2}.$$

## § 15

$$1. x. \quad 2. \frac{2}{(x+2)(5x^2-4x-4)}.$$

## ГЛАВА VI

## § 6

1.  $\frac{4x+4}{6} = \frac{8}{2}; x=5$ . 2. Доказательство. Пусть  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = q$ , тогда  $\frac{a_1^2}{b_1^2} = q^2, \frac{a_2^2}{b_2^2} = q^2, \frac{a_3^2}{b_3^2} = q^2$ , т. е.  $\frac{a_1^2}{b_1^2} = \frac{a_2^2}{b_2^2} = \frac{a_3^2}{b_3^2}$ .

## § 7

1. 

|     |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|
| $h$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $Q$ | 0 | 2 | 4 | 6 |

2. Нет. 3. Нет. 4. Да. 5. Да. 6. Да. 7. Нет. 8. Да.

## ГЛАВА VIII

## § 1

1. Решение.  $x+y=75, \quad \left. \begin{array}{l} x+y=75, \\ x-y=5, \end{array} \right\} x=40; y=35$ . Проверка.  $40+35=75; 40-35=5$ .

## § 2

1. Задача. В 7а и 7б классах школы 75 учеников. Сколько учеников в каждом классе? Уравнение.  $x+y=75$ . Таблица некоторых решений:

|     |    |    |    |    |    |
|-----|----|----|----|----|----|
| $x$ | 30 | 35 | 38 | 41 | 42 |
| $y$ | 45 | 40 | 37 | 34 | 33 |

2. Задача. В 7а классе на 5 учеников больше, чем в 7б классе. Сколько учеников в каждом классе? Уравнение.  $x-y=5$ . Таблица некоторых решений:

|     |    |    |    |    |    |
|-----|----|----|----|----|----|
| $x$ | 30 | 35 | 38 | 40 | 41 |
| $y$ | 25 | 30 | 33 | 35 | 36 |

## § 4

1. Прямые пересекаются:  $x=2; y=1$ . 2. Прямые совпадают. Решений бесконечное множество. Например,  $x=2; y=1; x=5; y=0$  и т. д. 3. Прямые параллельны. Решений нет.

## § 5

1. Решение.  $x=75-y, \quad \left. \begin{array}{l} x=75-y, \\ x=5+y, \end{array} \right\} 75-y=5+y; y=35; x=5+y=40$ .

## § 7

1. Решение. Сложим оба уравнения, получим  $2x=80; x=40$ . Подставим полученное значение  $x=40$  в первое уравнение:  $40+y=75; y=35$ . 2. Решение. Умножим почленно первое уравнение на 3. Получим систему

$$\left. \begin{array}{l} 15x - 6y = 9, \\ x + 6y = 11. \end{array} \right\}$$

Сложим почленно уравнения. Получим  $16x = 20$ ;  $x = \frac{5}{4}$ ;  $\frac{5}{4} + 6y = 11$ ;  
 $y = \frac{13}{8}$ .

## § 8

1. Решение. Из второго уравнения имеем  $x = y + 15$ . Подставим в первое уравнение вместо  $x$  полученное для него выражение. Получим  $(y + 15) + y = 75$ ;  $2y = 60$ ;  $y = 30$ ;  $x + 30 = 75$ ;  $x = 45$ .

## ГЛАВА IX

## § 1

1. 2. 2. 3. 3.  $-\frac{1}{2}$ . 4.  $\frac{1}{2}$ . 5. 0,1. 6. 2. 7.  $-2$ . 8. 0,1. 9.  $\frac{3}{5}$ .

## § 2

1. 1;  $\frac{3}{2}$ ; 2;  $\frac{5}{2}$ .

2.

|     |    |    |    |    |    |                |   |               |   |   |   |   |    |
|-----|----|----|----|----|----|----------------|---|---------------|---|---|---|---|----|
| $x$ | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  |
| $y$ | 10 | 8  | 6  | 4  | 2  | 2              | 2 | 2             | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |

## § 3

1.  $2,68 < \sqrt{7,2} < 2,69$ .

## § 5

1.  $8,1 < \sqrt{67,13} < 8,2$ . 2.  $6,4 < \sqrt{41} < 6,5$ . 3.  $\sqrt{46,24} = 6,8$ .

4.  $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ .

## § 6

1.  $8,52 < \sqrt{72,6115} < 8,53$ . 2.  $3,76 < \sqrt{14,17} < 3,77$ . 3.  $3,16 < \sqrt{10} < 3,17$ .

## ЧАСТЬ II

## ГЛАВА I

## § 1

1.  $a^3b^7$ . 2.  $a^{m^3-n^3}$ . 3.  $a^{14}$ .

## § 2

1.  $x^6 + 4x^5 - 2x^4 - 20x^3 - 7x^2 + 24x + 16$ . 2.  $a^{3m} + 2a^m + 3 + \frac{2}{a^m} + \frac{1}{a^{2m}}$ . 3.  $\frac{a^4}{b^4} - \frac{2a^2}{b^2} - \frac{2a}{b} + 1 + \frac{2b}{a} + \frac{b^2}{a^2}$ .

## § 3

1. 64; -243. 2. 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100; 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000. Числа второго ряда растут быстрее. 3. При  $x > 10$ ; при  $x > 1000$ .

## § 4

1. 5. 2. 11. 3.  $a - 2$  при  $a \geq 2$ ;  $2 - a$  при  $a < 2$ .

## § 16

$$1. \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{6}} = \sqrt[80]{2^{15} \cdot 3^{10} \cdot \frac{1}{2^6 \cdot 3^6}} = \sqrt[80]{2^9 \cdot 3^4} \cdot 2. \frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{8}} = \\ = \sqrt[6]{\frac{2^8}{2^6}} = \sqrt[6]{\frac{1}{2}} \cdot 3. \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{2}} = \sqrt[4]{\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^3 \cdot 2^3}} = \sqrt[4]{\frac{2}{3}}.$$

## § 17

1. 4. 2.  $\sqrt[5]{25}$ . 3.  $\sqrt{5}$ .

## § 18

1.  $\sqrt{12}$ . 2.  $\sqrt[3]{9}$ . 3.  $\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ . 4.  $\frac{\sqrt{10}}{4}$ . 5.  $\frac{\sqrt[3]{21}}{3}$ . 6.  $\frac{\sqrt{xyz}}{yz}$ .

## § 19

1.  $\frac{(a+b)\sqrt{ab}}{ab}$ . 2.  $9\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}$ . 3.  $x^3 + x + a^3 + a + 2(1+ax)\sqrt{ax}$ .  
4.  $\frac{35\sqrt{6}}{6}$ .

## § 20

1.  $\sqrt{a^3}$ . 2.  $\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$ . 3.  $3 - 2\sqrt{2}$ . 4.  $(a^2 + ax + x^2)(\sqrt{a} + \sqrt{x})$ .  
5.  $\frac{12\sqrt{6} - 14\sqrt{3} - 15\sqrt{2} + 29}{23}$ .

## ГЛАВА II

## § 1

1.  $x - 1 = 0$  — уравнение первой степени. 2.  $x^2 - 2x + 1 = 0$  — уравнение второй степени. 3.  $x^3 - x + 2 = 0$  — уравнение третьей степени.

## § 3

1.  $-5$ ; 9. 2. 9 — двойной корень. 3. Не имеет корней. 4.  $-3$ ; 5. 5.  $-2$ ; 4.

## § 4

1.  $-\frac{3}{5}$ ; 2.  $\frac{-3 \pm \sqrt{29}}{10}$ . 3. 1;  $\frac{b-5a}{a+b}$ . 4. 2;  $-\frac{23}{6}$ .  
5.  $1,998 < x_1 < 1,999$ ;  $-3001,999 < x_2 < -3001,998$ .

## § 6

$$1. x_1 = 3; x_2 = 5; x_1 + x_2 = 8; x_1 x_2 = 15. 2. x_1 = 2; x_2 = \frac{1}{2}; x_1 + x_2 = \frac{5}{2}; x_1 x_2 = 1. 3. x_1 = \frac{3 + \sqrt{37}}{2}; x_2 = \frac{3 - \sqrt{37}}{2}; x_1 + x_2 = 3; x_1 x_2 = -7.$$

## § 7

$$1. x_1 = 1, x_2 = -9; x^2 + 8x - 9 = (x - 1)(x + 9). 2. x_1 = 3; x_2 = \frac{1}{3}; 3x^2 - 10x + 3 = 3(x - 3)(x - \frac{1}{3}). 3. x_1 = -1 + \sqrt{6}; x_2 = -1 - \sqrt{6}; x^2 + 2x - 5 = (x + 1 - \sqrt{6})(x + 1 + \sqrt{6}).$$

## § 8

$$1. x^2 - 2x - 3 = 0. 2. x^2 - x - \frac{1}{2} = 0. 3. x^2 - \frac{8}{3}x - 1 = 0.$$

## § 9

$$1. x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 9^2 + 2 \cdot 11 = 103; x_1^2 x_2^2 = (x_1 x_2)^2 = 121; \text{искомое уравнение: } x^2 - 103x + 121 = 0. 2. (3x_1 - x_2) + (3x_2 - x_1) = 2(x_1 + x_2) = -22; (3x_1 - x_2)(3x_2 - x_1) = -3(x_1^2 + x_2^2) + 10x_1 x_2 = -507; \text{искомое уравнение: } x^2 + 22x - 507 = 0. 3. x_1 = 11; y_1 = -7; x_2 = -7; y_2 = 11. 4. x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}; y_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}; x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}; y_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}. 5. x_1 = 6; y_1 = \frac{5}{2}; x_2 = 5; y_2 = 3.$$

## § 10

1. Два корня: один положительный, другой отрицательный. Большую абсолютную величину имеет положительный корень. 2. Действительных корней нет. 3. Два равных отрицательных корня. 4. Дискриминант равен  $4(a+3)$ . Если  $a+3 < 0$ , то действительных корней нет. Если  $a+3 = 0$ , то уравнение имеет два действительных равных корня. В этом случае уравнение принимает вид  $x^2 + 12x + 36 = 0$  и  $x_1 = x_2 = -6$ . Если  $a+3 > 0$ , то уравнение имеет два действительных различных корня.

## § 11

1.  $\pm 1$ ;  $\pm 2$ . 2.  $\pm \sqrt{5 + \sqrt{24}}$ ;  $\pm \sqrt{5 - \sqrt{24}}$ . 3.  $\pm 2$ . 4. Действительных корней нет. 5. Действительных корней нет.

## § 12

1. 1. 2.  $-2$ ; 3. 3. 1;  $-3$ . Указание. Ввести новое неизвестное  $y = x^2 + 2x$ . 4. 2;  $-6$ . Указание. Раскрыть скобки и ввести новое неизвестное  $y = x^2 + 4x$ .

## § 13

$$1. 3 \pm 2\sqrt{2}; 2 \pm \sqrt{3}. 2. \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{18 + 6\sqrt{5}}; \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{18 - 6\sqrt{5}}. 3. -1; -7; 3 \pm \sqrt{2}. 4. Действительных корней нет. 5.  $\frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}; \frac{1}{2}; -3.$$$

## § 14

1.  $\pm \sqrt{5 + \sqrt{24}}$ ;  $\pm \sqrt{5 - \sqrt{24}}$  (по одному способу);  $\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$ ;  
 $-\sqrt{3} \pm \sqrt{2}$  (по другому способу);  $\sqrt{5 + \sqrt{24}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ;  
 $\sqrt{5 - \sqrt{24}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ;  $-\sqrt{5 + \sqrt{24}} = -\sqrt{3} - \sqrt{2}$ ;  $-\sqrt{5 - \sqrt{24}} =$   
 $= -\sqrt{3} + \sqrt{2}$ . 2.  $\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{14}}{2}$ . 3.  $\sqrt{2} - 1$ .

## § 16

1.  $\frac{9}{2}$ ;  $-\frac{11}{2}$ . 2. Решений нет. 3.  $-\frac{3}{2}$ . 4. Решений нет.

## § 17

1. 2. 2.  $\frac{41}{12}$ . 3. 1. 4. 2;  $-6$ . Указание. Ввести новое неизвестное  $y^2 =$   
 $= x - 2$ . 5. 7.

## ГЛАВА III

## § 3

1. Ветвь гиперболы; рис. 108. 2. Парабола; рис. 109. 3. Две полуветви гиперболы; рис. 110. 4. Парабола; рис. 111. 5. Биссектрисы первого и второго координатных углов; рис. 112. 6. Две бесконечные ветви; рис. 113. 7. Два симметричных отношения оси  $Ox$  лепестка; рис. 114. Указание. Биквадратное уравнение решить относительно  $y$  в общем виде (т. е. выразить  $y$  через  $x$ ) способом, описанным в § 14 гл. II. 8. Три одинаковых лепестка, совмещающихся при повороте на  $120$  и  $240^\circ$ ; рис. 115. Указание. Решить биквадратное уравнение относительно  $y$  в общем виде, применив обычный способ.

## § 5

1. Рис. 116. 2. Рис. 117. 3. Рис. 118. 4. Рис. 119. 5. Рис. 120. 6. Рис. 121. 7. Рис. 122. 8. Рис. 123.

## § 6

1. Рис. 124. 2. Рис. 125. 3. Рис. 126. 4. Рис. 127. 5. Рис. 128.

## § 7

1. Рис. 129. 2. Рис. 130. 3. Рис. 131. 4. Рис. 132. 5. Рис. 133.

## ГЛАВА IV

## § 1

1.  $x_1 = 2$ ;  $y_1 = 3$ ;  $x_2 = -2$ ;  $y_2 = 5$ . 2.  $x_1 = 14$ ;  $y_1 = -24$ ;  $x_2 = 1$ ;  $y_2 = 2$ .  
 3.  $x_1 = 2$ ;  $y_1 = 0$ ;  $x_2 = -\frac{6}{5}$ ;  $y_2 = -\frac{8}{5}$ .



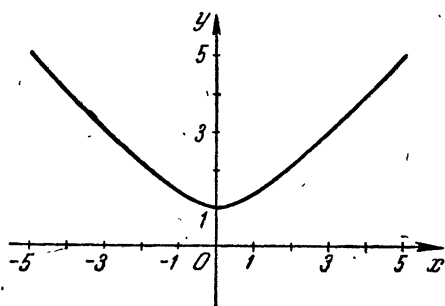


Рис. 108.

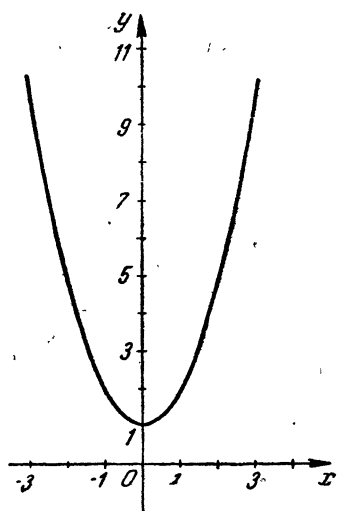


Рис. 109.

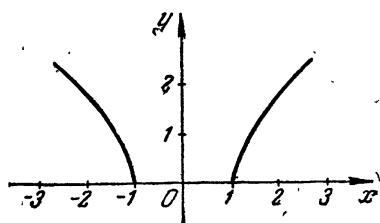


Рис. 110.

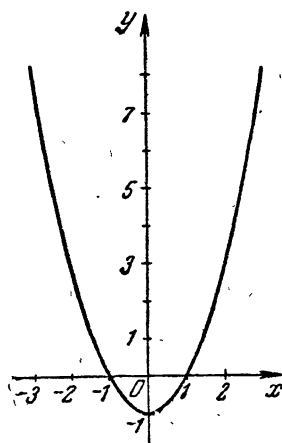


Рис. 111.

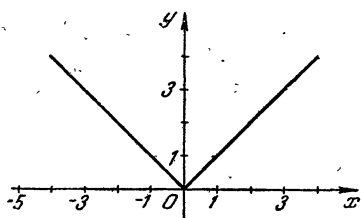


Рис. 112.

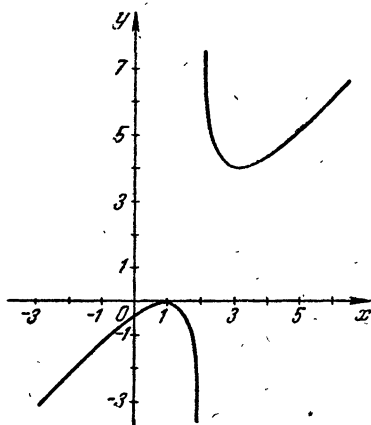


Рис. 113.

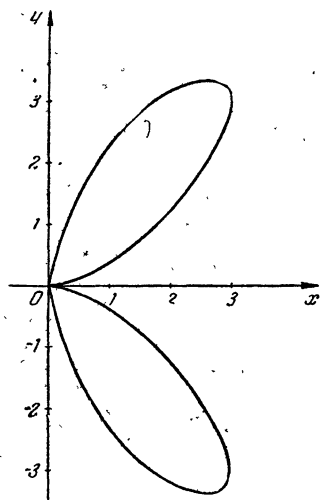


Рис. 114.

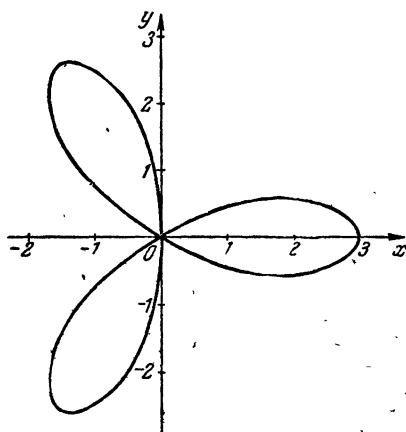


Рис. 115.

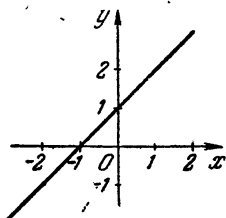


Рис. 116.

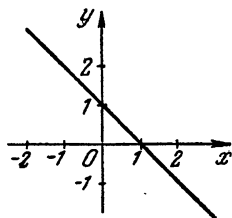


Рис. 117.

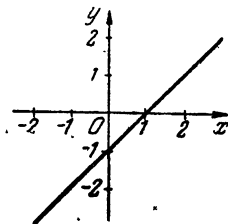


Рис. 118.

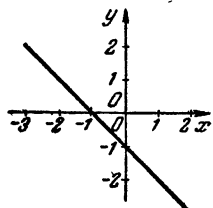


Рис. 119.

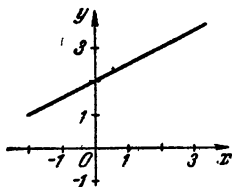


Рис. 120.

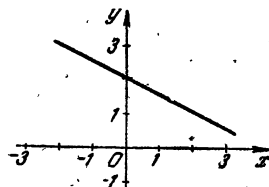


Рис. 121.

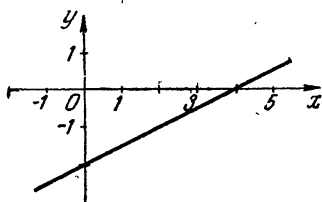


Рис. 122.

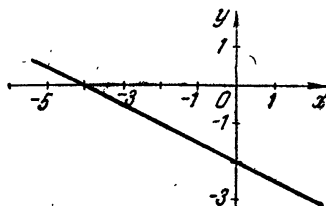


Рис. 123.

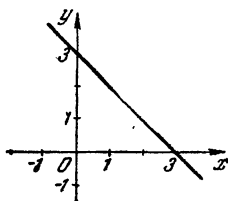


Рис. 124.

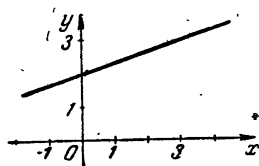


Рис. 125.

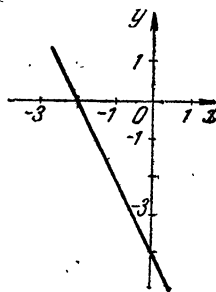


Рис. 126.

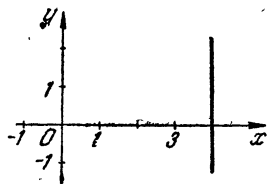


Рис. 127.

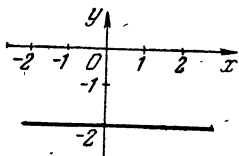


Рис. 128.

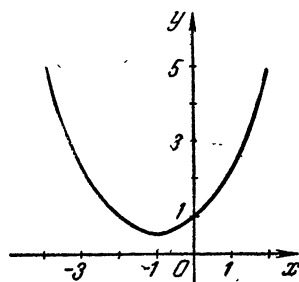


Рис. 129.

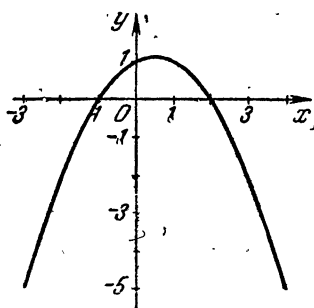


Рис. 130.

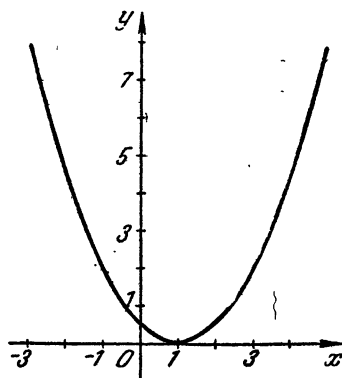


Рис. 131.

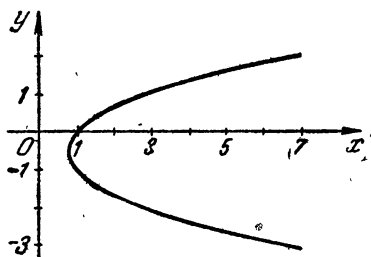


Рис. 132.

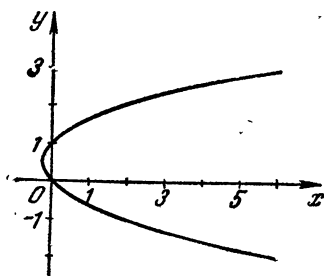


Рис. 133.

## § 2.

1.  $x_1 = \frac{5}{2}$ ;  $y_1 = \frac{1}{2}$ ;  $x_2 = -\frac{1}{2}$ ;  $y_2 = -\frac{5}{2}$ ; 2.  $x = \frac{21}{8}$ ;  $y = \frac{5}{8}$ .  
 3.  $x_1 = 3$ ;  $y_1 = 4$ ;  $x_2 = 4$ ;  $y_2 = 3$ ;  $x_3 = -3$ ;  $y_3 = -4$ ;  $x_4 = -4$ ;  $y_4 = -3$ .

## § 3

1.  $x_1 = 4$ ;  $y_1 = 3$ ;  $x_2 = -4$ ;  $y_2 = -3$ ;  $x_3 = -\frac{11\sqrt{3}}{3}$ ;  $y_3 = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ ;  
 $x_4 = \frac{11\sqrt{3}}{3}$ ;  $y_4 = -\frac{10\sqrt{3}}{3}$ . 2.  $x_1 = 3$ ;  $y_1 = 1$ ;  $x_2 = -3$ ;  $y_2 = -1$ ;  
 $x_3 = -\frac{2\sqrt{6}}{3}$ ;  $y_3 = \frac{5\sqrt{6}}{6}$ ;  $x_4 = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ ;  $y_4 = -\frac{5\sqrt{6}}{6}$ .

## § 4

1.  $x_1 = 1$ ;  $y_1 = 2$ ;  $z_1 = 3$ ;  $x_2 = -1$ ;  $y_2 = -2$ ;  $z_2 = -3$ . 2.  $x_1 = 3$ ;  $y_1 = 2$ ;  
 $x_2 = -2$ ;  $y_2 = -3$ . 3.  $x_1 = 2$ ;  $y_1 = 3$ ;  $z_1 = 4$ ;  $x_2 = -4$ ;  $y_2 = -5$ ;  $z_2 = -6$ .  
 Указание.  $xy + x + y = 11$  представить в виде  $(x+1)(y+1) = 12$  и т. д.  
 4.  $x_1 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ ;  $y_1 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ ;  $x_2 = \frac{7-3\sqrt{5}}{2}$ ;  
 $y_2 = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ . 5.  $x_1 = \frac{\sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}}{2}$ ;  $y_1 = \frac{\sqrt[3]{a+b} - \sqrt[3]{a-b}}{2}$ .

## § 5

1.  $-2,2144 < x_1 < -2,2143$ ;  $0,5391 < x_2 < 0,5392$ ;  $1,675 < x_3 < 1,6751$ .  
 2.  $0,6823 < x_1 < 0,6824$ . 3.  $-0,7422 < x_1 < -0,7421$ ;  $-0,395 < x_2 < -0,3949$ ;  
 $1,1371 < x_3 < 1,1372$ .

## § 6

1.  $-1,79 < x_1 < -1,78$ ,  $-2,19 < y_1 < -2,18$ ;  $1,49 < x_2 < 1,5$ ,  $-1,23 < y_2 < -1,22$ .  
 2.  $-1,3 < x_1 < -1,2$ ,  $2,7 < y_1 < 2,8$ ;  $2 < x_2 < 2,1$ ,  $2,1 < y_2 < 2,2$ .  
 3.  $x_1 = -1$ ;  $1,6 < x_2 < 1,7$ ;  $-0,7 < x_3 < -0,6$ . 4.  $-0,88 < x_1 < -0,87$ ;  $1,12 < x_2 < 1,13$ .

## § 7

1.  $-2,115 < x_1 < -2,1149$ ;  $0,2541 < x_2 < 0,2542$ ;  $1,8608 < x_3 < 1,8609$ .  
 2.  $-1,27 < x_1 < -1,26$ ,  $2,72 < y_1 < 2,73$ ;  $x_2 = 0$ ,  $y_2 = -3$ ;  $1,09 < x_3 < 1,1$ ,  
 $-2,8 < y_3 < -2,79$ ;  $2,16 < x_4 < 2,17$ ,  $2,07 < y_4 < 2,08$ .

## ГЛАВА V

## § 1

1. 1, 1, 1, ... 2. 1, 3, 5, 7, ... 3.  $-\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{9}$ ,  $-\frac{1}{27}$ ,  $\frac{1}{81}$ , ... 4. 2, -4, 8, -16, ...  
 5. Решение. Доказательство проводится методом математической индукции (см. гл. I, § 3). При  $n=1$ , т. е. для первого члена последовательности, утверждение справедливо, так как по условию  $u_1 = 1$  и по формуле  $u_n = 2^n - 1$  имеем  $u_1 = 2 - 1 = 1$ . Допустим, что утверждение справедливо для члена последовательности, номер которого  $k$ , где  $k$  — какое-нибудь натуральное число, т. е.  $u_k = 2^k - 1$ . Докажем, что тогда утверждение справедливо и для члена, номер которого  $k+1$ , т. е. что  $u_{k+1} = 2^{k+1} - 1$ . Действительно,  $u_{k+1} = 2u_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$ . Утверждение доказано.

## § 2

1. Указание. В равенстве  $(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$  положить  $a$  последовательно равным 1, 2, ...,  $n$ . Дальше поступать так же, как и при вычислении суммы квадратов.

## § 3

1. Указание. Воспользоваться методом, примененным в последнем примере этого параграфа.

## § 5

1. Предела нет. 2. Предела нет. 3. Предел равен 2;  $N=1, 10, 30, 100, 1000$ . 4. Предел равен 4; при любом  $\varepsilon$  можно принять  $N=1$ . 5. Предела нет. 6. Предел равен  $\sqrt{2}$ ;  $N=1, 1, 2, 2, 3$ .

## ГЛАВА VIII

## § 3

2. 90.

## § 7

1.  $C_n^k + 1$ . Указание.  $1 + (1+x) + \dots + (1+x)^n = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{x}$ .

## ГЛАВА IX

## § 3

1.  $(a+bi) + (a-bi) = 2a$ ;  $(a+bi) \cdot (a-bi) = a^2 + b^2$ .

## § 4

1. Указание. Подставить в уравнение вместо  $x$  числа  $-1+3i$  и  $-1-3i$ .

## § 10

1. Если  $n$  делится на 4, то  $n=4k$ , где  $k$  — натуральное число. Тогда  $i^n = i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$ .

2. Если  $n$  при делении на 4 дает в остатке 1, то  $n=4k+1$ , где  $k$  — натуральное число. Тогда  $i^n = i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = 1 \cdot i = i$ .

7. Допустим, что квадратный корень из числа  $a+bi$  существует и равен  $u=x+yi$ . Тогда  $(x+yi)^2 = a+bi$ , откуда

$$\left. \begin{aligned} x^2 - y^2 &= a, \\ 2xy &= b. \end{aligned} \right\}$$

Возведем каждое уравнение в квадрат и сложим, получим  $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = a^2 + b^2$ , откуда  $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Корень квадратный взят с положительным знаком, так как левая часть равенства не может быть отрицательной. Теперь имеем

$$\left. \begin{aligned} x^2 - y^2 &= a, \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned} \right\}$$

Отсюда

$$x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}},$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}.$$

Так как  $2xy = b$ , то  $x$  и  $y$  должны быть одного знака, если  $b > 0$ , и разных знаков, если  $b < 0$ .

Итак, если квадратный корень из  $a + bi$  существует, то он равен

$$u_{1,2} = \pm \left( \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \epsilon i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \right),$$

где  $\epsilon = 1$ , если  $b > 0$ , и  $\epsilon = -1$ , если  $b < 0$ , т. е. квадратный корень из  $a + bi$  может иметь не более двух значений.

Остается доказать, что каждое из полученных значений действительно является квадратным корнем из  $a + bi$ . Для этого достаточно числа  $u_1$  и  $u_2$  возвести в квадрат и убедиться, что в результате получится  $a + bi$ .

## ГЛАВА XI

### § 4

1.  $x_1 = 1 + i$ ;  $x_2 = 1 - i$ ;  $x_3 = -1 + i$ ;  $x_4 = -1 - i$ . 2.  $x^2 - 3x + 2 = 0$  при  $x = 1$  и при  $x = 2$ . Если заданный многочлен делится на  $x^2 - 3x + 2$  без остатка, то  $x = 1$  и  $x = 2$  являются его корнями, т. е.  $1 - 3 + 3 + a + b = 0$  и  $16 - 24 + 12 + 2a + b = 0$ . Поэтому  $a + b = -1$ ;  $2a + b = -4$ , т. е.  $a = -3$ ;  $b = 2$ .

### § 5

1.  $\lambda = -2$ .

## ДОПОЛНЕНИЕ

### I

1. г) Неверно. Например,  $3 \cdot 4$  делится на 6, но ни 3, ни 4 на 6 не делится. ж) Неверно. Например, 4 делится на 2 и нулем не оканчивается.

к) Неверно. Например, сумма  $3 + 5$  — четное число, но 3 и 5 нечетные числа.

3. Если сумма произведений есть число четное, то  $B$  взял четное число. Если сумма произведений — нечетное число, то  $B$  взял нечетное число.

7. Указание. Утверждение достаточно проверить для 8, 9 и 10 руб., так как всякое большее число рублей можно получить, присоединив к 8, 9 и 10 руб. несколько билетов достоинством в 3 рубля.

9. Указание. При первом взвешивании положить на каждую чашку по три монеты.

10. Указание. Учесть, что количество жидкости в каждой бочке не изменилось.

11. Краткое решение. Человек, определивший цвет своей бумажки, рассуждал так: «если бы у меня была черная бумажка, мои противники легко догадались бы, что у них белые. Однако они молчат, значит, у меня белая».

### II

1. Решение. Это утверждение несправедливо. Так, например, при  $a = \frac{1}{5}$   $2a = \frac{2}{5}$ , т. е. дробное, а не целое.

Этим примером мы опровергли утверждение мальчика, т. е. доказали, что утверждение несправедливо.

2. Решение. Это утверждение справедливо. Действительно, если  $a$  целое, то  $2a$  тоже целое, так как произведение двух целых чисел всегда целое. Если же  $a$  — дробь со знаменателем 2,  $2a$  все равно целое, так как знаменатель дроби сократится с коэффициентом 2.

3. Решение. Это утверждение справедливо. Если число делится на 12, то оно делится и на 6.

4. Решение. Это утверждение несправедливо. Число 18, например, на 6 делится, а на 12 не делится.

5. в) Верно, так как произведение целых чисел делится на 3, если хоть один из сомножителей делится на 3. ж) Неверно. Например,  $a = \frac{1}{2}$ ;  $b = \frac{1}{3}$ .

### III

1. 1. 2. а) Неверно. Например,  $8^2 = 512$ .

6. Числа  $n-2$ ;  $n-1$ ;  $n$  — это три последовательных числа. Среди них есть хоть одно четное и одно кратное 3.

7. Указание. Найти последнюю цифру.

### VIII

3. Неверно. Например,  $a = -2$ ,  $b = 2$ .

21. Допустим противное, т. е. допустим, что  $a \geq 0$ . Тогда  $5 + a > 0$ , что противоречит условию и, значит, невозможно.

### IX

1. 0. Указание. Привести подобные члены в числителе.

2.  $(a-1) + a + (a+1) = 3a$ . 4. Указание.  $(x+1)(x-1) + 2 = x^2 + 1$ .

6. Решение. Пусть  $n$  — нечетное число. Тогда  $(n+2)^2 - n^2 = 4(n+1)$  делится на 8.

### X

1.  $a^2 - a = a(a-1)$ . 2. Дано двузначное число  $10a + b$ , где  $a + b < 10$ . Имеем  $(10a + b) \cdot 11 = (10a + b)(10 + 1) = 100a + 10(a + b) + b$ . 3. Указание.  $abc + ab + ca + bc = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ . 7.  $a(a+1) + (a+1) =$

$= (a+1)^2$ . 8.  $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$ . 9.  $2(a^2 + b^2) = (a+b)^2 + (a-b)^2$ . 10.  $(10+1)^3 = 1000 + 300 + 30 + 1$ .

11. Рассмотрим разность  $a^3 + b^3 + c^3 - (a+b+c) = a(a-1)(a+1) + b(b-1)(b+1) + c(c-1)(c+1)$ . Каждое слагаемое в правой части равно делится на 6. Поэтому разность делится на 6. Если разность и вычитаемое делится на 6, то и уменьшаемое делится на 6.

12.  $(a-1)^2 + a^2 + (a+1)^2 = 3a(a^2 + 2)$ . Возможны два случая: 1)  $a$  делится на 3; 2)  $a$  не делится на 3. Если имеет место первый случай, то  $3a(a^2 + 2)$  делится на 9. Если имеет место второй случай, то  $a = 3k + 1$  или  $a = 3k - 1$ , где  $k$  — целое число; тогда  $a^2 + 2$  делится на 3, значит, и в этом случае  $3a(a^2 + 2)$  делится на 9.

### XI

1. Указание. Преобразовать к виду  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ . 2. При  $a = 12$ .

3. Указание. Сложить дроби.

4.  $\frac{16}{1-x^{16}}$ . Указание. К первому слагаемому прибавить второе; к полученной сумме прибавить третье слагаемое, затем четвертое и т. д.



5. Указание. Преобразовать к виду  $\frac{m(m+1)(m+2)}{2}$ . 6.  $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = \frac{99}{100}$ .

## XII

1. Решение. Допустим, что  $x^2 < x$ . Значит,  $x^2 - x < 0$  или  $x(x-1) < 0$ . Значит,  $x$  не может быть отрицательным числом, так как тогда  $x-1$  тоже отрицательно и  $x(x-1) > 0$ . Точно так же  $x$  не может равняться нулю, так как тогда  $x(x-1) = 0$ . Следовательно,  $x > 0$ , а  $x-1 < 0$ . Таким образом, если  $x^2 < x$ , то  $0 < x < 1$ .

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть  $0 < x < 1$ , тогда  $x(x-1) < 0$ ;  $x^2 - x < 0$ ;  $x^2 < x$ .

2. Допустим, что уравнения имеют общий корень  $x_0$ . Тогда справедливы тождества  $x_0^3 + ax_0 - 2a = 0$ ;  $x_0^3 - 2ax_0 + a = 0$ . Вычтем из первого тождества почленно второе тождество. Получим тождество  $3ax_0 - 3a = 0$  или  $3a(x_0 - 1) = 0$ . Значит, либо  $a = 0$ , либо  $x_0 = 1$ . Если  $x_0 = 1$ , то указанные тождества дают  $a = 1$ . Таким образом, если уравнения имеют общий корень, то  $a = 0$  или  $a = 1$ .

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть  $a = 0$ . Тогда каждое из уравнений имеет вид  $x^3 = 0$  и  $x = 0$  будет общим их корнем. Пусть  $a = 1$ . Тогда уравнения принимают такой вид:  $x^3 + x - 2 = 0$ ;  $x^3 - 2x + 1 = 0$ . Подстановкой в эти уравнения 1 вместо  $x$  легко убедиться, что  $x = 1$  есть общий корень этих уравнений. Таким образом,  $a = 0$  или  $a = 1$ .

## XIII

1. Доказательство. Пусть  $p$  — простое нечетное число. Допустим, что  $p = x^2 - y^2$ , откуда  $p = (x-y)(x+y)$ . Так как  $p$  — простое число, то

$$\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=p. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений находим  $x = \frac{p+1}{2}$ ;  $y = \frac{p-1}{2}$ . Следовательно, если простое нечетное число  $p$  может быть представлено в виде разности квадратов натуральных чисел  $x^2 - y^2$ , то  $x = \frac{p+1}{2}$ ;  $y = \frac{p-1}{2}$ . Это значит, что, если требуемое представление возможно, то оно может быть выполнено только одним способом. Остается доказать, что

$$\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = p.$$

Это сделать легко.

2. Решение. Если  $a \neq 2$ , то  $x = 1$ ;  $y = \frac{4}{7}a$ . Если  $a = 2$ , то система имеет бесконечное множество решений:  $x = \frac{2+7y}{10}$ ;  $y$  — любое число.

3. Решение. Пусть  $ax^2 + bx + c$  — искомый многочлен. Тогда по условию имеем систему трех уравнений  $a + b + c = -5$ ;  $4a + 2b + c = -2$ ;  $9a + 3b + c = 3$ . Отсюда  $a = 1$ ;  $b = 0$ ;  $c = -6$ . Искомый многочлен  $x^2 - 6$ .

4. (1, 2, 3, 4). Указание. Сложить попарно все уравнения системы.

5.  $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}\right)$ . Указание. Ввести новые неизвестные  $\frac{1}{x} = a$ ,  $\frac{1}{y} = b$ ;  $\frac{1}{z} = c$ ;  $\frac{1}{v} = d$ .

## XIV

1. Доказательство проведем методом математической индукции. Пусть  $n=1$ . Одна прямая рассекает плоскость на две части. При  $n=1$  имеем  $\frac{n(n+1)}{2} + 1 = 2$ . Таким образом, при  $n=1$  утверждение справедливо. Допустим, что утверждение справедливо при  $n=k$ , где  $k$  — любое натуральное число, т. е. допустим, что  $k$  прямых рассекают плоскость на  $\frac{k(k+1)}{2} + 1$  частей. Докажем, что тогда  $(k+1)$  прямых рассекут плоскость на  $\frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1$  частей.  $(k+1)$ -я прямая по условию пересекает каждую из первых  $k$  прямых и притом в такой точке, в которой никакие из первых  $k$  прямых не пересекались. Это значит, что  $(k+1)$ -я прямая проходит через  $(k+1)$  частей плоскости и каждую такую часть делит на две части. Поэтому после проведения  $(k+1)$ -й прямой число частей плоскости увеличивается на  $(k+1)$ . Теперь имеем

$$\frac{k(k+1)}{2} + 1 + (k+1) = (k+1) \left( \frac{k}{2} + 1 \right) + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2} + 1.$$

Итак, утверждение справедливо при  $n=1$  и из справедливости его при  $n=k$  вытекает справедливость его при  $n=k+1$ . Значит, утверждение справедливо при любом натуральном  $n$ .

2. 1; -1; -2; -4. У к а з а н и е. Ввести новую неизвестную  $x^2 + 3x = y$ .

3. 1; -6. У к а з а н и е. Уравнение преобразовать к виду  $(x^2 + 5x + 4) \times (x^2 + 5x + 6) = 120$  и ввести новую неизвестную  $x^2 + 5x + 4 = y$ .

$$4. \frac{1 + \sqrt{33}}{4} \pm \frac{\sqrt{50 + 2\sqrt{33}}}{4}; \quad \frac{1 - \sqrt{33}}{4} \pm \frac{\sqrt{50 - 2\sqrt{33}}}{4}.$$

У к а з а н и е. Обе части уравнения разделить на  $x^2$  и ввести новую неизвестную  $x - \frac{1}{x} = y$ .

5. Доказательство. Допустим, что при  $x=x_0$  многочлен  $x^3 + 5x + 16$  делится на 169, где  $x_0$  — целое число. Тогда  $x_0^3 + 5x_0 + 16 = 169t$ , где  $t$  — некоторое целое число. Отсюда имеем  $x_0^3 + 5x_0 + (16 - 169t) = 0$ . Решая уравнение, получим  $x_0 = \frac{-5 \pm \sqrt{169 \cdot 4t - 39}}{2}$ . Для того чтобы  $x_0$  было

рациональным числом, необходимо, чтобы подкоренное выражение было квадратом целого числа. Однако  $169 \cdot 4t - 39 = 13(13 \cdot 4t - 3)$ . Число, записанное в скобках, на 13 не делится. Следовательно, подкоренное выражение делится на 13, а на  $13^2$  не делится, т. е. не является квадратом целого числа. Выходит, что наше допущение неверно.

## XV

1.  $(-1, -2, -3); (1, 2, 3)$ .

2. Решение. Умножим первое уравнение на  $x+y$ , внося этот множитель во второе слагаемое под знак корня. При этом необходимо рассмотреть два случая  $x+y \geq 0$  и  $x+y < 0$ . В первом случае получим  $x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 - y^2} = 20$ , откуда, положив  $\sqrt{x^2 - y^2} = t$ , имеем  $t^2 + t - 20 = 0$ ;  $t_1 = 4$ ,  $t_2 = -5$ . Второе решение следует отбросить. Итак,  $x^2 - y^2 = 16$ ;  $x^2 + y^2 = 34$ , откуда  $x = \pm 5$ ;  $y = \pm 3$ . Нужно взять те комбинации значений, для которых  $x+y > 0$ , т. е.  $(5, 3)$  и  $(5, -3)$ .

Во втором предположении получим  $x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 - y^2} = 20$ , откуда  $\sqrt{x^2 - y^2} = 5$ ;  $x^2 - y^2 = 25$ . Совместное решение с  $x^2 + y^2 = 34$  дает

$x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{118}$ ;  $y = \pm \frac{3}{2} \sqrt{2}$ . Нужно взять те комбинации значений, для которых  $x + y < 0$ , т. е.  $\left(-\frac{1}{2} \sqrt{118}, \frac{3}{2} \sqrt{2}\right)$  и  $\left(-\frac{1}{2} \sqrt{118}, -\frac{3}{2} \sqrt{2}\right)$ .

Все четыре решения удовлетворяют системе уравнений.

## XVI

1. Указание. По условию,  $2a_1 + d(p + q - 1) = 0$ .
2. Указание. Вычислить суммы, заключенные в скобки.
3.  $A = \frac{(10^{n+1} + 2)^2}{9}$ . 4.  $S_n = \frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^{2n} + 1}{x^{2n}} - 2(n + 1)$ .
5. Указание. Разность между правой и левой частью неравенства равна  $\frac{a^{k+1}}{1-a}$ .

## XVII

1. Доказательство.  $\frac{1}{\log_3 \pi} = \log_\pi 2$ ;  $\frac{1}{\log_3 \pi} = \log_\pi 5$ ;  $\log_\pi 10 > 2$ .
2. Доказательство.

$$\frac{\log_a n}{\log_{am} n} = \log_a n \cdot \log_n am = \log_a n (\log_n a + \log_n m) = 1 + \log_n m \log_a n.$$

Остается доказать, что  $\log_n m \log_a n = \log_a m$ . По определению логарифма имеем  $n^{\log_n m} = m$ . Прологарифмируем это равенство по основанию  $a$ . Получим  $\log_a m \log_n n = \log_a m$ .

4. -2; 2. Указание. Воспользоваться тем, что  $\sqrt{2 - \sqrt{3}} \times \sqrt{2 + \sqrt{3}} = 1$  и ввести новое неизвестное  $(\sqrt{2 - \sqrt{3}})^x = y$ .

## XVIII

1. Решение. Каждую из точек пересечения отрезков можно рассматривать как точку пересечения диагоналей четырехугольника, две вершины которого лежат на одной из параллельных прямых, а две другие лежат на другой из параллельных. Поэтому отрезки пересекутся  $C_m^2 \cdot C_n^2$  раз.

3. Доказательство. Воспользуемся тождеством  $(1+x)^n (1+x)^2 = (1+x)^{n+2}$ . Коэффициент при  $x^{m+1}$  в левой части тождества равен  $C_n^{m+1} + 2C_n^m + C_n^{m-1}$ , в правой части коэффициент при той же степени  $x$  равен  $C_{n+2}^{m+1}$ .

4. Указание. Воспользоваться тождеством  $(1+x)^n (1+x)^2 = (1+x)^{n+2}$ .
5. Доказательство. Пусть

$$S = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n. \quad (1)$$

Так как  $C_n^{n-k} = C_n^k$ , равенство (1) можно переписать так:  $S = nC_n^n + (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 + \dots + C_n^{n-1}$ . (2)

Сложим почленно равенства (1) и (2), получим  $2S = n(1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n)$  или  $2S = n \cdot 2^n$ . Откуда  $S = n \cdot 2^{n-1}$ .

6. Доказательство. Докажем сначала, что  $(2n+1)C_{2n}^n$  делится на  $n+1$ . Действительно,  $\frac{(2n+1)C_{2n}^n}{n+1} = \frac{(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!n!} = \frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} = C_{2n+1}^n$ .

Далее,  $C_{2n+1}^n = \frac{(2n+1)C_{2n}^n}{n+1} = \left(2 - \frac{1}{n+1}\right) C_{2n}^n$ , откуда  $\frac{1}{n+1} C_{2n}^n = 2C_{2n}^n - C_{2n+1}^n$ . Следовательно,  $\frac{1}{n+1} C_{2n}^n$  есть целое число и  $C_{2n}^n$  делится на  $n+1$ .

7. Доказательство. Имеем тождества

$$\begin{aligned} C_{n+k+1}^{n+1} &= C_{n+k}^n + C_{n+k+1}^n, \\ C_{n+k}^{n+1} &= C_{n+k-1}^n + C_{n+k}^n, \\ &\dots\dots\dots \\ C_{n+2}^{n+1} &= C_{n+1}^n + C_{n+2}^n, \\ C_{n+1}^{n+1} &= C_n^n. \end{aligned}$$

Сложим эти тождества почленно. После уничтожения одинаковых слагаемых в левой и правой части полученного тождества будем иметь требуемый результат.

Другое доказательство (методом математической индукции). Пусть  $k=0$ . Тогда тождество принимает вид  $C_n^n = C_{n+1}^{n+1}$ . Очевидно, что при  $k=0$  тождество справедливо. Допустим, что тождество справедливо при  $k=m$ , т. е. допустим, что  $C_n^n + C_{n+1}^n + \dots + C_{n+m}^n = C_{n+m+1}^{n+1}$ . Прибавим к каждой части последнего тождества по  $C_{n+m+1}^n$ , получим  $C_n^n + C_{n+1}^n + \dots + C_{n+m}^n + C_{n+m+1}^n = C_{n+m+1}^{n+1} + C_{n+m+1}^n$  или  $C_n^n + C_{n+1}^n + \dots + C_{n+m}^n + C_{n+m+1}^n = C_{n+m+2}^{n+1}$ . Значит, тождество справедливо при  $k=m+1$ .

8. Решение. Воспользуемся соотношением  $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$  (см. задачу 2 этого раздела). Тогда сумма переписется так:

$$\begin{aligned} n - nC_{n-1}^1 + nC_{n-1}^2 - \dots + (-1)^{n-1} nC_{n-1}^{n-1} &= \\ = n(1 - C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 - \dots + (-1)^{n-1} C_{n-1}^{n-1}) &= 0. \end{aligned}$$

9. Доказательство.

$$\begin{aligned} \frac{n!}{a_1! a_2! \dots a_k!} &= \frac{n!}{a_1! (n-a_1)!} \frac{(n-a_1)!}{a_2! (n-a_1-a_2)!} \dots \frac{(n-a_1-a_2-\dots-a_{k-1})!}{a_k!} = \\ &= C_n^{a_1} C_{n-a_1}^{a_2} \dots C_{n-a_1-a_2-\dots-a_{k-1}}^{a_k} (n-a_1-a_2-\dots-a_k)! \end{aligned}$$

Каждый множитель — целое число.

10. Доказательство.

$$\begin{aligned} (1+1)^{m+1} &= 1 + C_{m+1}^1 \cdot 1 + C_{m+1}^2 \cdot 1^2 + \dots + C_{m+1}^m \cdot 1^m + 1^{m+1}, \\ (1+2)^{m+1} &= 1 + C_{m+1}^1 \cdot 2 + C_{m+1}^2 \cdot 2^2 + \dots + C_{m+1}^m \cdot 2^m + 2^{m+1}, \\ &\dots\dots\dots \\ (1+n)^{m+1} &= 1 + C_{m+1}^1 \cdot n + C_{m+1}^2 \cdot n^2 + \dots + C_{m+1}^m \cdot n^m + n^{m+1}. \end{aligned}$$

Сложим эти равенства почленно, получим

$$\begin{aligned} 2^{m+1} + 3^{m+1} + \dots + (n+1)^{m+1} &= \\ = n + C_{m+1}^1 S_1 + C_{m+1}^2 S_2 + \dots + C_{m+1}^m S_m + 1^{m+1} + 2^{m+1} + \dots + n^{m+1}. \end{aligned}$$

После уничтожения одинаковых сумм  $2^{m+1} + 3^{m+1} + \dots + n^{m+1}$  в левой и правой части получим требуемое тождество.

11. Решение. Первый множитель представляет собой  $1 - \frac{1}{C_3^2}$ , второй множитель представляет собой  $1 - \frac{1}{C_4^2}$  и т. д., последний множитель представляет собой  $1 - \frac{1}{C_{n+1}^2}$ . Рассмотрим множитель в общем виде:  $1 - \frac{1}{C_k^2} = 1 - \frac{2}{k(k-1)} = \frac{(k-2)(k+1)}{(k-1)k}$ . Для того, чтобы получить последовательно все сомножители произведения, достаточно придать  $k$  последовательно все целые значения от 3 до  $n+1$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right) &= \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 4} \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 5} \dots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \\ &= \frac{(n-1)! (n+2)! 2}{6n! (n+1)!} = \frac{n+2}{3n}. \end{aligned}$$

## XIX

1. Решение.  $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{n-2} (1+i)^2 = i^{n-2} \cdot 2i = 2i^{n-1}$ .

2. Решение. Рассмотрим  $(1+i)^n$ . Получим

$$(1+i)^n = \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n = (\sqrt{2})^n \left( \cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right).$$

С другой стороны, по биному Ньютона

$$(1+i)^n = (1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots) + i(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots).$$

Поэтому  $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$ ,  $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \dots = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}$ .

3. Указание. См. задачу 2 этого раздела.

## XX

1. Указание. Воспользоваться биномом Ньютона.

2. Доказательство. Проведем доказательство методом математической индукции. Пусть  $n=2$ . Тогда  $2^2 > 2$ . Допустим, что  $2^k > k$ , где  $k \geq 2$ . Умножим обе части неравенства на 2. Получим  $2^{k+1} > 2k$ . Но  $2k > k+1$ . Следовательно,  $2^{k+1} > k+1$ .

Можно провести доказательство и другим способом:  $2^n = (1+1)^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + 1 > n$ , если  $n > 1$ .

3. Указание. Воспользоваться методом математической индукции.

4. Указание. Воспользоваться методом математической индукции.

5. Указание. Воспользоваться свойством произведения двучленов, первые члены которых одинаковы, а вторые различны.

6. Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Пусть  $n=2$ . Тогда  $(1-a_1)(1-a_2) = 1 - (a_1 + a_2) + a_1 a_2$ . Следовательно,  $(1-a_1)(1-a_2) > 1 - (a_1 + a_2)$ . Допустим, что неравенство справедливо,

ливо при  $n=k$ ;  $k \geq 2$ , т. е. допустим, что  $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_k) > 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_k)$ . Умножим теперь обе части неравенства на  $1 - a_{k+1}$ . Получим  $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_k)(1-a_{k+1}) > 1 - a_{k+1} - (a_1 + a_2 + \dots + a_k)(1-a_{k+1})$ . Или  $(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_k)(1-a_{k+1}) > 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1}) + a_{k+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_k)$ , т. е.  $(1-a_1)\dots(1-a_{k+1}) > 1 - (a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1})$ .

7. Доказательство. Пусть  $n=1$ . Тогда неравенство, очевидно, справедливо. Предположим, что неравенство справедливо при  $n=k$ , где  $k \geq 1$ , т. е. предположим, что

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^2 \leq k(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2). \quad (1)$$

Докажем, что неравенство справедливо и при  $n=k+1$ , т. е. докажем, что

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1})^2 \leq (k+1)(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 + a_{k+1}^2). \quad (2)$$

Имеем очевидное неравенство

$$(a_1 - a_{k+1})^2 + (a_2 - a_{k+1})^2 + \dots + (a_k - a_{k+1})^2 \geq 0.$$

Отсюда имеем, что

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 + ka_{k+1}^2 \geq 2a_{k+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_k).$$

Или

$$a_{k+1}^2 + 2a_{k+1}(a_1 + a_2 + \dots + a_k) \leq a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_k^2 + (k+1)a_{k+1}^2. \quad (3)$$

Сложим неравенства (1) и (3) почленно, получим неравенство (2).

8. Доказательство.  $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)$ . Докажем, что  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ . Действительно,  $(a-b)^2 \geq 0$ ;  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ . Разделим обе части неравенства на  $ab$ , получим  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ . Точно так же  $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} \geq 2$ ;  $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$ . Таким образом,  $(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$ . Отсюда  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$ .

9. Доказательство. Неравенство является частным случаем следующей теоремы: *среднее геометрическое неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического*, т. е., если  $a_1, a_2, \dots, a_n$  неотрицательны, то  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ . Сначала докажем неравенство для  $n=2$ . Очевидно, что  $(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 \geq 0$ . Отсюда  $a_1 + a_2 \geq 2\sqrt{a_1 a_2}$  или  $\frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$ . Теперь докажем неравенство для  $n=4$ :

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} &= \frac{\frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_3 + a_4}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} \geq \\ &\geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{a_3 a_4}} = \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}. \end{aligned}$$

Из справедливости неравенства для  $n=4$  вытекает его справедливость для  $n=3$ . Положим  $a_4 = \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ . Тогда имеем  $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}}$ . Или  $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}}{4} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ . Отсюда

$a_1 + a_2 + a_3 \geq 3 \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ . Наконец  $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ . Мы доказали неравенство общим методом, посредством которого оно доказывается для любого  $n$ .

Укажем теперь и другое решение. Мы можем считать, что  $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ , т. е.  $a_2 = a_1 + \alpha$ ;  $a_3 = a_1 + \beta$ , где  $\alpha \geq 0$ ;  $\beta \geq 0$ , причем  $\beta \geq \alpha$ . Тогда неравенство примет вид

$$\frac{3a_1 + \alpha + \beta}{3} \geq \sqrt[3]{a_1(a_1 + \alpha)(a_1 + \beta)}. \quad (1)$$

Предположим, что неравенство (1) справедливо. Тогда

$$3a_1 + \alpha + \beta \geq 3 \sqrt[3]{a_1(a_1 + \alpha)(a_1 + \beta)}. \quad (2)$$

Возведем обе части неравенства (2) в третью степень, получим неравенство

$$[3a_1 + (\alpha + \beta)]^3 \geq 27a_1[a_1^3 + a_1(\alpha + \beta) + \alpha\beta], \quad (3)$$

или

$$27a_1^3 + 27a_1^2(\alpha + \beta) + 9a_1(\alpha + \beta)^2 + (\alpha + \beta)^3 \geq 27a_1^3 + 27a_1^2(\alpha + \beta) + 27a_1\alpha\beta, \quad (4)$$

или

$$9a_1\alpha^2 + 18a_1\alpha\beta + 9a_1\beta^2 + (\alpha + \beta)^3 \geq 27a_1\alpha\beta, \quad (5)$$

или

$$9a_1\alpha^2 + 9a_1\beta^2 + (\alpha + \beta)^3 \geq 9a_1\alpha\beta. \quad (6)$$

Неравенство (6) справедливо. Действительно, так как  $\beta \geq \alpha$ , то  $9a_1\beta^2 \geq 9a_1\alpha^2$  и тем более справедливо неравенство (6). Из неравенства (6) вытекают последовательно неравенства (5), (4), (3), (2), (1). Значит, неравенство (1) справедливо.

#### 10. Доказательство.

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)](2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n)}{n!n!} = \\ = \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)] \cdot 2^n(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n)}{n!n!} = \frac{2^n}{2n+1} \frac{3 \cdot 5 \dots (2n-1)(2n+1)}{n!}.$$

Очевидно, что  $\frac{2k+1}{k} = 2 + \frac{1}{k}$ . Поэтому при любом положительном  $k$  справедливо неравенство  $\frac{2k+1}{k} > 2$ . Поэтому

$$\frac{3}{1} > 2; \quad \frac{5}{2} > 2; \quad \dots; \quad \frac{2n+1}{n} > 2. \quad (1)$$

В результате почленного умножения неравенств (1) имеем  $\frac{3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{n!} > 2^n$ .

Следовательно,  $C_{2n}^n > \frac{4^n}{2n+1}$ .

#### 11. Решение.

$$\left. \begin{aligned} ax + y &= a, \\ x + ay &= 1, \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} a^2x + ay &= a^2, \\ x + ay &= 1, \end{aligned} \right\} \quad (a^2 - 1)x = a^2 - 1.$$

Если  $a^2 - 1 \neq 0$ , то  $x = 1$ ;  $y = 0$ .

Пусть  $a^2 - 1 = 0$ . Тогда а)  $a = 1$ ; б)  $a = -1$ . Если  $a = 1$ , система принимает такой вид:  $x + y = 1$ ;  $x + y = 1$ . Тогда она имеет бесконечное множество решений  $x = 1 - y$ ;  $y$  — любое число. Если  $a = -1$ , система

принимает такой вид:  $x - y = 1$ ;  $x - y = 1$ . В этом случае она имеет бесконечное множество решений  $x = 1 + y$ ;  $y$  — любое число.

12. Решение. Из первых двух уравнений системы имеем

$$(a^3 - 1)y + (a - 1)z = a^3 - 1. \quad (1)$$

Из второго и третьего уравнений системы имеем

$$(a - 1)y + (1 - a)z = a - a^3. \quad (2)$$

Сложим почленно уравнения (1) и (2), получим  $(a^3 + a - 2)y = a - 1$ . Если  $a^3 + a - 2 \neq 0$ , то  $y = \frac{1}{a^3 + a - 2}$ . Далее,  $a^3 + a - 2 = 0$  при  $a = 1$  и  $a = -2$ .

Таким образом, если  $a \neq 1$  и  $a \neq -2$ , то  $y = \frac{1}{a^3 + a - 2}$ . Теперь легко определяем  $z = \frac{(a+1)^3}{a+2}$ ;  $x = -\frac{a+1}{a+2}$ .

Остается рассмотреть случаи, когда  $a = -2$  и  $a = 1$ . Пусть  $a = -2$ . В этом случае система имеет такой вид:

$$\left. \begin{aligned} -2x + y + z &= 1, \\ x - 2y + z &= -2, \\ x + y - 2z &= 4. \end{aligned} \right\}$$

Сложим все уравнения почленно. Получим  $0 \cdot (x + y + z) = 3$ . Не существует таких  $x, y, z$ , чтобы это равенство выполнялось. Значит, система не имеет решения.

Пусть  $a = 1$ . В этом случае система имеет такой вид:

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 1, \\ x + y + z &= 1, \\ x + y + z &= 1. \end{aligned} \right\}$$

Эта система имеет бесконечное множество решений  $x = 1 - y - z$ ;  $y$  — любое число;  $z$  — любое число.

13. Доказательство.  $a_1^2 x^3 + 2a_1 b_1 x + b_1^3 = (a_1 x + b_1)^3$ . Поэтому при всех значениях  $x$   $a_1^2 x^3 + 2a_1 b_1 x + b_1^3 \geq 0$ . Точно так же при всех значениях  $x$

$$a_2^2 x^3 + 2a_2 b_2 x + b_2^3 \geq 0,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_n^2 x^3 + 2a_n b_n x + b_n^3 \geq 0.$$

Отсюда посредством сложения неравенств получаем, что при всех значениях  $x$  справедливо неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) x^3 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) x + (b_1^3 + b_2^3 + \dots + b_n^3) \geq 0,$$

или

$$x^3 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) x + 1 \geq 0.$$

Значит, дискриминант трехчлена, находящегося в левой части неравенства, отрицателен или равен нулю, т. е.  $4(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 - 4 \leq 0$ , откуда  $-1 \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq 1$ .



## XXI

1. Доказательство. Трехчлен  $x^3 + x + 1$  имеет такие корни:  
 $x_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  $x_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Нетрудно проверить, что  $x_1^3 = x_2^3 = 1$ .  
 Подставим в трехчлен  $x^{3n+2} + x^{3m+1} + 1$  вместо  $x$  число  $x_1$ . Получим

$$x_1^{3n+2} + x_1^{3m+1} + 1 = (x_1^3)^n x_1^2 + (x_1^3)^m x_1 + 1 = x_1^2 + x_1 + 1 = 0.$$

Точно так же можно убедиться, что трехчлен  $x^{3n+2} + x^{3m+1} + 1$  обращается в нуль при  $x = x_2$ . Значит,  $x^{3n+2} + x^{3m+1} + 1$  делится на  $x^3 + x + 1$ .

---

## ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА

---

### ИМЕЮТСЯ В ПРОДАЖЕ:

- Архимед, Сочинения, Физматгиз, 1962, 640 стр., 2 р. 70 к.
- Гильберт Д., Основания геометрии, Гостехиздат, 1948, 492 стр., 1 р. 80 к.
- Каган В. Ф., Лобачевский и его геометрия, Гостехиздат, 1955, 304 стр., 65 коп.
- Кирпичев В. Л., Беседы о механике, изд. 5-е, Гостехиздат, 1951, 360 стр., 69 коп.
- Китайгородский А. И., Введение в физику, Физматгиз, 1959, 704 стр., 1 р. 45 к.
- Куликовский П. Г., Справочник любителя астрономии, изд. 3-е, перераб., Физматгиз, 1961, 494 стр., 1 р. 24 к.
- Левантовский В. И., Рассказ об искусственных спутниках, Гостехиздат, 1957, 96 стр., 16 коп.
- Хинчин А. Я., Краткий курс математического анализа, изд. 3-е, Гостехиздат, 1957, 628 стр., 1 р. 27 к.
- «Математическое просвещение» (математика, ее преподавание, приложения и история).
- Выпуск 2, Гостехиздат, 1957, 320 стр., 62 коп.
- Выпуск 4, Физматгиз, 1959, 322 стр., 60 коп.
- Выпуск 5, Физматгиз, 1960, 304 стр., 64 коп.
- Выпуск 6, Физматгиз, 1961, 374 стр., 71 коп.

---

*Книги продаются в книжных магазинах, а также высылаются наложенным платежом республиканскими, краевыми и областными отделениями «Книга — почтой».*

## ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛИТЕРАТУРА

---

### ГОТОВЯТСЯ К ИЗДАНИЮ:

Антонов Н. П., Выгодский М. Я., Никитин В. В., Санкин А. И., Сборник задач по элементарной математике (для самообразования), изд. 10-е, стереотипное.

Артамонов И. Д., Иллюзии зрения, изд. 2-е, перераб.

Буховцев Б. Б. и др., Сборник задач по элементарной физике.

Воронцов-Вельяминов Б. А., Очерки о вселенной, изд. 5-е.

Гильзин К. А., Электрические межпланетные корабли.

Григорьев В. И. и Мякишев Г. Я., Силы в природе.

Зигель Ф. Ю., Сокровища звездного неба (путеводитель по созвездиям).

Компанеев А. С., Что такое квантовая механика.

Ландау Л. Д. и Лившиц Е. М., Теоретическая физика, т. V. Статистическая физика (классическая и квантовая).

Пановко Я. Л. и Губанова И. И., Устойчивость и колебания упругих систем (парадоксы, неожиданности и новые концепции).

Селезнев Ю. А., Основы элементарной физики (пособие для самообразования).

Соминский И. С., Элементарная алгебра (дополнительный курс).

Струве О. и др., Элементарная астрономия.

Черкасов А. Н., Введение в высшую математику.

---

*Предварительные заказы на эти книги принимают книжные магазины. Оформив заказ на почтовой открытке в магазине, Вы получите извещение о поступлении книги в магазин. В случае отказа в приеме предварительного заказа просим сообщать Всесоюзному объединению книжной торговли по адресу: Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.*

*Дмитрий Константинович Фаддеев  
и Илья Самуилович Соминский*

Алгебра для самообразования

М., 1964 г. 532 стр. с илл.

Редактор *М. М. Горячая*

Техн. редактор *Н. Я. Мурашова*

Корректор *Э. В. Моисеева*

---

Подписано к печати с матриц 19/II 1964 г.  
Бумага 60×90<sup>1/8</sup>. Физ. печ. л. 33,25. Условн.  
печ. л. 33,25. Уч.-изд. л. 32,35. Тираж 100 000.  
Т-00965. Цена книги 1 р. 07 к.  
Заказ № 905

---

Издательство «Наука».

Редакция математики

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

---

Ленинградская типография № 1 «Печат-  
ный Двор» им. А. М. Горького «Главпо-  
лиграфпрома» Государственного комитета  
Совета Министров СССР по печати,  
Гатчинская, 26.